АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1 - 6446

№ 1—6 1959
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga,
Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation
Printed in the United States of America

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1—1101

QA
1
A373
1959
no. 1-6

*

Referativnyi zhurnal "Matematika"

№ 1 **1959**

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Директор института профессор *А. И. Михайлов*

Главные редакторы серий: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), профессор *В. В. Алпатов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология), профессор *В. Ю. Ломоносов* (Электротехника), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *В. В. Покшишевский* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 2
Преподавание математики 4
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 12
Алгебра 17
Многочлены и линейная алгебра 17
Группы 18
Поля, кольца и структуры 20
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 24
Теория функций действительного переменного . . 35
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями 42
Теория функций комплексного переменного . . . —
Дифференциальные уравнения 59
Обыкновенные дифференциальные уравнения 59
Уравнения в частных производных 71
Приложения к физике, технике и естественным наукам 82
Интегральные уравнения 95
Приложения интегральных уравнений . . . . —
Вариационное исчисление 99
Анализ (другие вопросы) 101
Числовые ряды 103
Специальные функции 105
Интегральные преобразования и операционное исчисление 110
Приложения общих методов математического анализа 113
Функциональный анализ 114
Теория вероятностей 122
Математическая статистика 131
Теория игр и математическая экономика . . 137
Применение теоретико вероятностных и статистических методов 141
Геометрия 144
Элементарная геометрия 146
Приложения геометрии 148
Проективная и начертательная геометрия . . 149
Алгебраическая геометрия 150
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства и обобщения 152
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 155
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 159
Метрические методы в геометрии 161
Выпуклые многообразия 163
Численные и графические методы 165
Таблицы 173
Вычислительные машины и математические приборы 175
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 200
Авторский указатель 208

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL
INSTITUTE OF THE SCIENTIFIC INFORMATION
ACADEMY OF SCIENCE OF THE USSR
Director of the Institute professor *A. I. Mikhailov*

Editors of series: corresponding member *N. V. Ageev* (Metallurgiya), professor *V. V. Alpatov* (Biologiya), professor *E. E. Zakharov* (Geologiya), professor *V. Y. Lomonosov* (Electrotekhnika), professor *S. M. Nikolsky* (Matematika), professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomiya i geodeziya), professor *V. V. Pokshishevsky* (Geografiya), academician *L. I. Sedov* (Mekhanika), *V. V. Serpinsky* (Khimiya), candidate of technical science *V. Z. Freidberg* (Mashinostroenie), professor *I. A. Khvostikov* (Geofizika), professor *E. V. Shpolsky* (Fizika).

CONTENTS

General 1
History. Personalia 2
Teaching of mathematics 4
Foundations. Mathematical logic 6
Theory of numbers 12
Algebra 17
Polynomials, linear algebra 17
Groups 18
Fields, rings, lattices 20
Algebraic theory of communication and control circuit . . . . . —
Topology 24
Theory of functions of real variables 35
Theory of sets . . . . . —
Approximations of funcitons by polynomials and by their generalizations 42
Theory of functions of complex variables . . . . . —
Differential equations 59
Ordinary differential equations 59
Partial differential equations 71
Applications to physics, technology and natural sciences 82
Integral equations 95
Applications of integral equations . . . . —
Calculus of variations 99
Analysis (other aspects) 101
Numerical series 103
Special functions 105
Integral transforms, operational calculus . . 110
Applications of general methods of mathematical analysis 113
Functional analysis 114
Theory of probability 122
Mathematical statistics 131
Theory of games, mathematical economics 137
Applications of probabilities and statistical methods 141
Geometry 144
Elementary geometry 146
Applications of geometry 148
Projective and descriptive geometry . . . 149
Algebraic geometry 150
Differential geometry of 3-dimensional space and generalizations 152
Geometry of *n*-dimensional space. Theory of relativity 155
Global theory of differentiable manifolds 159
Metric methods in geometry 161
Convex manifolds 163
Numerical and graphical methods 165
Tables 173
Computers and mathematical devices 175
Application of computer devices 200
Author index 208

Editorial Office: Moscow D—219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

РЕДАКТОР *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, М. А. Наймарк, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, К. А. Рыбников, Н. В. Смирнов, С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *А. А. Конюшков*

Рефераты 1—1101 **№ 1** **Январь 1959 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

1. **Математика в Советском Союзе и ее влияние на развитие нашей математики. Чакалов** (Математиката в Съветския Съюз и нейното отражение върху развитието на математиката у нас. Чакалов Л.), Природа (Бълг.), 1957, **6**, № 5, 9—14 (болг.)

После краткого очерка развития математики в России от основания Академии наук до 1917 г. автор характеризует те коренные сдвиги в развитии науки, которые явились следствием Великой Октябрьской социалистической революции и построения социалистического общества в Советском Союзе, и дает обзор наиболее выдающихся достижений советской математики. До 9 сентября 1944 г. господствовавший в Болгарии буржуазно-фашистский режим не давал возможности поддерживать связи с советской наукой; за это время в советских изданиях появились только две работы болгарских математиков. После сентябрьской революции болгарская математика развивается в тесном общении с математикой Советского Союза, что автор иллюстрирует рядом примеров. И. Б. Погребысский

2. **О международных связях Института математики АН УССР. Гнеденко, Гаврилюк** (Про міжнародні зв'язки Інституту математики АН УРСР. Гнеденко Б. В., Гаврилюк В. Т.), Вісник АН УРСР, 1958, № 3, 66—67 (укр.)

Статья информационного содержания: сведения о выступлениях иностранных ученых в Институте математики АН УССР, о заграничных командировках ученых института, об изданиях их работ за пределами Советского Союза, о тематических связях их исследований с работами ученых ряда стран. И. Б. Погребысский

3. **Вычислительный центр Академии наук СССР. Дородницын** (Centrul de calcul al Academiei de Stiinte a URSS. Dorodnitin A. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1958, **12**, № 1, 28—31 (рум.)

Перевод из Вестн. АН СССР (РЖМат, 1957, 5266)

4. **Съезд Общества прикладной математики и механики. Бабушка** (Sjezd Společnosti pro aplikovanou matematiku a mechaniku. Babuška Ivo), Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 4, 500 (чешск.)

5. **Общий отчет о деятельности АПМ. Валусинский** (Rapport général sur l'activité de l'A. P. M. Walusinski G.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 191, 281—291 (франц.)

Отчет президента АПМ (Ассоциация преподавателей математики) на Генеральной ассамблее Ассоциации (март 1958 г.). Содержит краткие сведения о состоянии и функционировании АПМ, ее отделениях, бюллетене АПМ, педагогических вопросах, в которых она принимала участие, проблемах подготовки преподавателей, предложениях по программам преподавания математики в школах второй ступени. А. И. Маркушевич

6. **Развитие математики. Темпл** (The growth of mathematics. Presidential address to the Mathematical Association, January 1957. Temple G.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 337, 161—168 (англ.)

Статья является президентским посланием к Математической ассоциации. Она имеет целью проиллюстрировать, что математика развивается не в логическом порядке, а под давлением естествознания, путем передачи математических традиций и путем воображения и интуиции отдельных математиков.

Понять математическую абстракцию, говорит автор, можно лишь рассматривая материал, из которого она получена. Таким материалом служат, во-первых, прежние достижения математики, зафиксированные в книгах и излагаемые преподавателем. Во-вторых, фактором развития математики служат проблемы, доставляемые естествознанием и техникой.

Говоря об абстракции, автор различает абстракцию через исключение, иными словами, «идеализацию», и абстракцию через расширение. Примером абстракции первого рода может служить понятие идеальной жидкости, «вполне гладкой поверхности» и т. д. и, наконец, аксиоматизация (теории вероятностей и топологии). Переходя к описанию абстракции второго рода (через расширение), образующей, по мнению автора, суть математического творчества, он приводит известный рассказ Пуанкаре. Внешними особенностями процесса математической абстракции, по мнению автора, являются расширение понятий, формализация, обнаружение неразрешимости проблемы, введение несобственных элементов и, наконец, мыслительный эксперимент.

В заключение говорится о положительной роли логического изящества в процессе доказательства. Имеется портрет автора. Г. П. Боев

7. **О симпозиуме по основам математики (20—21 мая 1957 г., г. Киото, Япония). Ака Сэцуя,** Сугаку, 1957, **9**, № 2, 116—118 (японск.)

8. **Труды Академии наук штата Теннеси за 1956 г. Секция математики** (Proceedings of the Tennessee Academy of Science for 1956. Mathematics section), J. Tennessee Acad. Sci., 1957, **32**, № 2, 130—131 (англ.)

9. **Несколько замечаний о математических журналах. Шевалле** (Chevalley Claude), Сугаку, 1956, **7**, № 4, 200—201 (японск.)

10. **К критике современного «математического» идеализма. Кольман Э.** В сб.: Диалект. материализм и соврем. естествозн. М., Госполитиздат, 1957, 184—250

Рассмотрены следующие философские вопросы математики: 1) предмет математики и характер ее развития; 2) логико-философское обоснование математики; 3) кризис философско-логических основ современной математики в странах капитала; 4) о задачах диалектико-материалистического обоснования математики.

Автор приводит много фактов из истории математики, дает критическую оценку трудам ряда зарубежных математиков и философов. Н. А. Киселева

11. Математика как «mathesis universalis». **Воппе-рер** (Mathematik als Mathesis universalis. Wopperer E.), Math. und naturwiss. Unterr., 1956—1957, **9**, № 10, 437—447 (нем.)

Автор хочет раскрыть роль математики в человеческом знании и в преподавании. В качестве примеров трех типов математического мышления автор приводит Гаусса, Лейбница и Паскаля. Во все времена, говорит он, математика являлась не только совокупностью вычислений и построений, но и значительным явлением человеческого духа, нормой мышления; иначе говоря, представляла собой «mathesis universalis» (всеобщее знание) Лейбница.

В дальнейшем обсуждении различных сторон столь широко поставленной проблемы автор трактует вопрос о роли математики в человеческой культуре с идеалистических позиций. Г. П. Боев

12. Сравнительная методология науки и техники. Остле (La méthodologie comparée des sciences et des techniques. Hostelet Georges), Rev. synthèse, 1956, **77**, № 3, 279—310 (франц.)

13. Концепция пространства в точных науках от Канта до настоящего времени. Фрёйденталь (The concept of space in the exact sciences from Kant up to the present. Freudenthal H. Handelingen van het XXXIV^{e} Nederlands Natuur- en Geneeskundig Congres, Wageningen, 1955, pp. 82—95) (датск.)
Из Math. Revs, 1956, **17**, № 2, 117.

14. Доремическая система измерения времени. Черчман (Doremic system of time measurement. Churchman H. C.), Duodecimal Bull., 1957, **11**, № 2, 29—36, 43 (англ.)

Автор предлагает двенадцатеричное измерение времени, в частности, деление часов по этому принципу, а также названия для новых единиц. Э. Кольман

15. Еще один недостаток десятичной системы. Рейхенбах (Another fault in the decimal system. Reichenbach Herman), Duodecimal Bull., 1957, **11**, № 2, 37—38 (англ.)

Рассматриваются непоследовательности устной нумерации в германских, славянских и романских языках и расхождение между устной и письменной нумерациями. Автор предлагает при переходе к двенадцатеричной системе счисления сразу согласовать устную и письменную нумерации, начав обе с единиц нулевого разряда. Тогда, например, число $365=5+6\cdot 12+2\cdot 12^2$ писалось бы как 562 и читалось бы как «пять шесть дю(жин) два гро(сса)». Э. Кольман

16. Отвращение к арифметике. Берд (Aversion to arithmetic. Beard Ralph H.), Duodecimal Bull., 1957. **11**, № 2, 44, 46, 48, 4χ (англ.) 45, 47, 49, 4ε (эсперанто)

17. О замечательном сходстве между «икосаэдрической игрой» и «башней Ханоя». Гарднер (About the remarkable similarity between the Icosian Game and the Tower of Hanoi. Gardner Martin), Scient. Amer., 1957, **196**, № 5, 150, 152, 154, 156 (англ.)

Дано описание головоломок «икосаэдрическая игра» (изобретена в 1850 г. Гамильтоном) и «башня Ханоя» (изобретена в 1883 г. Лукасом); установлена связь между их решениями. Сформулирован ряд задач о покрытии шахматной доски различными геометрическими фигурами. Л. Е. Майстров

18 К. Доклады 7-й Научной конференции, посвященной 40-летию Великой Октябрьской социалистической революции. Вып. 2. Математика. Механика. Физика твердого тела. Радиофизика. Спектроскопия. Химия. Томск, Томский ин-т, 1957, 186 стр., беспл.

19 К. Избранные сочинения. Т. 2. Пинкерле (Opere Scelte. Vol. 2. Pincherle Salvatore. A cura della Unione Matematica Italiana. Roma, Ed. Cremonese, 1954, 493 p., 4500 Li.) (итал.)

Этот том содержит оставшиеся (23 статьи) из 38 статей, выбранных для публикации. Т. 1 см. РЖМат, 1956, 930 К.

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 552.

20 К. Кибернетика и ее применение. Рекоменд. обзор лит. Бученков А. Н. Гос. б-ка СССР им. В. И. Ленина. Центр. политехн. б-ка. М., 1956, 23 стр., 50 коп.

21 К. Математика для науки и техники. Алджер (Mathematics for science and engineering. Alger Philip Langdon. New York — London, McGraw-Hill, 1957, xi, 360 pp., ill., 41 sh. 6 d), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 404, 9 (англ.)

22 К. Введение в современную математику. Фрёйнд (A modern introduction to mathematics. Freund John Ernst. Englewood Cliffs, N. J., Prentice—Hall; London, Bailey and Swinfen, 1956, xvi, 543 pp., ill., 64 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 339, 9 (англ.)

23 К. Заметки об основаниях математики. Витгенштейн (Remarks on the foundations of mathematics. Wittgenstein Ludwig. Trans. from the Germ. Oxford, Blackwell, 1956, 434 pp., 37 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 359, 10 (нем., англ.)

24 К. Заметки о математике. 2-е изд. Марсден (Notes on mathematics. 2nd ed. Marsden Hugh Kenyon. Oxford, Blackwell. 1955, 17 pp., ill., 1 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 343, 10 (англ.)

25 К Математическая деятельность. Кн. 1—4. Басс (Mathematical activities. Bass Doris. London. Cassell. 1956, Book 1. 1956, 3,75 pp., ill., 4 sh. 6d. Book 2. 1956, 3,75 pp., ill., 4 sh. 6 d. Book 3. 1956, 3,75 pp., ill., 4sh. 6d. Book 4. 1956, 3,83 pp., ill., 4 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 343, 10 (англ.)

26 К. Физика и математика. Чарпи (Physics and mathematics. Ed. Charpie Robert Alan et al. McGraw-Hill, 1956, 398 pp., ill., 12 doll.), Cumul. Book Index, 1956, **59**, № 7, 23 (англ.)

27 Ж. Известия высших учебных заведений Министерства высшего образования СССР. Машиностроение. Отв. ред. Пинегин С. В. М., Морск. высш. техн. уч-ще им. Н. Э. Баумана. Ежемесячный, 120 р. в год.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

28. Элеатика. Сабо (Eleatica. Szabó A.), Acta antiqua, 1955, 67—103 (нем.; рез. русск.)

На основании анализа 29 и 30 предложений IX книги Евклида автор высказывает гипотезу, что выделенная О. Беккером в 1936 г. из IX книги «Начал» теория четных и нечетных чисел (IX, 21—34, 36) возникла после Парменида (конец VI—V в. до н. э.), а доказательство несоизмеримости диагонали квадрата по времени своего возникновения совпадает с эпохой Зенона (род. ок. 500 г. до н. э.). И. Н. Веселовский

29. Догреческое в греческой геометрии. Брёйнс (Voorgriekse en griekse meetkunde. Bruins E. M.), Euclides (Nederl.), 1958, **33**, № 9, 264—284 (гол.)

30. Об иррациональных числах у древних. Стаматис (Über die Irrationalenzahlen bei den Alten. Stamatis E.), Prakt. Akad. Athenon 29 (1954), 337—345 (1955) (греч.; рез. нем.)
Из Math. Revs., 1956, **17**, № 1, 1

31. Введение к «Изучению интерполяционного метода китайских математиков». Ли Ди (Lee Di), Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 1, 159—160 (кит.)

32. Бируни о временах восхода и долготах дня. Лесли (Biruni on rising times and daylight lengths. Lesley Mark), Centaurus, 1957, **5**, № 2, 121—141 (англ.)

Исследуется содержание 22-й главы второго из четырех астрономических трактатов аль-Бируни, арабский

текст которого был опубликован в 1948 г. (Rasa'il u'l-Biruni, Osmania Oriental Publications Bureau, Osmania University Lallaguda, Hyderabad-Deccan, 1948).

Задача, сформулированная в заголовке статьи,— одна из центральных задач древней астрономии. Трактовка Бируни интересна тем, что он приводит данные, полученные астрономами сассанидского Ирана, Индии и, что представляет наибольший интерес, Вавилонии (так называемая «система А»). По-видимому, арифметические схемы для вычисления времени восхода светил были разработаны в Вавилонии; греческие астрономы обобщили их для различных широт и создали для их вычисления тригонометрические методы (самое позднее в эпоху Птолемея); от греков астрономические методы распространились на восток, причем индусы вместо греческих хорд ввели наши синусы. И. Н. Веселовский

33. Реомюр (1683—1757) (Réaumur. 1683—1757), Chauff.-ventil-condit., 1958, **34**, № 4. 33—38 (франц.)

34. Леонард Эйлер (1707—1783). Облáт (Leonhard Euler (1707—1783). Obláth Richárd), Középisk. mat. lapok, 1957, **15**, № 3—4, 65—75 (венг.)

Статья написана по случаю 250-летия со дня рождения Л. Эйлера. Кроме известных биографических данных, приведен ряд задач и теорем, принадлежащих Эйлеру, в формулировке, доступной читателям журнала (учащимся средних школ). Для некоторых из теорем сообщаются доказательства самого Эйлера, например, для сравнения $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, где a и n — взаимно простые числа; приведены три разных доказательства.

К. С. Сцилард

35. Геометрические преобразования в работах Леонарда Эйлера. Розенфельд Б. А. В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 10. М., Гостехтеориздат, 1957, 371—422

В начале статьи указывается, какие преобразования и в какой форме встречались до Эйлера. Далее излагается содержание второго тома «Введения в анализ», содержащего аналитическую и дифференциальную геометрию, в частности формулы преобразования прямоугольных координат на плоскости и в пространстве, приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду и др. Анализируются результаты Эйлера, касающиеся симметрий и движений на плоскости, движений в пространстве, подобий и аффинных преобразований, а также конформных преобразований, применяемых им в картографии.

Дается краткий обзор полученных Эйлером результатов, относящихся к теории многогранников, к сферической геометрии и к внутренней геометрии поверхности. Б. Л. Лаптев

36. «На все надеяться или всего опасаться...» Несколько извлечений из публикаций и курсов Габриэля Ламе. Итар («Tout à espérer ou tout à craindre...» Quelques extraits des écrits et des cours de Gabriel Lamé (1795—1870). Textes choisis et présentés par Jean Itard), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1958, **37**, № 188, 121—124 (франц.)

Краткая биографическая справка о Г. Ламе (1795—1870), французском математике и инженере (с 1843 г.— член Парижской академии наук, 1820—1832 гг. — профессор института путей сообщения в Петербурге), известном своими исследованиями по математической физике и теории упругости. Подобраны его высказывания о методике научного исследования, значении науки, роли математики в техническом образовании и т. п.

И. Б. Погребысский

37. О тригонометрии Лобачевского. Страшевич (Sur la trigonométrie de Lobatchevsky. Straszewicz S.), Ann. polon. math., 1957, **3**, № 2, 225—239 (франц.)

Вслед за кратким историческим очерком приводится новый вывод формул тригонометрии гиперболической плоскости. При этом автор исходит из предложений, опирающихся лишь на аксиомы I_{1-3}, II, III, V_1 системы Гильберта, и из единственного предложения неевклидовой геометрии о сумме углов треугольника ($s < 2d$). Аксиома Дедекинда или существование параллелей в смысле Лобачевского не предполагаются. Аксиоматическая база здесь менее широка, чем у большинства авторов других методов вывода гиперболической тригонометрии. Доказательства строгие, опираются на изучение характера зависимости отношения двух противоположных сторон трипрямоугольника как функции двух сторон, лежащих по одну сторону от диагонали, исходящей из вершины острого угла (исследуется, является ли функция возрастающей или убывающей). Аналогично изучаются отношения катета к гипотенузе как функции гипотенузы и острого угла треугольника. Затем устанавливаются функциональные уравнения для функций, получаемых в пределе, когда в трипрямоугольнике одна из сторон стремится к нулю, а в треугольнике гипотенуза стремится к нулю. Отсюда выводится вид этих функций и, наконец, отыскиваются основные формулы Н. И. Лобачевского, связывающие элементы прямоугольного треугольника. Б. Л. Лаптев

38. Из истории маленького символа «i». Войцеховский (Z historii malego symbolu «*i*». Wojciechowski K.), Matematyka, 1957, **10**, № 6, 12—24 (польск.)

Речь идет о некоторых, хорошо освещенных в литературе, фактах истории теории функций комплексного переменного XVIII—XIX вв. Использованная и рекомендуемая литература не указана. Более подробное освещение этого периода см. И. Тимченко «Исторические сведения о развитии направлений и методов, лежащих в основании теории аналитических функций» (1898) и А. И. Маркушевич «Очерки по истории теории аналитических функций» (1951).

Примечание референта. 1. По поводу утверждения, что «слово «мнимый» было введено в математику в конце XVIII в.», отметим, что в действительности этот термин стал внедряться со времени употребления его Декартом (Геометрия, русск. изд. 1938, стр. 85). 2. Один из портретов подписан: «Jean le Rond d'Alembert (1717—1783)», изображен же Лежандр (1752—1833). С. Е. Белозеров

39. 250 лет общегражданских инженерных школ в Праге. Кадержавек (250 let veřejných inženýrských škol v Praze. Kadeřávek František), Mat. škole, 1957, **7**, № 10, 579—592 (чешск.)

Первая строительная школа возникла в Праге около 1350 г. Она не была общедоступной и окончившие ее не могли разглашать приобретенных в ней сведений.

Первая доступная для всех сословий инженерная школа была основана в Праге в 1707 г. Х. И. Вилленбергом (род. в 1655 г.) учеником знаменитого французского инженера Вобана. Школа имела основной целью подготовку военных инженеров. Преемниками Вилленберга были Шор (1726—1767) и Гергет (1767—1800). Одним из учеников Гергета был математик и астроном Герстнер (1756—1832), при котором Пражская инженерная школа была преобразована по типу французской Политехнической школы.

В 1863 г. школа была реорганизована в высшее учебное заведение. Преподавание велось на немецком языке; в 1864 г. школа распалась на две: чешскую и немецкую. Самостоятельная чешская высшая инженерная школа получила свое начало в 1874 г., когда для нее было построено специальное здание архитектором Ульманом. Первым ее руководителем был Э. Врхлицкий. В 1920 г. школа получила название Чешская высшая техническая школа. В настоящее время она насчитывает около 10 000 студентов, тогда как первая школа 250 лет назад имела всего лишь 9 слушателей. И. Н. Веселовский

40. 50 лет теории относительности. Кратцер (Fünfzig Jahre Relativitätstheorie. Kratzer A.), Math.-Phys. Semesterber, 1955, **4**, 171—182 (нем.)

41. Библиография печатных трудов Лефшеца до июня 1955 г. (Bibliography of the publications of S. Lefschetz to June 1955), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 44—49 (англ.)

42. Владимир Иванович Смирнов (К 70-летию со дня рождения). Ладыженская, Фихтенгольц (Vladimir Ivanovici Smirnov (La aniversarea a 70 de ani de la nastere). Ladîjenskaia O. A., Fihtengolt G. M.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1958, **12**, № 1, 119—129 (рум.)

Перевод из Вестн. Ленингр. ун-та (РЖМат, 1958, 52).

43. К 50-летию профессора Владимира Книхала. Курцвейль (K padesátinám profesora Vladimíra Knichala. Kurzweil Jaroslav), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 1, 127—128 (чешск.)

44. Уго Амальди (1875—1957). Гиццетти (Ugo Amaldi. Ghizzetti Aldo), Rend. mat. e. applic., 1957, **16**, № 3-4, 511—514 (итал.)

45. Т. Виджаярагхаван. Давенпорт (T. Vijayaraghavan. Davenport H.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 252—255 (англ.)

Некролог индийского математика Т. Виджаярагхавана (1902—1955), бывшего последовательно секретарем, президентом и библиотекарем Индийского математического общества. В 1925—1928 гг. работал в Оксфорде совместно с Харди (1877—1947). Первые работы Виджаярагхавана относятся к тауберовым теоремам. Кроме того, он имеет результаты в теории диофантовых приближений, распределении дробных долей и др. К. А. Рыбников

46. Умер профессор Фр. Вычихло. Ректорыс (Zemřel profesor Fr. Vyčichlo. Rektorys K.), Vesmír, 1958, **37**, № 4, 134 (чешск.)

47. Памяти Геррита Маннаури. Бет (In memoriam Gerrit Mannoury. Beth E. W.), Euclides (Nederl.), 1957, **32**, № 9, 298—300 (гол.)

48. Фредерик Джордж Манселл (1898—1956). Дейвис (Frederick George Maunsell. Davies E. T.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 255—256 (англ.)

49. Саломон Любельский (Salomon Lubelski), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 1—2 (франц.)

Памятная статья от редакции об одном из основателей издания. С. Любельский родился в 1902 г., работал в Варшавском университете и Белостокском педагогическом институте; дата смерти (в фашистском концентрационном лагере) осталась неизвестной. Библ. 19 назв. Все работы относятся к теории чисел; опубликованы в 1930—1941 гг.

50. Карл Пирсон, 1857—1957. Холдейн (Karl Pearson, 1857—1957. Haldane J. B. S.), Biometrika, 1957, **44**, № 3-4, 303—313 (англ.)

Лекция, прочитанная автором в Лондонском университетском колледже 13 мая 1957 г. в связи со столетием со дня рождения Карла Пирсона (1857—1936). Рассказывается о разнообразных научных интересах Пирсона, который был широко эрудирован в области биологии, истории, литературы. Философские взгляды Пирсона общеизвестны по их критике в работе В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм».

Большая часть математических работ Пирсона относится к статистике и теории вероятностей. Основные работы Пирсона по статистике находятся в большой серии мемуаров по математической теории эволюции, напечатанных в «Phylosophical Transactions» в 1893—1900 гг.

Большое значение имеют математические таблицы, которые Пирсон издавал с 1914 по 1934 г. «Таблицы неполной бэта-функции», опубликованные им на 78-м году жизни, были, по выражению автора статьи, «его последней по времени, но не последней по значению данью науке». Анализа математических работ Пирсона статья не содержит. Ю. С. Цапин

51 К. Математическая теория электродинамических явлений, выведенная исключительно из эксперимента. Ампер (Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience. Ampère André—Marie, Paris, Libr. scient. Albert Blanchard, 1958, 164 p., 2 pl.) (франц.)

Переиздание классического мемуара Ампера (1775—1836), впервые опубликованного в 1827 г. (с добавлением некоторых работ Ампера, появившихся в 1823—1825 гг.). В нем строится математическая теория взаимодействия токов и постоянных магнитов, экспериментально установленного в 1820 г. в известных опытах Эрстеда, Араго, Био и Савара, Фарадея. При этом Ампер делает попытку свести все электромагнитные силы к силам ньютонианского дальнодействия, что противоречит современным представлениям о характере электромагнитных сил. В мемуаре впервые был введен ряд понятий и представлений, играющих основную роль в современной теории электромагнетизма, таких как: элемент тока; вектор напряженности магнитного поля; магнитный листок, эквивалентный замкнутому контуру с током; абсолютная единица силы тока и др. В этой же работе для объяснения природы магнетизма Ампер вводит понятие молекулярных токов. А. Г. Свешников

52 К. Лобачевский — великий русский математик. Его жизнь и труды. Пиккард (Lobatchevsky, grand mathématicien russe. Sa vie, son oeuvre. Conf. faite au Palais de la Découverte le 1er déc. 1956. Piccard Sophie. Paris, Libr. Palais Découverte, 1957, 40 p., ill.), Schweiz. Buch, 1957, **A57**, № 12, 278 (франц.)

53 К. Математические труды Александру Пантази. Врэнчану, Михэйлеску, Добреску (Opera matematica a lui Alexandru Pantazi. Vrănceanu G., Mihăilescu Tiberiu, Dobrescu A. Bucuresti, Acad. R. P. R., 1956, 496 p., 24, 20 lei), Bul. bibliogr., 1956, **A**, № 19, 734 (рум.)

54 К. Западноафриканская математика. Гибсон, Марделл (A West African mathematics. Gibson George Robert, Mardell Timothy Bertram John. London, Univ. Press., 1957, 70 pp., ill., 7 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 375, 10 (англ.)

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

55. Аксиоматическое построение действительных чисел (Преподавание в педагогическом институте). Дубовицкий А. Я., Матем. просвещение, вып. 2, 1957, 157—168

Дается один из возможных вариантов изложения теории действительных чисел: аксиоматический. После перечисления аксиом числового континуума устанавливаются некоторые следствия из них; выделяется класс натуральных чисел. Подробному анализу подвергается аксиома непрерывности, приводятся различные ее формулировки и доказывается их равносильность. Изложение завершается изображением действительных чисел при помощи бесконечных дробей и установлением взаимно однозначного соответствия между действительными числами и точками прямой. Г. М. Фихтенгольц

56. Из истории развития метода целесообразных задач в трудах отечественных методистов. Тарабан (До історії розвитку методу доцільних задач у працях вітчизняних методистів. Тарабан М. П.), Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-т, 1957, **26**, 115—125 (укр.)

В статье сделана попытка наметить основные этапы зарождения и развития в отечественной методике ма-

тематики (имеется в виду преимущественно дореволюционный период) «метода целесообразных задач», единственным создателем которого иногда считают С. Шохор-Троцкого. Автор усматривает наличие «зародышей» названного метода уже в арифметических учебниках Л. П. Магницкого и М. Г. Курганова и в работах Ф. И. Буссе. Затем он дает краткие справки об использовании идеи метода в ее различных модификациях в преподавании арифметики (учебники Н. Зернова, П. Гурьева, Ф. Симашко, С. Шохор-Троцкого, работы В. Ермакова), геометрии (руководства П. Фан-дер-Флита, С. Шохор-Троцкого и др.), алгебры (учебники и методические работы В. Евтушевского, А. Страннолюбского, В. Ермакова, К. Лебединцева).

Примечание референта. Заявление автора (стр. 115) об использовании «некоторых архивных материалов» осталось неподтвержденным: таковые нигде не названы. Ю. М. Гайдук

57. Проект программ точных наук (Un projet de programmes scientifiques), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 191, 252—259 (франц.)

Проект новых программ по математике, разработанный специальным комитетом (из профессоров ряда высших учебных заведений Франции) так называемого «Национального движения за развитие точных наук» (Mouvement National pour le Développement Scientifique). Проект содержит программы для 2-го и 1-го класса (пятый и шестой годы обучения) тех отделений французской школы второй ступени, в которых к числу профилирующих дисциплин отнесены точные науки, а также — программу для класса элементарной математики (седьмой год обучения). Предусмотрено по 5 час. занятий в неделю во 2-м и 1-м классе (по действующему учебному плану предусмотрено 4 часа). Проект программы для класса элементарной математики исходит из 9 недельных часов, как прежде. Дозировка учебного времени по отдельным разделам курса в проекте отсутствует.

На передний план в проекте выдвинуто освоение с фундаментальными структурами современной математики (особенно современной алгебры). В основе курса геометрии лежит идея группы преобразований; усилен функциональный аспект (изучение некоторых функций от двух переменных), частично усовершенствована терминология (термин «линейная функция» закреплен за функцией $y=ax$; функция $y=ax+b$ получает наименование «афинной»), сделаны указания относительно необходимости при изучении математики сохранять контакт с конкретной действительностью.

В отношении курса геометрии класса элементарной математики рекомендуется смотреть на этот курс, главным образом, как на средство формирования логического мышления у учащихся и приучения их к конкретному применению математических абстракций; он должен также стимулировать развитие творческих задатков у лучших из учащихся. Специально подчеркнуто, что курс геометрии не должен ни в коем случае становиться преградой к тому, чтобы учащиеся со слабо развитой геометрической интуицией могли в дальнейшем выбрать своей специальностью точные науки.

Обращает на себя внимание отсутствие в проекте программы класса элементарной математики таких традиционных для последнего предметов, как начертательная геометрия и метод проекций с числовыми отметками. Ю. М. Гайдук

58. Связь теории с практикой в преподавании математики. Гриневич (Зв'язок теорії з практикою у викладанні математики. Гриневич Г. Д.), Радянська школа, 1958, № 2, 28—32 (укр.)

Обзор материалов, присланных в редакцию журнала «Радянська школа», по вопросам увязки теории с практикой в курсе математики средней школы. Рассмотренные материалы (семи разных авторов) затрагивают следующий круг вопросов: опытная проверка теорем и геометрическое моделирование; приближенные вычисления в задачах практического характера; ознакомление учащихся с эмпирическими формулами для некоторых площадей и объемов; математические расчеты в сельскохозяйственном производстве; некоторые методические проблемы курса математики в классах с производственным обучением. Автор (заслуженный учитель школы УССР) подчеркивает, что соединение преподавания математической теории с подготовкой учащихся к трудовой деятельности не должно выливаться в принижение роли теории, без которой практика превратилась бы в ремесленничество, не подчиненное учебно-воспитательным целям школы.

Ю. М. Гайдук

59. Семинары по финансовой и страховой математике (Seminari di matematica finanziaria ed attuariale), Archimede, 1957, **9**, № 3, 131—136 (итал.)

Преподавание финансовой и страховой математики в Италии насчитывает около 50 лет. Около полустолетия существует Итальянская ассоциация для развития страховых наук; с 1906/1907 учебного года начал функционировать факультет экономики и коммерции Высшего института коммерческих и административных наук в Риме; с 1929 г. существует Итальянский институт аграриев. Первое время испытывался недостаток в учебных пособиях по страховой математике. В 1905 г. был издан учебник Броджи, затем появились курсы Бальи, Тойа, Кантелли. Однако эти издания быстро разошлись. В последнее время в Техническом коммерческом институте (директор М. Пантелео) и в Национальном дидактическом центре по техническому инструктажу возникла идея организации специальных семинаров. Были проведены следующие семинары: семинар по финансовой и страховой математике (в декабре 1955 г. в Риме), два объединенных семинара преподавателей физики (1957 г. в Милане), семинар (1957 г. во Флоренции) и второй семинар по финансовой и страховой математике (8—17 апреля 1957 г. в Риме). В последнем семинаре, проводившемся под руководством проф. Финетти, участвовали профессора Оттавиани и Тедески. Дополнительно к семинару проходила дидактическая (руководил проф. Кампеделли) и научная (руководил проф. Дуб, ун-т Иллинойс) конференции. Участники последней посетили счетный электромеханический центр ИНА. В конце статьи приводится речь Гаэтано, в которой подводятся итоги семинара. Г. П. Боев

60. Разделы математики, полезные натуралисту и географу. Кайё (Mathématiques utiles au naturaliste et au géographe. Cayeux André de), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 191, 234—239 (франц.)

Отмечается, что на специалистов, работающих в области географии и естествознания, большое влияние оказывает недостаток полученного ими в свое время математического образования. Для устранения этого недостатка автор предлагает провести реформу математического просвещения в ряде стран (Франция, Швеция и др.). Преподавание математики предлагается разделить на две части: 1) общую, содержащую научную базу, необходимую всем и 2) специальную, определяемую выбором будущей профессии учеников.

Автор перечисляет те разделы математики, которые необходимо преподавать будущим естествоиспытателям и географам. Ю. С. Цапин

61. Математические и физические вычисления. То, чего физики хотели бы от математиков. Кюсто (Calcul numérique et physique: ce que les physiciens demandent aux mathématiciens. Custaud), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, **37**, № 191, 243—245 (франц.)

Статья посвящена вопросам преподавания математики в средней школе. Автор указывает на отрыв преподавания математики от преподавания физики. Математик считает каждое число точно известным, в каком бы виде оно ни было задано. Физику же результат каждой задачи нужно выразить в виде рационального числа. Поэтому он пользуется приближенными числами.

Необходимо обращать внимание учеников на этот факт. Нужно указывать им, что точность всякого расчета ограничена точностью величин, которые фигурируют в этом расчете. Ю. С. Цалин

62 К. Алгебра. Для средней школы. Барбьера (Algebra. Per la scuola media. Barbiera Franca. Agrigento, G. De Bono, 1957, 140 p., 700 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 674, 334 (итал.)

63 К. Геометрия. Для средней школы. Барбьера (Geometria. Per la scuola media. Barbiera Franca. Agrigento, G. De Bono, 1957, 264 p., ill., 950 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 674, 334 (итал.)

64 К. Специальный курс тригонометрии. Новоселов (Specjalny wyklad trygonometrii. Nowosiolow S. I. Tlum. z ros. Warszawa, Panstw. Wydawn. Nauk., 1956, 514 s., il., 33 zł.), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 3, 28 (польск.)

65 К. Краткий очерк об историческом развитии тригонометрии. Пособие для студ.-заочн. физ.-матем. фак. ун-та и пед. ин-тов. Аяпбергенов С. А. Казахск. ун-т. Алма-Ата, 1957, 36 стр., илл.

66 К. Высшая математика. Учебник для высш. заочн. экон. учеб. заведений. 2-е переработ. и доп. изд. Шарадзенидзе К. М. Тбилиси, «Техника да шрома», 1953, 383 стр. с черт., библ. стр. 377 (10 назв.), 7 р. 20 к. (груз.)

67 К. Математический анализ и аналитическая геометрия. Джонсон, Киокемейстер (Calculus with analytic geometry. Johnson Richard E., Kiokemeister Fred L. Boston (Mass.), Allyn and Bacon; London, Bailey and Swinfen, 1957, xi, 650 pp., ill., 72 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 412, 11 (англ.)

68 К. Общая математика. Т. 1. Чаннон, Смит (General mathematics. Book 1. Channon John Bredin, Smith Arthur McLeish. London, Longmans, Green. 1956, xiii, 272 pp., ill., 7 sh. 3 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 340, 8 (англ.)

69 К. Высшая математика для практиков. Йос, Калуца (Höhere Mathematik für den Praktiker. 8. verb. Aufl., Joos G., Kaluza Th, Leipzig, Barth, 1956, XII, 339 S., ill., 23.10 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 29, 2040 (нем.)

70 К. Учебник высшей математики. Т. 2. Смирнов (Učebnice vyšší matematiky. 2 díl. Smirnow Vladimir Ivanovič. Z rus. orig. Praha, ČSAV, 1956, 759 s., il., 41,90 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR, České knihy, 1957, № 1, 18 (чешск.)

71 К. Вводный курс общей математики. Ходсон (Introductory comprehensive mathematics. Hodson John Darlington. London, Macmillan, 1956, ix, 205 pp., ill., 6 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1956, № 339, 9 (англ.)

72 К. Математика для техников и инженеров. Элементарные вычисления, исчисление бесконечно малых, элементы аналитической геометрии... С многочисленными приложениями. Монту (Matematica per tecnici e ingegneri. Calcolo elementare, calcolo infinitesimale rappresentazione geometrica e richiami di geometria analitica... Con numerose applicazioni. 4 ed. compl. rif. e aument. Montù Ernesto. Milano, Ed. «Il radiogiornale», 1956, xx, 412 p., 4000 L.), Bibliogr. ital., 1956, **90**, № 667, 594 (итал.)

73 К. Арифметика в двух словах; таблицы, термины, определения. Томпсон (Arithmetic in a nutshell; tables, terms and definitions. Thompson James Edgar. Exeter, Wheaton, 1957, 62 pp., ill., 1 sh. 6 d), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 416, 9 (англ.)

74 К. Две тысячи примеров. Левина (Two thousand examples. Levin Deana. London, Methuen, 1957, 48 pp., 6 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1957, № 412, 11 (англ.)

75 К. Сборник математических формул. Бжоска, Барч (Mathematische Formelsammlung. 2. verb. Aufl. Brzoska Franz, Bartsch Walter, Leipzig, Fachbuchverl., 1956, X, 343 S., 7.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1956, **A**, № 18, 1301 (нем.)

См. также: 86, 98, 99, 100, 752, 757, 772, 777, 895, 896

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы: *П. С. Новиков, С. И. Адян*

76. Некоторые классы рекурсивных функций. Гжегорчик (Some classes of recursive functions. Grzegorczyk Andrzej), Rozpr. mat., 1953, **4**, 46 pp.) (англ.)

Исследуются некоторые классы примитивно-рекурсивных функций.

В § 1 («Предварительные понятия») вводится основная терминология. Класс X называется замкнутым относительно операций подстановки, если для любых функций f и g из X функции $f(x_1,\ldots,x_{k-1},g(y_1,\ldots,y_m),x_{k+1},\ldots,x_n)$, $f(x_1,\ldots,x_{j-1},y,x_{j+1},\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n)$, $f(x_1,\ldots,x_{k-1},0,x_{k+1},\ldots,x_n)$ также принадлежат к X (как упорядочиваются аргументы этих новых функций, т. е. какой аргумент считается первым, какой вторым и т. д., не разъясняется). Функция $F(x_1,\ldots,x_n,t)$ называется универсальной для класса X функций от n аргументов, если

$$f\in X\equiv(Et)(x_1)\ldots(x_n)[f(x_1,\ldots,x_n)=F(x_1,\ldots,x_n,t)].$$

Говорится, что отношение R принадлежит классу X, если в классе X существует такая функция f, что

$$R(x_1,\ldots,x_n)\equiv f(x_1,\ldots,x_n)=0.$$

Доказывается (теорема 1. 1 и следствие 1 2), что если класс X замкнут относительно операций подстановки и содержит либо функции $x+1$, $x+y$, $x\dot{-}y$, либо функцию x^y, то множество отношений класса X замкнуто относительно операций пропозиционального исчисления.

В § 2 («Элементарные функции») класс E элементарных по Кальмару функций определяется как минимальный класс, содержащий функции $x+1$, $x+y$, $x\dot{-}y$ и замкнутый относительно операций подстановки и операций ограниченного сложения и умножения. Вводится операция ограниченного минимума: $\mu x\leqslant y[F(u,x)=0]$ обозначает наименьшее x, удовлетворяющее равенству $F(u,x)=0$, и 0, если такого x не существует (здесь и в дальнейшем u обозначает любой набор переменных).

Теорема 2. 1. Класс элементарных функций замкнут относительно операции ограниченного минимума.

Теорема 2.2а. Класс элементарных отношений (т. е. отношений класса E) замкнут относительно применения ограниченных кванторов.

Теорема 2.2в. Если X замкнут относительно операций ограниченного минимума и подстановки, то класс отношений класса X замкнут относительно применения ограниченного квантора существования.

Вводятся две операции максимума (взятие наибольшего числа, удовлетворяющего данному отношению, и нахождение наибольшего значения функции) и показывается, что они не выводят из класса E. Устанавливается элементарность функций, связанных с разложением на простые множители. Вводится следующее основное определение: класс X замкнут относительно операции ограниченной рекурсии, если для всяких функций g, h, j из X функция f, удовлетворяющая соотношениям: $f(\grave{u}, 0) = g(\grave{u})$, $f(\grave{u}, x+1) = h(\grave{u}, x, f(\grave{u}, x))$ $f(\grave{u}, x) \leqslant j(\grave{u}, x)$, также принадлежит к X.

Теорема 2. 3. Класс E замкнут относительно ограниченной рекурсии.

Доказывается, что класс элементарных функций может быть определен как минимальный класс, содержащий функции $x+1$, $x \dot{-} y$, x^y и замкнутый относительно операций подстановки и ограниченного минимума (теорема 2.4), а также как минимальный класс, содержащий функции $x+1$ и x^y и замкнутый относительно операций подстановки и ограниченной рекурсии (теорема 2.5), а также как минимальный класс, содержащий функции $x+1$, $x \dot{-} y$, $x \cdot y$, x^y и замкнутый относительно операций подстановки и ограниченного сложения (все перечисленные операции названы элементарными).

§ 3 («Классы, основанные на ограниченной рекурсии») посвящен индуктивно определяемым классам. Класс X называется индуктивно определяемым посредством данных функций и операций, если он есть минимальный класс, содержащий указанные функции, и замкнутый относительно указанных операций. Класс, индуктивно определяемый посредством операций, упомянутых в реферируемой работе, называется просто индуктивно определяемым. Доказывается серия теорем касающихся введенных понятий и, в частности, доказывается, что класс E_1 элементарных функций одного аргумента индуктивно определяем (теорема 3. 2).

В § 4 («Классы E^n») вводятся следующие основные функции f_n:

$$f_0(x, y) = y + 1, f_1(x, y) = x + y, f_2(x,y) = (x+1)\cdot(y+1),$$

$$\left.\begin{aligned} f_{n+1}(0, y) &= f_n(y+1, y+1), \\ f_{n+1}(x+1, y) &= f_{n+1}(x, f_{n+1}(x, y)) \end{aligned}\right\} (n \geqslant 2).$$

Доказывается ряд свойств функций f_n (теоремы 4. 1—4.3). Через E^n обозначается минимальный класс, содержащий функции $x+1$, $U_1(x, y) = x$, $U_2(x, y) = y$, $f_n(x, y)$ и замкнутый относительно операций подстановки и ограниченной рекурсии.

Теорема 4. 4. E^3 есть класс элементарных функций.

Теорема 4. 6. Для каждого n класс E^n замкнут относительно операции ограниченного минимума. Отношения класса E^n замкнуты относительно операций пропозиционального исчисления и применения ограниченных кванторов.

Доказывается, что класс E^n содержится в классе E^{n+1} (теорема 4. 7) и (теорема 4. 9) что функция $f_{n+1}(x, x)$ растет быстрее любой функции класса E^n (функция f растет быстрее функции g, если существует такое n_0, что при $x \geqslant n_0$ всегда $f(x) > g(x)$). Из теорем 4. 7 и 4. 9 вытекает, что имеют место строгие включения

$$E^0 \subset E^1 \subset E^2 \subset \cdots$$

Указывается (стр. 35), что для каждой функции $f \in E^0$ найдется такое k_0, что $f(n) < n + k_0$.

Доказывается (теорема 4. 10), что класс отношений из E^n (при $n > 2$) можно определить как минимальный класс, содержащий некоторые 7 специальных отношений и замкнутый относительно операций пропозиционального исчисления и применения ограниченных кванторов.

Теорема 4. 12. При $n > 2$ класс E^{n+1} содержит универсальную функцию для класса всех функций от одного аргумента, принадлежащих классу E^n.

Теорема 4. 13. Класс всех примитивно-рекурсивных функций есть сумма классов E^n.

Теорема 4. 14. Операций подстановки и ограниченной рекурсии недостаточно, чтобы получить все примитивно-рекурсивные функции.

В заключение параграфа ставится 9 проблем.

В § 5 («Приложения класса E^0») доказываются следующие три теоремы, в которых $\iota x[R(...x...)]$ обозначает единственное x, такое, что $R(...x...)$, а термин «вычислимая функция», судя по контексту, означает «общерекурсивная функция».

Теорема 5. 1. Каждая вычислимая функция представима в виде $f(\grave{u}) = A(\iota x[B(\grave{u}, x) = 0])$, где A и B суть функции класса E^0.

Теорема 5. 2. Каждая вычислимая функция представима в виде $f(\grave{u}) = Q(\iota x[A(x, \grave{u}) = 0])$, где Q и A принадлежат классу E^0, причем Q есть раз навсегда заданная функция (дающая первый член пары в пересчете всех пар натуральных чисел).

Теорема 5. 3. Каждое (непустое) рекурсивно-перечислимое множество есть множество значений некоторой функции класса E^0. В. А. Успенский

77. Алгоритмы в теории полей. Фрёлих, Шепердсон (Effective procedures in field theory. Fröhlich A., Shepherdson J. C.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1956, A248, № 950, 407—432 (англ.)

В 1930 г. Ван-дер-Варден рассматривал проблему эффективного выполнения (т. е. выполнения в конечное число шагов) некоторых конструкций теории полей (Ван-дер-Варден,Современная алгебра, 1947, стр. 175). Он ввел понятие явно заданного поля, основанное на интуитивном представлении об эффективном задании поля, и показал, что любое конечное расширение K′ явно заданного поля K также может быть явно задано. Тогда же он показал, что если существует алгоритм разложения для поля K (т. е. алгоритм для разложения полиномов с коэффициентами из K на неприводимые в $K(x)$ множители), то существует алгоритм разложения для всякого поля K', полученного из K простым трансцендентным или простым сепарабельным алгебраическим расширением, и заметил, что, видимо, невозможен общий алгоритм разложения, применимый ко всем явно заданным полям.

Реферируемая работа посвящена пересмотру этих результатов Ван-дер-Вардена в свете точного определения алгоритма.

Рассмотрим произвольный алфавит $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Совокупность всевозможных слов в этом алфавите некоторым раз и навсегда заданным образом приводится во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом. Натуральному числу n соответствует слово $W(n)$; слову W соответствует натуральное число $n(W)$. $n(W_1) < n(W_2)$, если длина слова W_1 меньше длины W_2, а при равной длине,— если первая слева буква в слове W_1, отличная от соответствующей буквы слова W_2, имеет меньший номер в последовательности $a_1, a_2, ..., a_n$.

Множество S слов P, Q,... в алфавите A называется рекурсивно-перечислимым (рекурсивным), если рекурсивно-перечислимо (рекурсивно) множество натуральных чисел $n(P)$, $n(Q)$, . . . Авторы называют кольцо

R явно заданным (explicit), если элементами его являются классы эквивалентных слов $\{P\}$, $\{Q\}$,..., на которые посредством отношения эквивалентности $E(P, Q)$ разбивается некоторое перечислимое множество слов S в алфавите A, и если при этом существуют алгоритмы, определяющие для произвольных слов P, Q, T из S, выполнены или нет соотношения:

$$\{P\} \equiv \{Q\} \text{ (или, что то же, } E(P, Q))$$
$$\{P\} + \{Q\} \equiv \{T\},$$
$$\{P\} \times \{Q\} \equiv \{T\}.$$

Явно заданное кольцо, являющееся полем, называется явно заданным полем.

В § 2, используя понятие алгоритма, авторы вводят понятия явного гомоморфизма (изоморфизма) колец, явного расширения кольца, вполне явного расширения и т. д.

В § 3 доказывается ряд теорем о существовании явных расширений для явно заданных колец и полей. Например, доказывается, что для любого явно заданного поля K существует вполне явное расширение K', которое изоморфно (в классическом смысле) полю $K(\alpha)$, где α трансцендентно или алгебраично над K.

В § 4 доказываются теоремы существования алгоритмов разложения. В § 5, в частности, приводятся примеры явно заданных полей, которые изоморфны, но не явно изоморфны. В § 6 вводится понятие канонического расширения поля и доказывается существование канонического расширения для некоторых полей. Доказывается существование двух изоморфных канонических алгебраических расширений одного и того же поля K, которые не явно изоморфны.

В § 7 строятся определенное явно заданное поле K и явное несепарабельное алгебраическое расширение $K(\alpha)$ такие, что K имеет алгоритм разложения, а $K(\alpha)$ его не имеет. Последний результат является усилением результата Кнезера (РЖМат, 1953, 65), который доказал невозможность общего алгоритма разложения для несепарабельных расширений $K(\alpha)$ явно заданных полей K с алгоритмом разложения. Это же является эффективным доказательством невозможности общего алгоритма разложения для всех явно заданных полей.

С. И. Адян

78. Некоторые простые неразрешимые проблемы теории групп. V, VI. Бун (Certain simple, unsolvable problems of group theory. V, VI. Boone William W.), Proc. Konikl. naderl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 1, 22—27; № 2, 227—232; Indagationes math., 1957, **19**, № 1, 22—27, № 2, 227—232 (англ.)

Части I — IV см. РЖМат, 1956, 8531.

В 1952 г. П. С. Новиков построил пример конечно-определенной группы (т. е. группы, заданной конечным числом образующих и определяющих соотношений), для которой невозможен алгоритм, решающий проблему тождества (Новиков П. С., Докл. АН СССР, 1952, **85**, № 4, 709 — 712; РЖМат, 1956, 112). В реферируемой работе строится другой пример конечно-определенной группы с неразрешимой проблемой тождества. При этом используется следующая

Лемма 1. Существует такая машина Тьюринга $\mathfrak{M}^*$, что проблема распознавания по произвольной начальной полной конфигурации (С. С.) этой машины вопроса о том, войдет она в ходе работы в фиксированную внутреннюю конфигурацию или нет, рекурсивно неразрешима.

$\mathfrak{M}^*$ является некоторым видоизменением универсальной машины Тьюринга (Turing A. M., Proc. London Math. Soc., 1937, ser. 2, **42**, 230 — 265; **43**, 544 — 546). Пусть машина $\mathfrak{M}^*$ пишет символы $s_1, s_2, \ldots, s_M$; пусть s_0 изображает пустую клетку машины; $q_0, q_1, \ldots, q_n$ — внутренние конфигурации $\mathfrak{M}^*$. Тогда формальная дедуктивная система T_{11} (являющаяся фактически ассоциативной системой, в которой преобразования по схемам определяющих соотношений разрешены только в одну сторону) определяется алфавитом

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_M, q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}, q_{n+2}, E_1, E_2$$

и следующими правилами операций:

U_{11}:

$q_i s_j \to q l s_k$, где $q_i s_j s_k q l$ есть операция $\mathfrak{M}^*$;

$q_i s_j s_m \to s_j q l s_m$
$q_i s_j E_2 \to s_j q_l s_0 E_2$ } где $q_i s_j R q l$ есть операция $\mathfrak{M}^*$;

$s_m q_i s_j \to q l s_m s_j$
$E_1 q_i s_j \to E_1 q l s_0 s_j$ } где $q_i s_j L q l$ есть операция $\mathfrak{M}^*$;

$$q_0 s_m \to q_0;\ q_0 E_2 \to q_{n+1};\ s_m q_{n+1} \to q_{n+1};\ E_1 q_{n+1} \to q_{n+2},$$

причем индекс m всюду, где он встречается, пробегает значения $0, 1, \ldots, M$. Ниже $A \to B$ будет обозначать произвольное правило из U_{11}.

По системе T_{11} строится конечно-определенная группа G_T. Положительный алфавит группы G_T:

$$q_0, q_1, \ldots, q_{n+2}, k_1, k_2, t_{1*}, t_{2*},$$
$$s_0, s_1, \ldots, s_M, E_1, E_2, s_{0*}, s_{1*}, \ldots, s_{M*}, E_{1*}, E_{2*},$$
$$X, Y, l_{A\to B}, r_{A\to B}, X_*, Y_*, l_{A\to B*}, r_{A\to B*}.$$

Если D есть слово, составленное из букв, встречающихся в алфавите группы G_T также со звездочкой, то через D_* обозначается слово, полученное обращением слова D и снабжением каждой его буквы звездочкой.

Система определяющих соотношений группы G_T:

1) $t_{1*} q_{n+2} k_1 \leftrightarrow t_{2*} q_{n+2} k_2$.

Пусть $A \to B \in U_{11}$ есть $A' q_i A'' \to B' q_s B''$; ему соответствует соотношение

2) $A' A''_* q_i A'' A'_* \leftrightarrow l_{A\to B} B' r_{A\to B} * B''_* q_s B'' r_{A\to B} B' * l_{A\to B*}$.

3) $Z l_{A\to B} \leftrightarrow Y l_{A\to B} Y Z$; $l_{A\to B*} Z_* \leftrightarrow Z_* Y_* l_{A\to B*} Y_*$.

4) $ZY \leftrightarrow YYZ$; $Y_* Z_* \leftrightarrow Z_* Y_* Y_*$.

5) $r_{A\to B} Z \leftrightarrow ZX r_{A\to B} X$; $Z_* r_{A\to B*} \leftrightarrow X_* r_{A\to B*} X_* Z_*$.

6) $XZ \leftrightarrow ZXX$; $Z_* X_* \leftrightarrow X_* X_* Z_*$.

7) $t_{i*} c_\gamma \leftrightarrow c_\gamma t_{i*}$; $t_{i*} c_{\gamma*} \leftrightarrow c_{\gamma*} t_{i*}$.

8) $c_\gamma k_i \leftrightarrow k_i c_\gamma$; $c_{\gamma*} k_i \leftrightarrow k_i c_{\gamma*}$.

9) $d_\alpha d_{\beta*} \leftrightarrow d_{\beta*} d_\alpha$.

При этом Z пробегает значения $s_0, s_1, \ldots, s_M, E_1$ и E_2; c_γ — $X, Y, l_{A\to B}$ и $r_{A\to B}$; $i = 1, 2$; d_α — любое Z либо c_γ.

В работе доказывается, что если бы существовал алгоритм, решающий проблему тождества в группе G_T, то этот алгоритм позволял бы проверить по произвольной (С. С.) машины $\mathfrak{M}^*$, войдет она в ходе работы во внутреннее состояние q_0 или нет. Отсюда в силу леммы 1 следует неразрешимость проблемы тождества для G_T. Доказательство проводится последовательным исключением сокращений отрицательных букв в последо-

вательностях элементарных преобразований группы G_T. При этом рассматривается ряд вспомогательных формальных дедуктивных систем. Группа G_T проще группы, построенной П. С. Новиковым (РЖМат, 1956, 112). Достигнуто некоторое упрощение и в доказательстве, хотя идеи доказательства в основном остаются те же.

В работе есть недоговоренности. Например, не вполне точно утверждение в сноске 38 (часть VI, стр. 228): в диаграмме $\mathfrak{B}$ (когда выписанные явно q-символы будут заменены на k-символы) M может содержать q_{n+2} и тогда в диаграмме $\mathfrak{C}$ произошла бы вставка буквы q_{n+2}, что недопустимо. Так как в этом случае $M = M' = q_{n+2}$, то дело исправляется пропуском в диаграмме $\mathfrak{C}$ (в рассматриваемом отдельном случае) первой операции: $ins\,(M'\overline{M'})$.

На стр. 230 (часть VI) опечатка: в первой строке снизу (в сноске 48) вместо $T''_{(s,\,t)}$ следует читать $sigT''_{(s,\,t)}$.

С. И. Адян

79. Проблема вхождения для прямых произведений групп. Михайлова К. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1103—1105

Слабой проблемой вхождения для конечно-определенной группы $\mathfrak{A}$ называется следующая проблема: Существует ли для всякой подгруппы $\mathfrak{A}'$, порожденной конечным числом слов группы $\mathfrak{A}$, алгоритм, позволяющий определять, принадлежит подгруппе $\mathfrak{A}'$, произвольное слово группы $\mathfrak{A}$ или нет? Сильной проблемой вхождения называется проблема существования единого алгоритма для всех подгрупп группы $\mathfrak{A}$. При этом сильную (слабую) проблему вхождения автор называет неразрешимой, если соответствующий алгоритм не существует.

Теорема 1. Слабая проблема вхождения для прямого произведения двух свободных групп, каждая из которых задается двумя образующими, неразрешима.

При доказательстве используется результат П. С. Новикова о существовании конечно-определенной группы с неразрешимой проблемой тождества (РЖМат, 1956, 112).

Для следующей теоремы дается только эскиз доказательства.

Теорема 2. Проблема вхождения для прямого произведения абелевой группы и группы с неразрешимой сильной (слабой) проблемой вхождения разрешима в сильном (слабом) смысле.

В формулировке этой теоремы в работе (стр. 1104, строка 19 снизу) есть пропуск: вместо «группы» надо читать: «группы и группы».

Теорема 3. Для прямого произведения группы с разрешимой слабой проблемой вхождения и группы с разрешимой сильной проблемой вхождения, каждая подгруппа которой может быть задана конечным числом образующих, нельзя доказать неразрешимость слабой проблемы вхождения. С. И. Адян

80. Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности. Цейтин Г. С., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1958, **52**, 172—189

Ассоциативное исчисление является заданием конечно-определенной ассоциативной системы (РЖМат, 1956, 2716). Так как примеры ассоциативных исчислений с неразрешимой проблемой эквивалентности слов используются для построения других математических объектов, с которыми связаны неразрешимые алгоритмические проблемы, то представляет интерес нахождение конкретного, достаточно простого ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой тождества. А. А. Марковым было построено ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности в 13-буквенном алфавите и с определяющей системой из 33 соотношений (РЖМат, 1956, 2716).

В реферируемой работе доказывается неразрешимость проблемы эквивалентности для исчисления $\mathfrak{C}_1$ в пятибуквенном алфавите $\{a, b, c, d, e\}$ со следующей определяющей системой:

$$ac \leftrightarrow ca,\ ad \leftrightarrow da,\ bc \leftrightarrow cb,\ bd \leftrightarrow db,$$

$$eca \leftrightarrow ce,\ edb \leftrightarrow de,\ cca \leftrightarrow ccae.$$

Доказывается, что в исчислении, полученном в результате замены последнего определяющего соотношения $\mathfrak{C}_1$ тремя соотношениями

$$cdca \leftrightarrow cdcae,\ caaa \leftrightarrow aaa,\ daaa \leftrightarrow aaa,$$

неразрешима проблема эквивалентности слову aaa.

Доказательство основывается на результате П. С. Новикова о существовании конечно-определенной группы с неразрешимой проблемой тождества (РЖМат, 1956, 112). Причем используется только факт существования этой группы. Заметим, что, используя исчисление $\mathfrak{C}_1$ автора, можно несколько упростить группу П. С. Новикова с неразрешимой проблемой тождества.

С. И. Адян

81. К проблеме представимости матриц. Марков А. А. Z. math. Logik und Grundl. Math., 1958, **4**, № 2, 157—168 (русск.; рез. нем.)

Пусть $U_1, U_2, \ldots, U_q$ — квадратные целочисленные матрицы порядка n. Автор говорит, что матрица U порядка n представима через $U_1, U_2, \ldots, U_n$, если для некоторого целого положительного числа t и целых чисел $r_1, \ldots, r_t$ из ряда $1, 2, \ldots, q$ имеет место равенство

$$U = \prod_{i=1}^{t} U_{r_i}.$$

Частная проблема представимости для системы матриц $U_1, U_2, \ldots, U_q$ порядка n состоит в следующем. Требуется указать алгоритм, посредством которого можно было бы узнавать для любой матрицы U порядка n, представима ли она через $U_1, U_2, \ldots, U_q$. Общая проблема представимости для матриц порядка n состоит в указании общего алгоритма для всех систем матриц $U_1, U_2, \ldots, U_q$.

Автором ранее было доказано, что при $n \geqslant 6$ общая проблема представимости для матриц порядка n неразрешима. При этом была указана система матриц шестого порядка $U_1, U_2, \ldots, U_q$ $(q=91)$, для которой неразрешима частная проблема представимости. В реферируемой работе эти результаты усиливаются в двух направлениях. Во-первых, используя теорему 1 К. А. Михайловой (реф. 79), автор доказывает, что общая проблема представимости для матриц порядка n неразрешима при $n \geqslant 4$. Во-вторых, на основе построенного Г. С. Цейтиным ассоциативного исчисления в алфавите из 5 букв с 9 определяющими соотношениями, в которой неразрешима проблема эквивалентности фиксированному слову (РЖМат, 1957, 3719), в работе строится система матриц шестого порядка $U_1, U_2, \ldots, U_{27}$, для которой неразрешима частная проблема представимости. Автор замечает, что, используя ассоциативное исчисление Г. С. Цейтина с 7 определяющими соотношениями, можно аналогично построить систему из 23 матриц шестого порядка, для которой частная проблема представимости матриц неразрешима. С. И. Адян

82. Результат о совместности и его применение к теории определения. Робинсон (A result on consistency and its application to the theory of definition. Robinson Abraham), Proc. Koninkl nederl. akad. wetensch., 1956, **A59**, № 1, 47—58; Indagationes math., 1956, **18**, № 1, 47—58 (англ.)

Через $H^{(n)}$ мы обозначаем n-местный предикат. Пусть $X(F^{(k)}, G_1^{(i_1)}, \ldots, G_m^{(i_m)})$ — высказывание узкого исчисле-

ния предикатов, построенное из предиката $F^{(k)}$, предикатов $G_1^{(i_1)}, \ldots, G_m^{(i_m)}$ и, быть может, еще каких-нибудь индивидуальных констант, причем $k \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ и, хоть для одного l, $i_l \geqslant 1$. Говорят: высказывание X определяет предикат F неявно через предикаты $G_1, \ldots, G_m$, если доказуемо высказывание

$$[X(F, G_1, \ldots, G_m) \& X(H, G_1, \ldots, G_m)] \supset$$

$$\supset [(\forall x_1) \ldots (\forall x_k) [F(x_1, \ldots, x_k) \equiv H(x_1, \ldots, x_k)]].$$

Говорят: высказывание X определяет предикат F явно через предикаты $G_1, \ldots, G_m$, если существует (в узком исчислении предикатов) предикат $Q^{(k)}$, не содержащий других предикатов, кроме $G_1, \ldots, G_m$, такой, что доказуемо высказывание $X(F, G_1, \ldots, G_m) \supset [(\forall x_1) \ldots (\forall x_k)[F(x_1, \ldots, x_k) \equiv Q^k(x_1, \ldots, x_k)]]$. Бет доказал теорему (РЖМат, 1957, 1995): Если предикат F определим неявно высказыванием X через предикаты $G_1, \ldots, G_m$, то он определим явно тем же высказыванием через те же предикаты.

Множество высказываний K называется совместным, если ни для какого высказывания Y из K не выводимы одновременно Y и $\sim Y$.

Высказывание X называется совместным с множеством высказываний K, если $K \cup \{X\}$ — совместное множество.

Автор доказывает несколько теорем о совместности (§ 2), из которых сравнительно просто получает теорему Бета (§ 3).

При этом существенно используется понятие модели (РЖМат, 1956, 3597) и методы теории моделей. В § 4 непосредственно, без всякого использования как предыдущих теорем, так и понятия модели, доказывается аналог теоремы Бета для исчисления высказываний (если положить в теореме Бета $k = i_1 = \ldots = i_l = 0$) и обобщение этого аналога на n-мерный случай (одновременное определение n высказываний).

Примечание референта. В формулировке теорем 2.6, 2.9 опущено требование конъюнктивности множества K, в доказательстве же говорится, что из полноты множества K следует его конъюнктивность, что неверно при определениях автора. Ю. А. Шиханович

83. О размере нормальных формул. Мак-Нотон (On the measure of normal formulas. McNaughton Robert), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 969—982 (англ.)

Пусть d — фиксированное натуральное число. Рассматриваются формулы классического исчисления высказываний, построенные из пропозициональных букв A_1, $A_2, \ldots, A_d$ (в построении формул не обязаны участвовать все эти буквы). Размером $m(\Phi)$ формулы Φ называется число таких наборов значений истинности букв A_1, $A_2 \ldots, A_d$, которым соответствует значение «истина» формулы Φ. В статье изучаются вопросы, связанные с задачей построения «простейшей» (в интуитивном понимании) формулы заданного размера $k \leqslant 2^d$. Как замечает автор, эта задача имеет значение при проектировании некоторых частей вычислительных устройств. Полученные результаты позволяют облегчить поиски нужной формулы, производимые методом проб.

Теорема 3.1. Для любых формул Φ и Ψ

$$m(\Phi \vee \Psi) = m(\Phi) + m(\Psi) - m(\Phi \cdot \Psi).$$

С помощью этой теоремы автор находит рациональный способ для вычисления размера нормальных формул, не требующий приведения их к совершенной дизъюнктивной нормальной форме. При этом формула Φ называется нормальной, если она имеет вид

$$\Phi = (B_{11} \cdot B_{12} \ldots B_{1j_1}) \vee (B_{21} B_{22} \ldots B_{2j_2}) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (B_{k1} B_{k2} \ldots B_{kj_k}), \quad (1)$$

где каждое B_{ij} является либо одной из букв A_1, $A_2, \ldots, A_d$, либо ее отрицанием. Нормальная формула Φ называется неприводимой по внешнему виду (apparently irredundant), если ее слагаемые суть выполнимые формулы, не содержащие повторений букв, причем ни одно из этих слагаемых не является логическим следствием другого. Если в нормальной формуле Φ, неприводимой по внешнему виду, $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots \leqslant j_K$ (см. (1)), то говорят, что Φ имеет структуру $\langle j_1, j_2, \ldots, j_K \rangle$.

Основной результат статьи формулируется в виде следующего предложения. Если Φ имеет структуру $\langle j_1, j_2, \ldots, j_k \rangle$, то

$$2^{d-j_1} + 2^{d-j_2-1} + \ldots + 2^{d-j_k-(k-1)} \leqslant m(\Phi) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{d-j_1} + 2^{d-j_2} + \ldots + 2^{d-j_k}.$$

В заключение автор обсуждает некоторые правдоподобные гипотезы на пути дальнейшего продвижения в решении задачи. Ю. Т. Медведев

84. О фукциях, определимых в одной бесконечнозначной логике. Роз (Sur les fonctions définissables dans une logique à un nombre infini de valeurs. Rose Alan), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 14, 1462—1463 (франц.)

Рассматривается логическая система, являющаяся некоторым расширением континуум-значного исчисления высказываний Мак-Нотона (McNaughton, J. Symbolic Logic, 1951, **16**, 1—13). Каждой логической формуле системы соответствует «функция истинности», аргументы и значения которой меняются в числовом сегменте [0,1]. Роль этих функций подобна роли таблиц истинности в многозначной логике. Автор находит необходимые и достаточные условия, которые следует наложить на произвольную функцию, чтобы она могла быть функцией истинности некоторой логической формулы. Результат формулируется аналогично теореме 2 из цитированной статьи Мак-Нотона. Ю. Т. Медведев

85. О связи систем аксиом двузначного исчисления высказываний, содержащих полные системы аксиом для импликации, с аналогичными системами аксиом интуиционистского исчисления высказываний. Шрётер (Über den Zusammenhang der in den Implikationsaxiomen vollständigen Axiomensysteme des zweiwertigen mit denen des intuitionistischen Aussagenkalküls. Schröter Karl), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, № 3, 173—176 (нем.)

Пусть M_0 и M_0^* — системы аксиом для импликационных формул (т. е. формул, не содержащих логических связок, отличных от импликации) интуиционистского и двузначного (классического) исчисления высказываний соответственно. Доказывается следующая

Теорема 1. Если $M_0 \cup M_1$ — система аксиом интуиционистского исчисления высказываний (или какой-либо его части), то $M_0^* \cup M_1$ является системой аксиом двузначного исчисления высказываний (или соответствующей его части).

Отсюда следует

Теорема 2. Нельзя построить независимую систему аксиом M классического исчисления высказываний, которую можно было бы представить в виде $M = M_0^* \cup M_1 \cup M_2$ так, чтобы $M_0 \cup M_1$ было системой аксиом интуиционистского исчисления высказываний, а M_2 было не пусто.

Автор указывает, что эта теорема была получена им в 1937 г. в качестве ответа на вопрос, поставленный Шольцем. Н. М. Нагорный

86. Значение и границы аксиоматического метода. Шрётер (Die Tragweite und die Grenzen der axiomatischen Methode. Schröter Karl. Dtsch. Z. Philos., 1957, 5, № 4, 476—488 (нем.)

Текст доклада, прочитанного автором на совете математико-естественного факультета университета им. Гумбольдта в Берлине.

Отметив, что в математике применяются две разновидности аксиоматического метода (типа аксиоматики теории групп и типа аксиоматики Пеано), автор более подробно останавливается на проблематике, связанной с построением логико-математических исчислений, формализующих те или иные математические теории. В частности, обсуждая результат Гёделя о неполноте арифметики, автор высказывает соображения о причинах неполноты, которые, по его мнению, кроются в искусственном ограничении способов образования понятий. В заключение автор формулирует ряд тезисов, в которых подчеркивает материалистическую сущность математики. Н. М. Нагорный

87. Замечания к проблеме многозначных логик. Фрей (Bemerkungen zum Problem der mehrwertigen Logiken. Frey Gerhard), Actes XI Congr. Internat. philos., Bruxelles, 1953, 5, Amsterdam — Louvain, 1953, 53—58 (нем.)

Автор кратко излагает два возможных способа построения логических систем — аксиоматический и функциональный, — отмечая особую роль последнего в построении многозначных логик. Предпринята попытка построить, исходя из известной системы аксиом трехзначной логики, дающей формулы, тождественно равные 1, такие две системы аксиом, которые давали бы формулы, тождественно равные 2 и 3 соответственно. В работе содержится ошибка: аксиомы NC_pNC_{qp} и $SCp\,SCqp$, получающиеся по методу автора из аксиомы $Cp\,Cqp$, при некоторых значениях p и q принимают значение 1. Н. М. Нагорный

88. Интуиционизм и арифметика. Ротселар (Intuitionisme en rekenkunde. Rootselaar B. van), Euclides (Nederl.), 1957, 32, № 6, 193—198 (гол.)

Кратко излагается интуиционистская концепция натурального и вещественного числа.

Натуральные числа определяются как объекты, получающиеся из единицы в результате развертывания шагообразного процесса прибавления новых единиц. При построении конкретного натурального числа требуется после каждого прибавления единицы уметь решить, продолжать процесс или же оборвать его. Вещественные числа вводятся с помощью фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Бесконечной последовательностью рациональных чисел автор называет продолжающийся ряд следующих друг за другом построений рациональных чисел. Последовательность рациональных чисел a_n автор называет фундаментальной (последовательностью Коши), если для всякого натурального числа n может быть указано определенное натуральное число $k(n)$ такое, что для всех p $|a_{k(n)+p} - a_{k(n)}| < n^{-1}$. Введя надлежащим образом понятия равенства, неравенства и удаленности для двух фундаментальных последовательностей, автор исследует вопрос о том, насколько арифметическая структура множества интуиционистских вещественных чисел совпадает со структурой множества классических вещественных чисел. Н. М. Нагорный

89. Явные определения некоторых свойств рядов знаков. Хертиг (Explizite Definitionen einiger Eigenschaften von Zeichenreihen. Härtig Klaus), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1956, 2, № 3, 177—203 (нем.)

Рассматриваются структурные свойства и отношения, касающиеся слов в алфавитах (рядов знаков). Эти свойства и отношения формулируются таким образом, чтобы их можно было выразить в рамках логики предикатов первой ступени с равенством. Для ряда конкретных отношений (таких, как «Z_2 есть результат подстановки Z_{00} вместо всех вхождений Z_0 в Z_1», «Z_2 есть результат подстановки Z_{00} вместо некоторого вхождения Z_0 в Z_1», «Z есть соединение слов X и Y») изучается вопрос о выражаемости одних из этих отношений через другие. В заключительном параграфе дается явное определение формулы и вывода в исчислении высказываний. Н. М. Нагорный

90. Методы аксиоматизации произвольных исчислений высказываний и предикатов. Шрётер (Methoden zur Axiomatisierung beliebiger Aussagen-und-Prädikatenkalküle. Schröter Karl), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1955, 1, № 4, 241—251 (нем.)

Автор излагает и сравнивает три метода, которые могут быть использованы для перехода от содержательного рассмотрения логических исчислений к аксиоматическому. Два метода (обозримых нормальных форм и уменьшения числа переменных) применялись ранее. Третий метод основан на том, что надлежащим образом определяется понятие выводимости. Автор применяет два последних метода для аксиоматизации n-значного исчисления высказываний Лукасевича. Согласно автору, третий метод может быть использован для аксиоматизации двузначных или многозначных исчислений предикатов первой ступени, а также бесконечнозначного исчисления высказываний. Н. М. Нагорный

91. Нормальные формы системы $S(C)$. Михайлеску (Forme normale în ansamblul $S(C)$. Mihailescu Eugen), Bul. stiint. Acad. RPR. Sec. mat. si fiz., 1956, 8, № 2, 329—361 (рум.; рез. русск., франц.)

Исследуется исчисление $L(C,E,A)$, построенное на аксиомах

$$CCCpqCrsCtCCspCrp,$$
$$CEpqCpq,$$
$$CEpqCqp,$$
$$CCpqCCqpEpq,$$
$$CCCpqqApq,$$
$$CApqCCpqq,$$

правиле подстановки и правиле modus ponens (C — импликация, E — эквивалентность, A — дизъюнкция).

Рассматривается 6 типов формул из $S(C)$ (т. е. формул, содержащих только импликацию); каждому из них ставится в соответствие тип формул, содержащих в качестве логических операций только A и E,—тип нормальных форм. Для каждого из этих 6 типов формул, содержащих только импликацию, доказывается, что любая формула (этого типа) дедуктивно равна некоторой нормальной форме (соответствующего типа). Б. Ю. Пильчак

92. Общие решения для алгебро-логического уравнения с несколькими неизвестными. Гото (General solutions of the logical algebraic equation with many unknown. Goto Mochinori. XIIth Gen. Assembly U. R. S. I., Commiss. 6, Boulder, Colo, 1957, № 51, 6 pp.) (англ.)

Алгебро-логическое уравнение с ν неизвестными X_1, X_2,..., X_ν записывается в виде

$$\bigvee_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu=0}^{1} C_{n_1n_2\ldots n_\nu}(\sim)^{n_1+1}X_1(\sim)^{n_2+1}X_2\ldots(\sim)^{n_\nu+1}X_\nu \rightleftarrows 1, \quad (1)$$

где $\bigvee$ — знак логической суммы, пропущен знак логического произведения, $\sim$ знак отрицания, $Cn_1n_2\ldots n_\nu$ — логические константы. В работе выводятся три формы

записи для общего решения уравнения (1). Отдельно рассматриваются случаи $\nu=1, 2, 3$. Автор отмечает, что общее решение алгебро-логических уравнений используется при синтезе проводящих сетей для автоматического контроля, так как условие работы этих сетей изображается логическим уравнением. Имеется ряд опечаток в записи формул. С. И. Адян

93. Конструктивные тенденции в современной логике. Февриe (Tendances constructives en logique moderne. Fevrier P.), Synthese, s. a., **10**, 52—58 (франц.)

Указываются признаки, которые, по мнению автора, характеризуют конструктивное направление. Обсуждается вопрос о языке для описания конструктивных процедур. Подробно разбираются два примера из области элементарной математики, иллюстрирующие этот вопрос. Ю. Т. Медведев

94. Теория определения. 1-я часть. Краснер (Théorie de la définition. 1-e part. Krasner Marc), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 4, 325—357 (франц.)

Критикуя попытки обоснования теории множеств с различением множеств и классов, где последние не могут входить в другие множества или классы, автор предлагает теорию, исходящую из понятия „свойства", причем всякое свойство само может иметь свойства (допускаются, в частности, и свойства, обладающие собой). Различаются свойства „действительные" (actuelles) (иначе называемые множествами) и „возможные" (virtuelles). Содержание понятия „действительное свойство" может быть различным; в работе рассматривается случай, когда „действительное" означает „конечное". Для этой теории строится формализм, формулы которого называются „определениями" (Df). В работе рассматриваются только „Df категории 0", которые суть „деревья", состоящие из конечного числа отрезков, соединенных „узлами". Каждый отрезок несет один из знаков $\in$, $\notin$, $\swarrow$, $\searrow$, а каждый узел — один из знаков $*$, $\bigcirc$, $\cdot$. Знаки $\in$, $\notin$, $\swarrow$, $\searrow$ играют роль символов индивидуальных предикатов; в частности, $\swarrow$ соответствует предикату $x \swarrow y$ („x есть первый элемент пары y"); знак $*$ отмечает „корень" дерева; знак $\bigcirc$ играет роль квантора общности и $\cdot$ — квантора существования. К узлам могут присоединяться еще некоторые другие знаки. Каждому дереву ставится в соответствие определенный предикат (эвристически это предикат, верный для тех и только тех объектов, которые определяются данным Df).

В терминах деревьев определяются понятия „непротиворечивого Df", „корректного Df" (содержательно корректность Df означает, что соответствующий предикат верен для одного и только для одного объекта) и „эквивалентных Df". Класс эквивалентных Df называется „объектом", а все Df этого класса — его определениями. Определяются индивидуальные предикаты (равенство, принадлежность и т. п.) над объектами. Изложение не является строго формальным и носит эвристический характер. А. В. Гладкий

95. Об эквивалентности двух определений полноты систем аксиом А. Н. Колмогорова и Г. Вейля. Рожанская Ю. А., Уч. зап. Моск. ун-та, 1956, вып. (8), 197—198

Доказывается эквивалентность следующих двух определений полноты системы аксиом:

Определение (α). Система аксиом S полна, если к ней нельзя добавить ни одной аксиомы, выраженной в терминах тех же отношений, без того, чтобы она либо перестала быть совместной, либо перестала быть независимой.

Определение (β). Система аксиом S полна, если любые две ее интерпретации изоморфны.

Для доказательства вводятся понятия x-эквивалентности и x-типа, являющиеся обобщениями понятий подобия и порядкового типа Кантора. Ф. А. Кабаков

96. Об интерпретации системы модальной логики Лукасевича. Андерсон (On the interpretation of a modal system of Łukasiewicz. Anderson Alan Ross.), J. Comput. Systems, 1954, **1**, 209—210 (англ.)

Автор показывает, что система модальной логики Лукасевича (РЖМат, 1955, 585) семантически неполна в смысле Холдена (Hallden, J. Symbolic Logic, 1951, **16**, 127—129). A. Rose

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 6, 554

97. Консультации. Что такое аксиоматика? Каково преимущество аксиоматических методов? Могут ли быть аксиоматизированы все дедуктивные науки? Себастьян-и-Сильва (Consultório. O que é uma axiomática? Quais as vantagens dos métodos axiomáticos? Todas as ciências dedutivas devem ser axiomatizadas? Sebastião e Silva José), Gaz. mat. (Lisboa), 1953, **14**, № 54, 18—23 (порт.)

Первые три статьи Отдела консультации «Математической газеты». Первая содержит популярный очерк об аксиоматическом методе (история его от Аристотеля; современный теоретико-множественный аксиоматический метод; упоминание о работах Гильберта и Гёделя), а вторая и третья — мысли автора о роли этого метода в науке и месте его в преподавании математики. Новых результатов статьи не содержат. Отмечается роль Антонио Анисето Монтейро в деле внедрения современного аксиоматического метода в Португалии, идеи которого и развивает автор. А. В. Кузнецов

98. Научная деятельность Яна Лукасевича в области математической логики. Мостовский (L'oeuvre scientifique de Jan Łukasiewicz dans le domaine de la logique mathématique. Mostowski A.), Fundam. math., 1957, **44**, № 1, 1—11 (франц.)

Краткий очерк научной деятельности Я. Лукасевича в области математической логики. Приводятся основные факты его биографии и педагогической деятельности. Отмечается значение для современной науки идей Лукасевича, одного из создателей многозначных логик. Прилагается список около ста названий печатных трудов Лукасевича, главным образом по математической логике. Ф. А. Кабаков

99. Да, нет, может быть. Мок (Oui, non-peut-être. Moch François), Dialectica, 1956, **9**, № 3-4, 244—262 (франц.; рез. франц., англ.)

Рассматриваются вопросы применимости трехзначной логики, в которой для описания логических связок используются таблицы истинности со значениями истинности: «да», «нет», «может быть», к различным недетерминистским теориям. Н. М. Нагорный

100. Аксиоматический и операциональный методы. Пьяже (Méthode axiomatique et méthode opérationnelle. Piaget Jean), Synthese, s. a., **10**, 23—43 (франц.)

Аксиоматический и операциональный (функциональный) методы рассматриваются с точки зрения психологии, связи между психологией и логикой и с точки зрения теории познания. Н. М. Нагорный

См. также: 174, 609

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

101. О разбиениях чисел на степени простых. Мицуи (On the partitions of a number into the powers of prime numbers. Mitsui Takayoshi), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 4, 428—447 (англ.)

Выводится асимптотическая формула для числа $T(n, m, k)$ представлений натурального n в виде суммы k-ых ($k \geqslant 1$) степеней простых, не превосходящих m. Коэффициенты производящей функции $\Pi_{p<m}(1-W^{p^k})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T(n, m, k) w^n$ вычисляются по теореме Коши. Выделение главного члена производится также, как это сделано в аналогичной задаче Секером (РЖМат, 1954, 2839). Окончательный результат таков:
При $n \geqslant m^k$

$$T(n, m, k) = (2\pi A_2)^{-1/2} e^{n\alpha} + A_1 \times$$

$$\times \left\{1 + O \max\left(n^{-\frac{k}{2(k+1)(k+2)}}, m^{-\frac{k}{2(k+2)}}\right)\right\}$$

равномерно по n и m, где α есть корень уравнения

$$n = \sum_{p<m} p^k (e^{\alpha p^k} - 1)^{-1},$$

$$A_1 = -\sum_{p<m} \ln\left(1 - e^{-\alpha p^k}\right),$$

$$A_2 = \sum_{p<m} p^{2k} e^{\alpha p^k} (e^{\alpha p^k} - 1)^{-2}.$$

К. А. Родосский

102. О среднем числе слагаемых в разбиении n. Лутхра (On the everage number of summands in partition of n. Luthra S. M.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1957, **A23**, № 6, 483—498 (англ.)

Пусть $P_k(n)$ означает число разбиений n на k положительных целых, $q_k(n)$ — на k неравных натуральных чисел. Секереш (Szekeres) в 1953 г. определил асимптотическое поведение функции $P_k(n)$ для любых значений и доказал, что она имеет единственный максимум

$$k_0 = CN^{\frac{1}{2}} L - C^2\left(\frac{1}{4}L^2 - \frac{3}{2}L - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} + O\left(N^{-\frac{1}{2}} \log^4 N\right),$$

где $C = 6^{\frac{1}{2}}/\pi$, $L = \log(CN^{\frac{1}{2}})$, $N = (n - \frac{1}{24})$.

Он доказал также, что $q_k(n)$ имеет единственный максимум

$$k_1 = (2^{\frac{1}{2}} \log 2) C M^{\frac{1}{2}} + 2b(\log 2)^{-1} - \frac{\frac{1}{2}b}{1-2b} - 1 + O(M^{-\frac{1}{2}}),$$

где $b = C^2(\log 2)^2$, $M = n + \frac{1}{24}$.

Доказывается, что среднее число слагаемых в разбиении n будет:

$$k = CN^{\frac{1}{2}}(z+\gamma) + \frac{C^2}{2}(z+\gamma) + \frac{1+C^2}{4} + O(N^{-\frac{1}{2}} \log N),$$

где γ — эйлерова постоянная. Выведена формула и для случая неравных слагаемых. Дана таблица значений этих функций до $n = 100$. В. А. Голубев

103. О $\sigma(n)$ и $\varphi(n)$. Пан Ченг-тунг, Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 10, 627

Улучшаются известные оценки остаточных членов в асимптотических выражениях для сумм некоторых арифметических функций. Так, например, для

$$\sum_{n<x} \sigma(n) = \frac{\pi^2 x^2}{12} + \Delta(x) \text{ и } \sum_{n<x} \tau_4(n) = \frac{\pi^2 x^2}{2} + T(x)$$

имеем

$$\Delta(x) = O\{x(\log x \log\log x)^{\frac{3}{4}}\}$$

$$\text{и } T(x) = O\{x(\log x \log\log x)^{\frac{3}{4}}\}.$$

Здесь $\tau_4(n)$ — число представлений числа n в виде суммы 4 квадратов. Все результаты получены с помощью метода И. М. Виноградова. Доказательства не приводятся. Г. В. Емельянов

104. Арифметические функции и квазиасимптотика. Риччи (Funzioni aritmetiche e quasi-asintoticità. Ricci Giovanni), Rend. Seminar. mat. e. fis. Milano, 1952—1953(1954), **24**, 88—106 (итал.)

Пусть $\{x_n\}$ и $\{a_n\}$ ($n = 1,2, \ldots$) — две последовательности вещественных чисел, причем $a_n > 0$. Если $x_n/a_n \to 1$ при $n \to \infty$, то принято говорить, что x_n асимптотически равно a_n. Автор вводит еще следующую терминологию. Если $\lim \inf_{n\to\infty} x_n/a_n = 1$ или $\lim \sup_{n\to\infty} x_n/a_n = 1$, то a_n называется соответственно асимптотической нижней или верхней гранью. Если для любого $\varepsilon > 0$ последовательность индексов n, для которых $1 - \varepsilon < x_n/a_n < 1 + \varepsilon$, имеет естественную плотность 1, то говорим, что x_n квазиасимптотически равно a_n. a_n называется квазиасимптотической нижней (верхней) гранью, если для всякого $\varepsilon > 0$ последовательность индексов n, удовлетворяющих неравенству $x_n/a_n > 1 - \varepsilon$ (соответственно $x_n/a_n < 1 + \varepsilon$) имеет естественную плотность 1.

Аналогично вводятся понятия асимптотического и квазиасимптотического равенств, нижних и верхних граней и для других процессов образования пределов. Так, например, если $x'_n \sim a_n'$, где $x_n' = (x_1 + \ldots + x_n)/n$; $a_n' = (a_1 + \ldots + a_n)/n$, то говорим, что x_n асимптотически равно a_n относительно процесса $(C, 1)$.

На примерах классических теоретико-числовых функций иллюстрируется удобство введенной терминологии. И. П. Кубилюс

105. Об одном виде лакунарности. Эрдёш (Über eine Art von Lakunarität. Erdös P.), Colloq. math., 1957, **5**, № 1, 6—7 (нем.)

Пусть $1 < a_1 < a_2 < \ldots$ (1) — последовательность целых чисел; $A(a_1, a_2, \ldots)$ — последовательность тех целых чисел, которые не делятся ни на какое число a_i. Последовательность (1) называется лакунарной в смысле Хартмана, если не существует числа k такого, чтобы для каждого r находилось бы n с $a_{n+i+1} - a_{n+i} < k$ ($i = 1, \ldots, r$). Доказывается теорема: $A(a_1, a_2, \ldots)$ будет лакунарной тогда и только тогда, когда существует бесконечная подпоследовательность $a_{l_1}, a_{l_2}, \ldots$ с $(a_{l_i}, a_{l_j}) = 1$.

Следовательно, свободные от квадратов числа — лакунарны. Отсюда (ранее доказано Серпинским) — простые числа лакунарны. Б. М. Бредихин

106. Об одной проблеме теории равномерного распределения. Кнаповский (Über ein Problem der Gleichverteilungstheorie. Knapowski S.), Colloq. math., 1957, **5**, № 1, 8—10 (нем.)

Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ — последовательность натуральных чисел; u_n — n-й член последовательности

$$\frac{1}{a_1}, \frac{2}{a_2}, \ldots, \frac{a_1-1}{a_1}, \ldots \frac{1}{a_k}, \frac{2}{a_k}, \ldots, \frac{a_k-1}{a_k}, \ldots \quad (1)$$

Через $A(n)$ обозначим число тех $u_i \in [\alpha, \beta) \subset [0,1]$, для которых $i \leqslant n$. Пусть, далее, $S(x)$ будет непрерывной монотонной функцией, удовлетворяющей для целочисленных значений x уравнению

$$S(x) = \sum_{\nu=1}^{x} a_\nu - x; \quad S^{-1}(x) \text{ — функция, обратная к } S(x).$$

Доказывается теорема:

$$A(n) = (\beta - \alpha)n + O(a_k), \text{ где } k = \langle S^{-1}(n) \rangle.$$

Если $a_k/k \to \infty$ и $[\alpha, \beta) \neq [0,1]$, то $A(n) = (\beta - \alpha)n + \Omega(a_k)$.

Выводятся следствия: А. Если для функции $f(n)$, $n \leqslant S(f(n))$ $(n \geqslant n_0)$, то $A(n) = (\beta - \alpha)n + O(a_{\langle f(n) \rangle})$, в частности, при $a_{\langle f(n) \rangle} = o(n)$ последовательность (1) будет равномерно распределенной. В. Если для функции $f(n)$ $n \geqslant S(f(n))$, $n \geqslant n_0$, $a_k/k \to \infty$ и $[\alpha, \beta) \neq [0,1]$, то $A(n) = (\beta - \alpha)n + \Omega(a_{[f(n)]})$; в частности, при $a_{[f(n)]} \neq 0(n)$ последовательность (1) не будет равномерно распределенной.

Примеры: 1. Последовательность (1) будет равномерно распределенной при $a_n = n$; $a_n = p_n$, где p_n — простое. 2. При $a_n = a^n$ (целое $a > 1$) последовательность (1) не будет равномерно распределенной. Б. М. Бредихин

107. Теория диофантовых приближений. I. Проблема А. Островского. Шош (On the theory of diophantine approximations. I. (On a problem of A. Ostrowski). Sós Vera T.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 3-4, 461—472 (англ.)

Пусть $0 < \alpha < 1$, $\{x\}$ — дробная часть положительного числа x, и

$$C_\alpha(N) = \sum_{n=1}^{N} \{n\alpha\} - \frac{N}{2}.$$

А. Островский показал, что для некоторых иррациональных чисел α функция $C_\alpha(N)$, $(N = 1,2 \ldots)$ не ограничена ни сверху, ни снизу. Им же был поставлен вопрос о существовании чисел α, для которых $C_\alpha(N)$ будет односторонне ограниченной. В работе дается решение этой задачи.

Теорема. Существуют иррациональное α и постоянная C такие, что при всяком $N = 1,2, \ldots$ имеет место неравенство $C_\alpha(N) > C$. При этом автор утверждает, что: 1) константа C не может быть $\geqslant 0$; 2) множество чисел α, удовлетворяющих неравенству теоремы, имеет мощность континуума. А. Ф. Лаврик

108. О двумерном распределении простых чисел вещественного квадратичного поля в классах вычетов. Шульц-Аренсторфф (Über die zweidimensionale Verteilung der Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Restklassen. Schulz-Arenstorff Richard), J. reine und angew. Math., 1957, **198**, № 3-4, 204—220 (нем.)

Пусть K — вещественное квадратичное поле, $\mathfrak{A} \neq 0$ — целый идеал, ρ — целое число из K $(\rho, \mathfrak{A}) = 1$. Простым числом поля K называется целое число из K, порождающее простой главный идеал. Радемахером доказано (Rademacher H., Acta arithm., 1935, **1**, 67—77; Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **39**, 380—398), что число вполне положительных простых чисел ω из K, удовлетворяющих условиям $\omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{A}}$, $\omega < x'$, $\omega' < x'$ (ω' — сопряженное с ω), $x > 0$, $x' > 0$, $xx' > 3$, равно

$$\left(\int_2^{xx'} du/\log^2 u\right) \log xx'/(2h\varphi(\mathfrak{A}) \log \varepsilon_0) + O\left\{xx' \exp\left(-c(\log xx')^{\frac{1}{2}}\right)\right\}. \quad (1)$$

Здесь h — число классов идеалов, ε_0 — основная единица поля, $\varphi(\mathfrak{A})$ — обобщенная функция Эйлера, c и константа в O вообще зависят только от K, $\mathfrak{A}$ и ρ. Автор доказывает при $N\mathfrak{A} \leqslant \log^l xx'$ справедливость формулы (1) с некоторой константой c и константой в O, зависящими только от K и l. Этот результат является аналогом известных результатов Пэйджа-Зигеля-Вальфиша о распределении простых натуральных чисел в арифметических прогрессиях. Доказательство основано на применении рядов Гэкке и использует теорему Брауэра (Brauer R., Amer. J. Math., 1947, **69**, 243).

Примечание референта. Референтом получена аналогичная формула для любых полей алгебраических чисел и более общих областей сигнатурного пространства при фиксированном $\mathfrak{A}$ (Матем. сб. 1952, **31** (73): 3, 507-542). И. П. Кубилюс

109. Представления вещественных чисел и их эргодические свойства. Реньи (Representations for real numbers and their ergodic properties. Rényi A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 3-4, 477—493 (англ.)

Автор рассматривает представления вещественных чисел x посредством положительной функции $y = f(x)$ в форме „f-разложений"

$$x = \varepsilon_0 + f(\varepsilon_1 + f(\varepsilon_2 + \ldots) \ldots), \quad (1)$$

где „цифры" $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ и остатки $r_n(x) = f(\varepsilon_{n+1} + f(\varepsilon_{n+2} + \ldots) \ldots)$ $(n = 0,1, \ldots)$ определяются следующими рекурсивными соотношениями:

$$\varepsilon_0(x) = [x], \; r_0(x) = (x),$$

$$\varepsilon_{n+1}(x) = [\varphi(r_n(x))], \; r_{n+1}(x) = (\varphi(r_n)),$$

где $[x]$ и (x) означают соответственно целую и дробную части x, а функция $\varphi = f^{-1}$.

В первой части работы приводятся условия, которые нужно наложить на функцию f, чтобы для любого вещественного x имело место разложение (1).

Во второй части работы при тех же условиях доказываются эргодические теоремы следующего типа:

Для любой L-интегрируемой в $(0,1)$ функции $g(x)$ и для почти всех $x \in (0,1)$

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(r_k(x)) = M(g), \; n \to \infty$$

$$M(g) = \int_0^1 g(x) h(x) \, dx,$$

где $h(x)$ — некоторая зависящая только от $f(x)$ измеримая ограниченная положительная функция, причем мера $\nu(E) = \int_E h(x) \, dx$ инвариантна по отношению к преобразованию $T(x) = (\varphi(x))$.

Из этих теорем автора легко вытекает ряд хорошо известных аналогичных утверждений о q-адических раз-

ложениях $\left(x=\sum_{n=0}\frac{\varepsilon_n}{q^n},\ q=2,3,\ldots\right)$ и цепных дробях (например, классическая теорема Бореля о нормальности десятичных разложений). И. А. Ибрагимов

110. Рациональные приближения алгебраических чисел. Райдаут (Rational approximations to algebraic numbers. Ridout D.), Mathematika, 1957, **4**, № 8, 125—131 (англ.)

Малер (Proc. Koninkl. akad. wet. Amsterdam, 1936, **39**, 633—640, 729—737) обобщил теорему Шнейдера об аппроксимации алгебраических чисел рациональными дробями на случай, когда числители и знаменатели приближающих дробей имеют определенную структуру. В реферируемой статье автор, пользуясь методом Рота (РЖМат, 1956, 7844) и упомянутым методом Шнейдера—Малера, доказывает теорему, аналогичную теореме Малера, но дающую более сильный результат.

Теорема. Пусть α — любое алгеораическое число, отличное от нуля, $P_1,\ldots,P_s$, $Q_1,\ldots,Q_t$ — различные фиксированные простые числа и μ, ν и c — действительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0\leqslant\mu\leqslant 1,\ 0\leqslant\nu\leqslant 1,\ c>0.$$

Далее, p, q — целые рациональные числа, представимые в форме

$$p=p^*P_1^{r_1}\ldots P_s^{r_s},\ q=q^*Q_1^{l_1}\ldots Q_t^{l_t},$$

где $r_1,\ldots r_s$, $l_1,\ldots l_t$ — неотрицательные целые рациональные числа, а p^* и q^* — целые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0>|p^*|\leqslant cp^{\mu},\ 0<q^*\leqslant cq^{\nu}.$$

Тогда, если $k>\mu+\nu$, то неравенство

$$0<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^k}$$

может иметь не более чем конечное число решений в числах p и q. А. Б. Шидловский

111. Основные понятия геометрии чисел. Главка (Grundbegriffe der Geometrie der Zahlen. Hlawka Edmund), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1954, **57**, № 2, 37—55 (нем.)

Систематический обзор геометрии чисел. Сжатое, но весьма содержательное изложение. Основное внимание уделено результатам 1938—1953 гг. См. также монографию Хеллера (РЖМат, 1956, 7098 К).

Примечание референта. На стр. 46 в сноске 22 неточна библиография. Должно быть: А. В. Малышев, Успехи матем. наук, 1952, **8**, № 2). А. В. Малышев

112. Теорема Зигеля о среднем, относящаяся к геометрии чисел. Макбит, Роджерс (Siegel's mean value theorem in the geometry of numbers. Macbeath A. M., Rogers C. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 2, 139—151 (англ.)

Пусть T — пространство вещественных $n\times n$-матриц определителя 1, а $\bar{\mu}$ — инвариантная мера в T. G — группа целочисленных $n\times n$-матриц определителя 1; F — фундаментальная область T/G. Пусть l — целое число, $1\leqslant l\leqslant n-1$, а LJ — множество целочисленных $n\times l$-матриц ранга l; пусть X — множество вещественных матриц, а μ — обычная мера Лебега в X. Дан упрощенный вариант доказательства следующей теоремы Зигеля (Siegel C. L., Ann. Math, 1945, **46**, 340—347). Для любой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, определенной на X,

$$\int_F\sum_{q\in LJ}f(tq)\,d\bar{\mu}(t)=\bar{\mu}(F)\int_X f(x)\,d\mu(x)$$

(Зигель провел доказательство лишь в случае $l=1$). А. В. Малышев

113. Неоднородный минимум квадратичных форм нулевой сигнатуры. Берч (The inhomogeneous minimum of quadratic forms of signature zero. Birch B. J.), Acta arithm., 1958, **4**, № 1, 85—98 (англ.)

Пусть $Q_r=Q_r(x_1,\ldots,x_2)$ вещественная квадратичная форма r переменных. Рассматривается ее неоднородный минимум

$$M_{\mathrm{I}}(Q_r)=\sup_{\xi_1,\ldots,\xi_r}\{\inf_{x_1\equiv\xi_1,\ldots,x_r\equiv\xi_r\pmod 1}|Q_r(x_1,\ldots,x_r)|\}. \quad (1)$$

Доказана теорема: Пусть Q_{2n} — неопределенная квадратичная форма $2n$ переменных, сигнатуры 0 и определителя $D\neq 0$. Тогда

$$M_{\mathrm{I}}(Q_{2n})\leqslant\left|\frac{1}{4}D\right|^{\frac{1}{2n}}, \quad (2)$$

причем знак равенства достигается лишь для кратных формы

$$R_{2n}=\sum_{i=1}^{n-1}x_{2i}x_{2i-1}+x_{2n}x_{2n-1}.$$

Неравенство (2) есть прямое обобщение теоремы Минковского о произведении двух линейных неоднородных форм. Для форм ненулевой сигнатуры оно, вообще говоря, не верно (Davenport H., Acta Math., 1948, **80**, 65—95). При доказательстве этой теоремы формулируется ряд предложений, имеющих и самостоятельный интерес. А. В. Малышев

114. Об инварианте Хассе—Минковского кронекеровского произведения матриц. Вартак (On the Hasse—Minkowski invariant of the Kronecker product of matrices. Vartak Manohar N.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 66—72 (англ.)

Пусть A и B — симметричные матрицы с рациональными элементами порядков m и n соответственно, $A\otimes B$ — их кронекеровское произведение и p — простое число. Предполагая, что все миноры матриц A и B, расположенные в левом верхнем углу, отличны от нуля, автор доказывает формулу

$$c_p(A\otimes B)=(-1,-1)_p^{m+n-1}(c_p(A))^n(c_p(B))^m\times$$

$$\times(|A|,-1)_p^{n(n-1)/2}(|B|,-1)_p^{m(m-1)/2}(|A|,|B|)_p^{mn-1},$$

где $c_p(*)$ — символ Хассе-Минковского, а $(a,b)_p$ — символ нормменного вычета Гильберта. З. И. Боревич

115. Замечания о наименьшем квадратичном невычете по простому модулю. Гордеев Н. В., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 5—6

116. Определение решения уравнения $\sum_{j=1}^{N}x_j^2=N=\prod_{j=1}^{N}x_j$ **для всякого целого числа** $N>2$, **где** x_j **попар-**

но простые числа. **Шенхейм** (Determinarea unei soluții a ecuației $\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = N\prod_{j=1}^{N} x_j$ pentru orice întreg $N>2$, x_j fiind numere întregi prime două câte două. Schönheim Joan), Studii și cercetări mat. și fiz. Acad. RPR Fil Cluj. 1956, **7**, № 1-4, 59—63 (рум.; рез. русск., франц.).

Указывается простой алгорифм для решения в целых взаимно простых числах уравнения, указанного в названии работы. Г. В. Емельянов

117. Целочисленные решения уравнения $a^3+b^3+c^3=d^3$. Банквиц (Ganzzahlige Lösungen der Gleichung. $a^3+b^3+c^3=d^3$. Bankwitz C.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 10, 469 (нем.)

Указаны способы, позволяющие получить отдельные целочисленные решения уравнения $a^3+b^3+c^3=d^3$.

В. Д. Подсыпанин

118. Многостепенные системы. Венкатачалам-Ийер (Systèmes multigrades. Venkatachalam Iyer R.), Mathesis, 1957, **66**, № 10, 386—387 (франц.)

Дается общее решение в целых числах трехстепенной системы уравнений $A_1, A_2, A_3, A_4 = B_1, B_2, B_3, B_4$, где $A_1+A_4 \neq A_2+A_3 \neq B_1+B_4 \neq B_2+B_3$. Даны 2 числовых примера. В. А. Голубев

119. О полном решении в натуральных числах неопределенного уравнения $x^2+mx+p=(p+m+1)y^2$ в случаях $m=1,2$. Палама (Sulla risoluzione completa in numeri naturali dell'equazione indeterminata $x^2+mx+p=(p+m+1)y^2$, nei casi $m=1,2$. Palamà Giuseppe), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 636—647 (итал.)

Уравнение

$$x^2 + mx + p = (p + m + 1)y^2. \qquad (1)$$

при $m = p = 1$ решено в натуральных числах Шинцелем и Серпинским (Schinzel A., Sierpiński W., Colloq. math., 1956, **4**, No. I, 71-73).

Даются рекуррентные формулы всех решений в натуральных числах уравнения (1) при любом целом $p \geqslant 0$, если $m = 1$ и $p + 2$ не равно квадрату целого числа. Число решений бесконечно. Они вытекают из соответствующих решений уравнения Пелля $x^2 - (p + 2)y^2 = 1$. Аналогичные результаты получаются и в случае $m = 2$.

Результаты применяются к решению уравнений $x^2 - My^2 = -N$ и $(z + q)^3 - z^3 = q(r^2 + r + 1)y^2$, где $q = 2r + 1$. В. А. Голубев

120. Объединения арифметических прогрессий. Стейн (Unions of arithmetic sequences. Stein Sherman K.), Math. Ann., 1958, **134**, № 4, 289—294 (англ.)

В кольце целых чисел $\mathcal{Y}$ определяются операции сдвига $T_n(x) = x + n$, где $n \in \mathcal{Y}$, и отражения $R_\alpha(x) = 2\alpha - x$, где $2\alpha \in \mathcal{Y}$. Множества A и B из $\mathcal{Y}$ называются сравнимыми, если одно содержится в другом; A и B называются конгруэнтными, если существует сдвиг, переводящий одно в другое. Если $T_n(A) = A$, где наименьшее $n > 0$, то A периодично с периодом n.

Изучаются свойства объединений арифметических прогрессий $A_i = \{d_i x + b_i\}$ из $\mathcal{Y}$. Доказываются две теоремы единственности:

Пусть $\bigcup A_i = \bigcup B_i$, где A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и B_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, будут собраниями или (1) попарно пересекающихся несравнимых, или (2) попарно непересекающихся неконгруэнтных арифметических прогрессий. Тогда $m = n$ и $A_i = B_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Группа симметрий $\mathfrak{G}$ для $S \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ определяется посредством $T_n(S) = S$ и $R_\alpha(S) = S$. При условии (1) группа $\mathfrak{G}$ изоморфна группе $\mathfrak{G}_2$ с двумя образующими элементами g_1 и g_2 и с отношениями $g_1^2 = 1 = g_2^2$; при условии (2) или $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}_2$, или $\mathfrak{G}$ изоморфна бесконечной циклической группе. Показывается, что S с нечетным периодом не может удовлетворять одновременно условиям (1) и (2).

Теорема единственности (2) доставляет новое доказательство теоремы Мирского и Неймана: $y \neq \bigcup_{i=1}^{n} A_i (n > 1)$. Однако в этом случае существует счетное собрание прогрессий A_i с $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = y$.

Доказывается теорема: Если $\mathcal{Y} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, где A_i—попарно не пересекаются и точно две из них будут конгруэнтны, тогда $d_i = 2^i$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, и $d_n = 2^{n-1}$.

Среди нерешенных проблем отмечается следующая проблема: Пусть $\mathcal{Y} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_i удовлетворяют условию (2), причем $\sum_{i=1}^{\infty} d_i^{-1} = 1$. Следует ли отсюда, что $d_i = 2^i$?

Многие результаты реферируемой статьи могут быть обобщены на циклические группы. Б. М. Бредихин

121. Обратимость теоремы Ферма. Робинсон (The converse of Fermat's theorem. Robinson Raphael M.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 703—710 (англ.)

Обзорная статья, содержащая элементарные доказательства десяти теорем, устанавливающих условия обратимости малой теоремы Ферма.

Наиболее существенными (по мнению автора) являются: Теорема 9. Пусть $N = k \cdot 2^n + 1$, где $0 < K < 2^n$, и пусть $\left(\frac{a}{N}\right) = -1$. Тогда N—простое, если и только если $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv -1 \pmod{N}$. Теорема 10. Пусть $N = k \cdot 2^n + 1$, где $n > 2$ и $0 < k < 6 \cdot 2^n + 7$, и пусть $\left(\frac{a}{N}\right) = -1$. Тогда N—простое, если и только если $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{N}$. Теорема становится неверной при $0 < k \leqslant 6 \cdot 2^n + 7$. С помощью теоремы 9 автор доказал, что число $F_{10} = 2^{2^{10}} + 1 = 2^{1024} + 1$ — составное. А. К. Леваков

122. Факторизация больших чисел и определение простых чисел. Олдридж (Factorising large numbers and the verification of primes. Aldridge W. L.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 293—294 (англ.)

Указывается способ разложения на множители больших чисел $6N + 1$ и $6N - 1$. Пусть, например, $6N + 1 = (6a + 1)(6b + 1)$ и $N = 6q + r$. Определяем рациональные корни уравнения $t^2 - (6z + r)t + (q - z) = 0$, где $6z = a + b - r$, для чего необходимо, чтобы $\Delta = (6z + r)^2 - 4(q - z)$ было точным квадратом.

В. А. Голубев

123. Об относительно простых последовательностях. Ламбек, Мозер (On relatively prime sequences. Lambek J., Moser L.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 287—288 (англ.)

Последовательность $\{a_n\}$, $n \geqslant 0$, называется относительно простой, если $(a_m, a_n) = 1$ для всех m и n при $m \neq n$.

Пусть $P(x)$ — многочлен, рекуррентно определяемый формулами: $P^0(x) = x$, $P^{k+1}(x) = P(P^k(x))$. Если a, b — целые, то $P^k(a) \equiv P^k(b) \pmod{(a-b)}$. При $a = P^n(c)$, $b = 0$ имеем

$$P^{k+n}(c) \equiv P^k(0) \pmod{P^n(c)}. \qquad (1)$$

Из (1) получаем теорему 1: Последовательность $\{P^n(c)\}$, $n \geqslant 0$, относительно проста тогда и только тогда, когда $(P^k(0), P^n(c)) = 1$ для всех $k \geqslant 1$, $n \geqslant 0$.

Устанавливается 6 классов полиномов, образующих относительно простые последовательности. В. А. Голубев

124. Теорема о «счастливых» числах. Хокинс, Бригс (The lucky number theorem. Hawkins D.,

Briggs W. E.), Math. Mag., 1957, 31, № 2, 81—84 (англ.)

Пусть S_n — бесконечная последовательность натуральных чисел $t_{n,m}$ ($m=1,2,3,\ldots$); при этом S_1 — последовательность всех натуральных чисел. Образуем последовательность S_{n+1} для $n>1$, удаляя из последовательности S_n каждое $t_{n,m}$, которое в последовательности S_n занимает место m, кратное числу $t_{n,n}$. Продолжая бесконечно этот процесс просеивания чисел, получим последовательность 2,3,7,9,13,15,21,..., числа которой названы Уламом (Ulam) „счастливыми". Законы распределения „счастливых" чисел s_n среди натуральных во многом сходны с законами распределения простых чисел P_n. Если $R(n,x)$ — число „счастливых" чисел в S_n, не превышающих x, то имеет место следующее рекурентное соотношение: $R(n,x)=\frac{R(n-1,x)}{S_{n-1}}$, $n\geqslant 2$; при этом $s_n\approx n\log n$. За исключением конечного числа случаев $s_n>p_n$. Улам предполагает, что последнее соотношение имеет место для всех n, начиная с некоторого номера.

Б. А. Кордемский

125. Некоторые арифметические свойства полиномов Лежандра. Карлиц (Some arithmetic properties of the Legendre polynomials. Carlitz L.), Acta arithm., 1958, 4, № 2, 99—107 (англ.)

Автор продолжает свои исследования (РЖМат, 1955, 39, 1632) связи между свойствами делимости полиномов Лежандра $P_m(a)$ и комплексным умножением эллиптических функций. Выводится ряд новых формул.

А. В. Малышев

126. Умножение и деление при помощи биномиальных коэффициентов. Паркер (Multiplication and division by binomial factors. Parker R. V.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 1, 39—42 (англ.)

На ряде примеров объясняется интересный способ умножения и деления многочлена на многочлен при помощи треугольника Паскаля. В. А. Голубев

127. О пифагоровых тройках (Решение обобщенной проблемы). Пиньятаро (Sulle terne pitagoriche (Soluzione di un problema generalizzato). Pignataro Salvatore), Ricerca, 1957, 8, genn.-giugno, 73—98 (итал.)

Выводятся формулы решений в целых взаимно простых числах уравнения $x^2+y^2=z^2$ при различных данных $d=|y-x|=\text{const}$. В. А. Голубев

128. Решение уравнений Пифагора. Шлейг (Evaluating pythagorean equations. SchlageErnest L.), Prod. Engng, 1956, 27, № 11, F22—F23 (англ.)

129. Теоретико-групповое доказательство теоремы Вильсона. Фейт (A group-theoretic proof of Wilson's theorem. Feit Walter), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 2, 120 (англ.)

130. Числовая система с иррациональным основанием. Бергман (A number system with an irrational base. Bergman George), Math. Mag., 1957, 31, № 2, 98—110 (англ.)

Основанием системы выбрано число $\tau=(1+\sqrt{5})/2$. Используется характерная особенность этого числа: $\tau^n=\tau^{n-1}+\tau^{n-2}=f_n\tau+f_{n-1}$, где f_n — n-й член ряда Фибоначчи. Для представления отрицательной степени τ вводится символ $f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n$. Любое число в τ-системе записывается с помощью цифр 0 и 1. Например, число 3 записывается как 100,01, так как $3=1\cdot\tau^2+0\cdot\tau^1+0\cdot\tau^0+0\cdot\tau^{-1}+1\cdot\tau^{-2}$; 4 записывается как 101,01, так как $4=\tau^2+\tau^0+\tau^{-2}$. Дроби в τ-системе имеют бесконечное количество цифр. Рассмотрены все арифметические действия. Статья предложена в качестве математического развлечения. Б. А. Кордемский

131 Д. Некоторые задачи аддитивной теории чисел. Лаврик А. Ф. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Среднеаз. ун-т, Ташкент, 1958

См. также: 49, 640, 800, 906 К

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

132 К. Высшая алгебра. [Учебник для пед. ин-тов и учебн. пособие для ун-тов]. Окунев Л. Я. М., Учпедгиз, 1958, 336 стр., илл., 6 р. 95 к.

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

133. О неразложимости полиномов. Дуйчев (Върху неразложимостта на полиномите. Дуйчев Йордан), Годишник Софийск. ун-т. Физ.-матем. фак., 1953—1954, кн. 1, ч. 1, София, 1954, 27—32 (болг.; рез. франц.)

Рассматриваются полиномы вида $F(z)=f(z)+\varepsilon\lambda\varphi(z)$, (1) где $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ и $\varphi(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m$, a_i, b_j и λ — целые рациональные числа. Степени m и n связаны соотношениями $m=n-1$ или $m=n-2$. В первом случае $\varepsilon=1$, во втором $\varepsilon=sgn\,a_0b_0$.

Для полиномов (1) доказывается существование такого числа M, что полиномы $F(z)$ неприводимы при $m=n-1$ для всякого целого рационального λ, для которого $|\lambda|>M$, и при $m=n-2$ для всякого целого рационального $\lambda>M$.

Для доказательства применяются некоторые теоремы о неприводимости полиномов, установленные Перроном (Perron O., J. reine und angew. Math., 1907, 132, 288). Л. А. Сорокина

134. Теоремы Какея и Пойа о степенных суммах. Фаулкс (Theorems of Kakeya and Pólya on powersums. Foulkes H. O.), Math. Z., 1956, 65, № 4, 345—352 (англ.)

Если A — аддитивная полугруппа положительных чисел и $\nu_1,\ldots,\nu_n$ — первые n чисел, не принадлежащие к A, то по теореме Какея (Kakeya S., Japan. J. Math., 1925, 2, 69—80; 1927, 4, 77—85) любая симметрическая функция от n неизвестных $x_1,\ldots,x_n$ может быть представлена как рациональная функция основного множества $s_{\nu_1},\ldots,s_{\nu_n}$, где $s_k=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i^k$.

В работе дается другое, более короткое доказательство этого утверждения, выгодно отличающееся от доказательства Какея своей конструктивностью. Метод, основанный на использовании функций Шура, автор применяет также к результатам Пойа о двух множествах n неизвестных (Pólya G., J. math. pures et appl., 1951, 31, 37—47). А. И. Кострикин

135 К. Сборник задач по линейной алгебре. Учебн. пособие для ун-тов. Проскуряков И. В. М., Гостехтеориздат, 1957, 368 стр., 7 р. 50 к.

Задачник состоит из четырех отделов и дополнения, содержащего задачи на начальные разделы теории групп, колец и полей.

1-й отдел—Определители. Здесь имеется большое количество задач на вычисление определителей с число-

выми элементами, свойства определителей n-го порядка, различные методы вычисления определителей специального вида. Некоторые наиболее употребительные методы вычисления определителей n-го порядка подробно разобраны во введении к соответствующему параграфу. 2-й отдел—Системы линейных уравнений. В этом отделе, кроме задач на различные методы решения систем линейных уравнений, имеются задачи, связанные с понятием линейной зависимости векторов и линейных форм и с понятием ранга матрицы. 3-й отдел — Матрицы и квадратичные формы. Здесь содержатся задачи на всевозможные действия с матрицами (в частности, действия с ортогональными и унитарными матрицами), на полиномиальные матрицы, подобие матриц, характеристический и минимальный многочлены, жорданову форму матрицы, функции от матриц. Последний параграф этого отдела (квадратичные формы) содержит, кроме задач на квадратичные формы, также задачи на симметрические и ортогональные матрицы, связанные с теорией квадратичных форм. 4-й отдел — Векторные пространства и их линейные преобразования. Здесь даны задачи на аффинные векторные пространства, евклидовы и унитарные пространства, линейные преобразования произвольных векторных пространств (в частности, задачи на корневое подпространство, минимальный многочлен линейного преобразования, жорданову форму матрицы линейного преобразования), задачи на линейные преобразования евклидовых и унитарных пространств (линейное преобразование, сопряженное с данным, преобразования унитарные, ортогональные, самосопряженные, кососимметрические, нормальные). В конце задачника даны ответы, указания к решению наиболее трудных задач и решения отдельных (весьма немногих) задач.

А. П. Мишина

136 К. Упражнения по матричному и тензорному исчислению с решениями. Дени-Папен, Кауфман, Фор (Exercices de calcul matriciel et de calcul tensoriel avec leurs solutions. Denis-Papin M., Kaufmann A., Faure R. Paris, Eyrolles, 1958, 173 p., ill., 1540 fr.) (франц.)

Содержание книги: Часть 1. Упражнения по матричному исчислению — Теория. Матричные характеристики. Инфинитезимальное матричное исчисление. Применения к динамике колебаний. Сводная таблица свойств матриц.

Часть 2. Упражнения по тензорному исчислению — Общая часть. Векторное аффинное пространство. Евклидово и эрмитово векторное пространство. Тензорный анализ в евклидовом векторном пространстве. Пространство и геометрия Римана. Применения матричного исчисления (одновременное приведение 2-квадратичных форм, приведение к главным осям). Задачи выбраны простые и средней трудности. Почти все матричные задачи связаны с матрицами 2-го и 3-го порядка, причем каждая задача сопровождается подробным решением с соответствующими методическими указаниями. В задачах исследуются спектральные свойства матриц простой структуры. Приведение к нормальной жордановой форме отсутствует. Достаточное внимание уделяется механическим и электротехническим приложениям. Подробно (на примерах) разбираются формулы, связанные с четырехполюсником. Малые колебания механических систем сочетаются с подробной трактовкой электромеханических аналогий. Исследуются вопросы линеаризации нелинейных систем.

Употребляется громоздкое обозначение $[a]$ для матрицы, так что простейший многочлен от матрицы выглядит, например, так: $5[a]^2+3[a]—7[1]$.

Вторая часть, посвящённая тензорному исчислению, является более схематичной и в значительной своей части содержит выводы разных формул. Изложение материала ясное, доступное. Продумано расположение задач и количество их в каждом разделе.

Может быть полезным учебным пособием для физико-математических и инженерных специальностей, особенно для заочных вузов и для самообразования инженеров в области матричного и тензорного исчисления.

Ф. Р. Гантмахер

ГРУППЫ

137. Аналитическое доказательство основной теоремы о конечных абелевых группах. Оно (An analytical proof of the fundamental theorem on finite Abelian groups. Ono Tamio), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 10, 587 (англ.)

Дается еще одно доказательство теоремы о том, что всякая конечная абелева группа равна прямому произведению циклических групп.

А. П. Мишина

138. О теореме Гёльдера. Миллер (On a theorem of Hölder. Miller Donald W.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 4, 252—254 (англ.)

Известно, что в отличие от других симметрических групп симметрическая группа S_6 обладает внешними автоморфизмами. В реферируемой заметке строится один из таких автоморфизмов.

А. И. Ширшов

139. Теоретико-числовые исследования групп конечного порядка. Брауэр (Number theoretical investigations on groups of finite order. Brauer Richard), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955 Tokyo, 1956, 55—62 (англ.)

Сформулирован ряд проблем, относящихся к теории модулярных представлений конечных групп.

З. И. Боревич

140. D-ранг абелевой группы. Длаб (D-hodnost Abelovy grupy. Dlab Vlastimil), Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 3, 314—334 (чешск.; рез. русск., нем.)

Система ненулевых элементов (g_α), $\alpha\in\mathfrak{A}$, произвольной абелевой группы G называется D-независимой, если из всякого соотношения вида $k_1g_{\alpha_1}+\ldots+k_ng_{\alpha_n}=0$ следует $k_ig_{\alpha_i}=0$ при $i=1,\ldots,n$. Показано, что в общем случае две максимальные D-независимые системы элементов одной и той же группы могут состоять из различного числа элементов, но если группа G примарная, то мощность всех ее максимальных D-независимых систем элементов одна и та же. Эта мощность называется D-рангом примарной группы. D-рангом произвольной группы, называется сумма ее ранга в обычном смысле и D-рангов примарных компонент ее периодической части. Доказывается, что D-ранг группы совпадает с наибольшей из мощностей ее максимальных D-независимых систем элементов и равняется мощности всякой максимальной D-независимой системы элементов группы, в которой каждый элемент имеет или бесконечный порядок, или порядок, равный степени простого числа. D-ранг прямой суммы равен сумме D-рангов слагаемых, D-ранг подгруппы всегда меньше или равен D-рангу всей группы. Если D-ранг группы G бесконечен, то для любой ее подгруппы H D-ранг всей группы G равен сумме D-ранга подгруппы H и D-ранга группы G/H; если D-ранг группы G конечен, то указанное равенство имеет место тогда и только тогда, когда в каждом смежном классе группы G по подгруппе H, порядок которого есть простое число, имеется элемент того же порядка (такую подгруппу автор называет слабо сервантной в G); в общем случае D-ранг группы меньше или равен сумме D-ранга ее подгруппы и D-ранга фактор-группы по ней. В работе доказывается также, что периодическая группа, D-ранг которой конечен и равен n, является прямой суммой n групп D-ранга 1 (т. е. циклических примарных групп и групп типа p^∞), а смешанная группа конечного D-ранга всегда расщепляема.

А. П. Мишина

141. Цепи допустимых подгрупп в группах с операторами. Се Бан-цзе (Hsieh Pang-chieh), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 4, 631—640 (кит.; рез. англ.)

Рассматриваются некоторые условия, при которых группа с операторами удовлетворяет условию обрыва возрастающих (убывающих) цепей допустимых подгрупп. Отметим следующий результат:

Если в группе G имеется система таких инвариантных допустимых подгрупп $N_1, N_2, \ldots, N_k$, что во всех факторгруппах G/N_i выполняется условие обрыва возрастающих (убывающих) цепей допустимых подгрупп, и если аналогичным свойством обладает пересечение всех этих N_i, то во всей группе выполняется соответствующее условие обрыва. Б. И. Плоткин

142. О n-полноте в группах. Солиан Александру., Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, **1**, № 1, 5—22

Элемент a группы $\mathfrak{G}$ называется n-полным в $\mathfrak{G}$, если уравнение $x^n=a$ допускает хотя бы одно решение в $\mathfrak{G}$. Группа $\mathfrak{G}$ n-полна, если каждый ее элемент является n-полным. Очевидно, гомоморфный образ n-полной группы является n-полной группой. В работе рассматриваются все n-полные гомоморфные образы заданной (вообще говоря, не n-полной) группы.

Подгруппу, порожденную всеми n-полными элементами группы $\mathfrak{G}$, автор называет (на наш взгляд неудачно) n-пополнением группы $\mathfrak{G}$ и обозначает через $R_n(\mathfrak{G})$.

Если $R_n(\mathfrak{G})=\mathfrak{G}$, то группа $\mathfrak{G}$ называется квазиполной. Ясно, что $R_n(\mathfrak{G}/R_n(\mathfrak{G}))=1$. Если фактор-группа $\mathfrak{G}/N$ n-полна, то $\{R_n(\mathfrak{G}), N\}=\mathfrak{G}$. По обычной схеме определяются n-метаполные группы (группы, обладающие конечным нормальным рядом с n-полными факторами) и n-метаполный радикал, а также отмечаются некоторые простейшие соотношения.

Русский текст работы не совсем удачен, что затрудняет чтение. Б. И. Плоткин

143. Возрастающие вербальные и фраттиниевы ряды. Нейман (Ascending verbal and Frattini series. Neumann B. H.), Math. Z., 1958, **69**, № 2, 164—172 (англ.)

Пусть f—некоторая функция, отображающая каждую группу на некоторую ее подгруппу. Убывающий f-ряд—это такой ряд $G_0\supset G_1\supset G_2\supset\ldots$, что $G_{i+1}=f(G_i)$. Возрастающий f-ряд—это ряд $G_0\subset G_1\subset\ldots$, где $G_i=f(G_{i+1})$. Примером убывающего f-ряда служит убывающий ряд коммутантов. Возрастающие ряды коммутантов рассматривались автором раньше (РЖМат, 1957, 7660).

Выделяются два условия, которые накладываются на функцию f: а) $f(G^\varphi)=(f(G))^\varphi$ для любой группы G и любого ее изоморфного отображения φ; б) $f(G^\omega)=(f(G))^\omega$ для любой группы G и любого ее гомоморфного отображения ω.

Если выполняется условие а), то $f(G)$ характеристична в G, а из условия б) следует, что $f(G)$ вполне характеристична в G.

Пусть B — некоторая система слов $v(x,y,\ldots)$, $w(x,y,\ldots)\ldots$

Через $B(G)$ обозначается вербальная подгруппа группы G, соответствующая системе B, т. е. подгруппа, порожденная всеми значениями слов системы B в G. При этом все значения слова $v(x,y,\ldots)$ в G получаются, если вместо переменных вставлять всевозможные элементы из G.

Доказано, что если f удовлетворяет условию б), то существует такая система слов B (зависящая только от f), что $f(G)=B(G)$, причем отображения вида $B(G)$ всегда удовлетворяют условию б). Из этой теоремы следует, что если f удовлетворяют условию б), то эта функция монотонна, т. е. если $H\subset G$, то $f(H)\subset f(G)$.

Исходя из заданной системы слов B, автор рассматривает возрастающие вербальные B-ряды и обобщает результаты предыдущей работы. Так, например, доказано, что если для некоторого i G_i/G_0—конечная не абелева группа или имеет конечное число образующих, не абелева и разрешима, то соответствующий возрастающий B-ряд обрывается.

Рассматривается также отображение $\Phi(G)\subset G$, где $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини. Это отображение удовлетворяет условию а) и не удовлетворяет условию б).

Доказано, что если $G_0\subset G_1\subset\ldots$ — возрастающий Φ-ряд и некоторый его член G_i содержит характеристическую подгруппу N с конечной неабелевой фактор-группой G_i/N, то этот ряд обрывается.

В работе отмечаются некоторые нерешенные вопросы. Б. И. Плоткин

144. О группах, факторизуемых двумя циклическими 2-группами. I. (Случай циклического коммутанта). II. (Случай нециклического коммутанта). Ито, Охара (Sur les groupes factorisables par deux 2-groupes cycliques. I. (Cas où leur groupe des commutateurs est cyclyque). II. (Cas où leur groupe des commutateurs n'est pas cyclique). Itô Noboru, Ôhara Akiko), Proc Japan. Acad., 1956, **32**, № 10, 736—740; 741—743

Пусть группа G факторизуема циклическими 2-группами $A=\{a\}$ и $B=\{b\}$. Если коммутант G' — циклическая группа и содержится в большей циклической подгруппе, то вся группа является циклическим расширением некоторой циклической подгруппы. Если коммутант G' — циклическая группа и не содержится в большей циклической подгруппе, то G/G' есть группа типа $(2^r, 2)$.

Если G' не циклическая, то G' является произведением циклической подгруппы, порождаемой коммутатором $[a, b]$, и некоторой циклической инвариантной в G подгруппы из A и B. В этом случае G/G' — группа типа $(2^r, 2)$. Б. И. Плоткин

145. Структурные инварианты и полуинварианты в нецентросимметричных пространственных группах. Хауптман, Карл (Structure invariants and semivariants for non-centrosymmetric space groups. Hauptman H., Karle J.), Acta Cryst. allogr., 1956, **9**, № 1, 44—56 (англ.)

См. РЖФиз, 1957, 25246.

146. Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности. Вагнер В. В., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 81—88

Каждой полугруппе частичных преобразований Г некоторого множества сопоставляется определенным образом такая полугруппа $\widetilde{\Gamma}$ частичных преобразований того же множества, обладающих симметричным отношением транзитивности, что существует гомоморфизм полугруппы Г на $\widetilde{\Gamma}$. Полугруппа $\widetilde{\Gamma}$ называется симметрантом полугруппы Г.

Доказывается, что симметрант канонического представления (т. е. представления правыми сдвигами) обобщенной группы (РЖМат, 1953, 1089) совпадает с ее представлением с помощью приведенных правых сдвигов. Понятие приведенного правого сдвига переносится с обобщенных групп в класс всех полугрупп.

Рассматриваются инварианты в смысле Риге (Riguet J., Bull. Soc. Math. France, 1948, **76**, 114—155) бинарной алгебраической операции полугруппы. Е. С. Ляпин

147. Теорема о строении системы подстановок. Оганесян В., Гитакан ашхатутюннери жоговацу. Айкаканпетакан ерака манкаваржакан институт, Сб. научн. тр. Арм. гос. заочн. пед. ин-та, 1956, № 3, вып. 2, 9—17

Рассматриваются взаимно однозначные частичные подстановки конечного множества. Некоторая их совокупность K называется слоем при соблюдении условий 1) все подстановки из K имеют одну и ту же длину k 2) если $x, \exists yK$, $xy=z$ и длина z равна k, то $z\in K$, 3) если

$x \in K$, то $x^{-1} \in K$. Рассматриваются некоторые свойства слоев. В том числе выводится необходимое и достаточное условие того, чтобы некоторая совокупность слоев, таких, что подстановки из разных слоев имеют разные длины, образовывала полугруппу. Е. С. Ляпин

148. **Система частичных подстановок и обобщенная теорема Кэли. Оганесян В. А.,** Гитакан ашхатутюнери жоговацу. Айкакан петакан ерака манкаваржакан институт, Сб. научн. тр. Арм. гос. заочн. пед. ин-та, 1956, № 3, вып. 2, 19—31

Рассматриваются совокупности взаимно однозначных частичных подстановок конечного множества M, содержащие вместе с каждой парой подстановок их произведение и для каждой из подстановок обратную к ней. Дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы произвольная полугруппа была изоморфна такой полугруппе частичных подстановок. Условие по существу совпадает с условиями, опубликованными ранее В. В. Вагнером (РЖМат, 1953, 1089) и Престоном (РЖМат, 1957, 169) для произвольного множества. Е. С. Ляпин

149 Д. **Исследования по теории квазигрупп и луп. Белоусов В. Д.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1957

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

150. **О наименьшем дискриминанте абелева поля. Уразбаев Б. М.,** КазССР Гылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР, Сер. матем. и механ., 1957, вып. 6 (10), 108—111 (рез. каз.)

Устанавливается асимптотическая оценка для наименьшего дискриминанта абсолютно абелевых полей алгебраических чисел степеней l^α (l — простое число). З. И. Боревич

151. **Алгоритм Евклида в некоторых полях алгебраических функций. Армитидж** (Euclid's algorithm in certain algebraic function fields. Armitage J. V.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 28, 498—509 (англ.)

Пусть Ω—конечное поле из p^m элементов. В конечном алгебраическом расширении K поля рациональных функций $\Omega(t)$ с метрикой $|f| = p^n$ (n—степень функции) имеет место алгоритм Евклида, если для каждого нецелого элемента α из K существует целое $\xi \in K$ такое, что $|N(\xi - \alpha)| < 1$. Рассматривается вопрос о существовании алгоритма Евклида в квадратичных расширениях. Отметив, что в случае мнимых полей ответ получается просто, автор доказывает затем, что вещественное квадратичное поле над $\Omega(t)$ с дискриминантом D является евклидовым в том и только в том случае, если $|D| = p^2$. В смысле изоморфизма $t \to rt + s, s \in \Omega, r \neq 0$, существуют только два типа вещественных квадратичных полей с алгоритмом Евклида. Рассмотрены также кубические поля, порожденные уравнениями, один корень которых лежит в $\Omega\{t\}$ (замыкание поля $\Omega(t)$). В методе исследования имеется большая аналогия с числовыми полями. А. И. Кострикин

152. **О теории полей классов для бесконечного расширения $\mathfrak{p}$-адического числового поля. Мори** (Über die Klassenkörpertheorie für unendliche Erweiterungen von einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper. Mori Mitsuya), Proc. Japan Acad., 1957, 33, № 7, 376—379 (нем.)

Пусть k_0 — $\mathfrak{p}$-адическое числовое поле, а k — бесконечное алгебраическое расширение поля k_0. Мория (Moriya M., J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., 1936—1937, ser. 1, 5, 9—66) рассмотрел связь между конечными абелевыми расширениями K поля k и подгруппами мультипликативной группы поля k в предположении, что степени $[K : k]$ не делятся на некоторое множество простых чисел, которое однозначно определяется заданием поля k_0.

В реферируемой заметке локальная теория полей классов строится без этих ограничений. Пусть $\mathfrak{p}^*$ — такой простой идеал поля k, что $\mathfrak{p}^* = \lim \mathfrak{p}_n$, $k = \lim k_n$, где k_n — $\mathfrak{p}_n$-адическое числовое поле. Мультипликативная группа k_n^* поля k_n локально компактна.

В k_n^* можно ввести новую топологию, если принять за фундаментальную систему окрестностей единицы множество всех (замкнутых) подгрупп конечного индекса в k_n. Тогда пополнение $\hat{k}_n$ группы k_n^* относительно этой топологии будет компактной топологической группой. (Такой процесс пополнения описан Артиным (Artin E., Algebraic functions and algebraic numbers. I. New York University, 1951)).

Пусть $\hat{N}_{\nu,\mu}$ — гомоморфизм группы $\hat{k}_\nu$ в группу $\hat{k}_\mu$, полученный посредством нормы $N_{k_\nu | k_\mu}$. Обратный проективный предел $\varprojlim \hat{k}_n = F(k)$, образованный с помощью гомоморфизмов $\hat{N}_{\nu,\mu}$, называется фундаментальной группой поля k.

Вводится обобщение классического символа норменного вычета и устанавливается взаимно однозначное соответствие между замкнутыми подгруппами группы $F(k)$ и абелевыми расширениями поля k (не обязательно конечными). С. Д. Берман

153. **О единицах полей алгебраических чисел. Кубота** (A note on units of algebraic number fields. Kubota Tomio), Nagoya Math. J., 1955, 9, oct., 115—118 (англ.)

Доказывается одна теорема о единицах полей алгебраических чисел, следствием которой является следующий результат:

Если число классов конечного поля алгебраических чисел k и порядок группы корней из 1 этого поля одновременно не делятся на простое число l, то для каждой подгруппы H группы единиц E_k поля k, такой, что H содержит l-е степени всех элементов E_k, существует бесконечно много циклических расширений K/k, удовлетворяющих условиям: 1) $N_{K|k} E_K = H$ (E_K — группа единиц поля K); 2) каждый идеал I поля k, порождающий главный идеал поля K, является главным и в поле k. С. Д. Берман

154. **О группе единиц поля алгебраических чисел. Ивасава** (A note on the group of units of an algebraic number field. Iwasawa Kenkichi), J. math. pures et appl., 1956, 35, № 2, 189—192 (англ.)

Пусть K — конечное нормальное расширение конечного поля алгебраических чисел k; G — группа Галуа поля K над k; E — группа единиц поля K. Изучается n-мерная группа когомологий $H^n(G, E)$ группы G над группой E. В частности, доказывается, что группа $H^1(G, E)$ изоморфна фактор-группе группы главных идеалов поля K, выдерживающих все автоморфизмы из группы G, по подгруппе главных идеалов поля k, а группа $H^2(G, E)$ изоморфна фактор-группе группы классов идеалов, выдерживающих группу G, по подгруппе классов идеалов, соответствующих идеалам поля k. С. Д. Берман

155. **Группы единиц циклических расширений. Кубота** (Unit groups of cyclic extensions. Kubota Tomio), Nagoya Math. J., 1957, 12, 221—229 (англ.)

Пусть Ω — конечное расширение поля рациональных чисел, K — циклическое расширение степени l^ν поля Ω, где l — простое; e — группа единиц поля Ω, e_K — группа единиц поля K, G — группа Галуа поля K над Ω. Группа $N_{K|\Omega} e_K$ содержит группу e^{l^ν}, состоящую из всех l^ν-х степеней элементов группы e.

Автор доказывает обратное утверждение для одного частного случая: Если l — нечетное простое число, взаимно простое с абсолютным дискриминантом $D(\Omega)$, то для каждой подгруппы H группы e, содержащей группу e^{l^ν}, существует бесконечно много таких циклических расширений K/Ω степени l^ν, что $N_{K|\Omega} e_k = H$, и

при этом одномерная группа когомологий $H^1(G, e_K)$ группы G над группой e_K изоморфна прямому произведению группы $H^0(G, e_K)$ на циклическую группу порядка l^ν. С. Д. Берман

156. **О расширении Куммера. Мори** (Über Kummersche Erweiterungen. Mori Mitsuya), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 7, 372—375 (нем.)

Расширения Куммера поля K изучаются с помощью подгрупп группы характеров, которая строится с использованием мультипликативной группы K^* этого поля. Для характеров определяется символ норменного вычета. Рассмотрены примеры. С. Д. Берман

157. **Теория когомологий для ненормальных делителей и ненормальных полей. Адамсон** (Cohomology theory for non-normal subgroups and non-normal fields. Adamson Iain T.), Proc. Glasgow. Math. Assoc., 1954, **2**, № 2, 66—76 (англ.)

Пусть G — группа, F — произвольная ее подгруппа конечного индекса (не обязательно нормальный делитель) и A — некоторый G-модуль. Дается определение относительных групп когомологий $H^n([G:F], A)(-\infty<n<\infty)$ группы G относительно подгруппы F. В случае, когда F — единичная подгруппа, эти группы совпадают с обычными группами когомологий, а если F — нормальный делитель, то они изоморфны группам $H^n(G/F, A^F)$, где A^F — подмодуль F-инвариантных элементов модуля A. При условии, что $H^1(U, A') = 0$ для всех подгрупп $U \subset F$, с точной последовательностью G-модулей $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ связывается (бесконечная в обе стороны) точная когомологическая последовательность рассматриваемых групп когомологий. Доказано, что если для всех подгрупп $U \subset F$ при $\nu = 1, \ldots, n-1$ имеем $H^\nu(U, A) = 0$, то имеет место точная последовательность $0 \to H^n([G:F], A) \to H^n(G, A) \to H^n(F, A)$ (относительно естественных гомоморфизмов).

Далее автор определяет группы когомологий, связанные с ненормальными расширениями полей. Ряд известных результатов о группах когомологий для нормальных расширений полей (в том числе некоторые теоремы из теории полей классов) переносятся на случай ненормальных расширений. З. И. Боревич

158. **Связь между модулем дифференцирований и 2-й группой когомологий. II. Мория** (Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe. II. Moriya Mikao), Math. J. Okayama Univ., 1956, **6**, № 1, 49—69 (нем.)

Ч. I см. РЖМат, 1957, 2940.

Пусть $\mathfrak{o}$ и $\mathfrak{O}$ — кольца целых элементов в дискретно нормированном поле k и в его конечном сепарабельном алгебраическом расширении K соответственно, R_m — фактор-кольцо $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m$, где $\mathfrak{P}$ — нетривиальный простой идеал в $\mathfrak{O}$.

Доказывается $\mathfrak{O}$-изоморфизм относительных групп когомологий $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, R_m)$ и $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, R_m)$ кольца $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ над R_m для всех натуральных чисел m. Ранее (РЖМат, 1957, 2940) этот результат был установлен автором лишь для достаточно больших m. В ходе доказательства основной теоремы найдены некоторые структурные свойства $\mathfrak{O}$-модулей H^1 и H^2. А. И. Кострикин

159. **Нулевые целые однородные симметрически функции в некоторых кольцах. Уивер** (Zero integral homogeneous symmetric functions in certain rings. Weaver Milo), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 6, 387—391 (англ.)

Рассматриваются целые однородные симметрические функции степени n над конечным коммутативным кольцом R с единицей. Доказывается одно общее утверждение, содержащее в себе в качестве частных случаев теорему Гензеля (когда R — кольцо классов вычетов по простому модулю) и аналог теоремы Вольстенхольма. А. И. Кострикин

160. **О целозамыкании области целостности. Мори** (On the integral closure of an integral domain. Mori Yoshiro), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1953, **A27**, № 3, 249—256 (англ.)

Доказывается гипотеза Крулля о том, что целозамыкание $\bar{\mathfrak{R}}$ нетеровой области целостности $\mathfrak{R}$ в ее поле частных является конечным дискретным главным порядком (Krull, Idealtheorie, Springer, Berlin, 1935), и приводятся достаточные условия, при которых для аналитически неразветвляемой нетеровой локальной области целостности $\mathfrak{R}$ и ее целозамыкания $\bar{\mathfrak{R}}$ в поле частных K выполняется соотношение $\mathfrak{R}:\bar{\mathfrak{R}} \neq (0)$. Е. Г. Шульгейфер

161. **О структуре полных локальных колец. Нарита** (On the structure of complete local rings. Narita Masao), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, Suppl. dec., 435—443 (англ.)

Приводятся новые доказательства основных теорем работы Нагата (Nagata M., J. Nagoya Math., 1950, **1**, 63—70). Е. Г. Шульгейфер

162. **К теории гензелевых колец. II. Нагата** (On the theory of Henselian rings. II. Nagata Masayoshi), Nagoya Math. J., 1954, **7**, June, 1—19 (англ.)

Автор продолжает недавно начатое им изучение гензелевых колец, т. е. квазилокальных колец $\mathfrak{o}$, обладающих тем свойством, что из разложения многочлена в произведение простых многочленов по модулю максимального простого идеала $\mathfrak{p}$ следует подобное же разложение в самом кольце $\mathfrak{o}$ (РЖМат, 1954, 3257). Среди других результатов автор показывает, что в гензелизации $\mathfrak{o}^*$ целозамкнутой квазилокальной области целостности $\mathfrak{o}$ идеал $\mathfrak{p}\,\mathfrak{o}^*$ является простым, если фактор-кольцо $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ целозамкнуто; в общем же случае идеал $\mathfrak{p}\mathfrak{o}^*$ является пересечением простых идеалов. Доказательства опираются на соответствующие приложения гильбертовой теории полей разложений; например, собственные расширения кольца задаются с помощью многочленов вида $x^r + d\,x^{r-1} + \ldots + d_r$, у которых $d_r \in \mathfrak{p}$ и $d_{r-1} \notin \mathfrak{p}$. Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, №8, 788. O. F. G. Schilling

163. **Модули конечного ранга над прюферовыми кольцами. Флейшер** (Modules of finite rank over Prüfer rings. Fleischer Isidore), Ann. Math., 1957, **65**, № 2, 250—254 (англ.)

Рассматриваются унитарные модули над областями целостности с единицей, являющимися кольцами Прюфера (т. е. кольцами, в которых всякий идеал с конечным числом образующих обратим). Модуль M называется линейно компактным, если всякая система смежных классов модуля M по некоторым его подмодулям, в которой любая конечная подсистема имеет непустое пересечение, сама имеет непустое пересечение. Модуль M называется линейно прекомпактным, если всякий его истинный фактор-модуль линейно компактен. Рангом произвольного модуля M называется наименьший из рангов модулей без кручения, которые могут быть гомоморфно отображены на M. Доказывается, что над любым прюферовым кольцом расширение линейно компактного модуля с помощью модуля без кручения расщепляемо. Модуль M называется инъективным, если для любых модулей $A \subseteq B$ всякое гомоморфное отображение A в M может быть продолжено до гомоморфного отображения B в M. Доказывается, что над прюферовым кольцом с линейно прекомпактным полем отношений всякий модуль с делением конечного ранга инъективен и является прямой суммой модулей ранга 1. Над прюферовым кольцом с линейно компактным полем отношений во всяком модуле без кручения каждый сервантный подмодуль конечного ранга является прямым слагаемым. Над линейно компактным кольцом нормирований всякий модуль с конечным числом образующих разлагается в прямую сумму циклических модулей, а в произвольном модуле всякий

сервантный линейно компактный подмодуль является прямым слагаемым. Над линейно прекомпактным кольцом нормирований всякий подмодуль модуля с конечным числом образующих равен прямой сумме модулей ранга 1. А. П. Мишина

164. Дифференцирования в первичных кольцах. Познер (Derivations in prime rings. Posner Edward C.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1093—1100 (англ.)

Ассоциативное кольцо R называется первичным, если из равенства $xRy=0$ следует, что $x=0$ или $y=0$. Доказывается, что если d_1 и d_2 — два таких дифференцирования в первичном кольце характеристики, отличной от 2, что d_1d_2 есть тоже дифференцирование, то или $d_1=0$, или $d_2=0$. Если же R — первичное кольцо (любой характеристики), а d — такое дифференцирование в R, что при любом $a\in R$, $ad(a)-d(a)a$ принадлежит центру кольца R, то или $d=0$, или кольцо R коммутативно.

А. Сулиньский

165. К теореме Джекобсона. Томинага (On a theorem of N. Jacobson. Tominaga Hisao), Proc. Japan Acad., 1955, 31, № 10, 653—654 (англ.)

Основной результат работы Джекобсона (РЖМат, 1956, 6436) обобщается на простые кольца с условием минимальности. Простое кольцо R называется кольцом Галуа простого кольца R^1, содержащегося в R и имеющего с R одну и ту же единицу, если: 1) кольцо R^1 является подкольцом инвариантных элементов кольца R относительно некоторой группы $\mathfrak{G}$ автоморфизмов кольца R; 2) подгруппа $\mathfrak{Z}$ группы $\mathfrak{G}$, состоящая из внутренних автоморфизмов кольца R, имеет конечный индекс; 3) централизатор $V(R^1)$ кольца R^1 в кольце R является простым кольцом, имеющим конечную размерность над центром Z кольца R. Доказывается, что если простое кольцо R имеет левый ранг два над своим простым подкольцом R^1 и кольцо R^1 имеет конечный ранг над своим центром Z^1, характеристика которого отлична от двух, то кольцо R есть кольцо Галуа кольца R^1. Из доказательства вытекает, что при выполнении условий теоремы, если кольцо R^1 не содержит центра Z кольца R, то кольцо R представляет собой прямое произведение над Z^1 кольца R^1 и некоторого квадратичного расширения поля Z^1.

Е. Г. Шульгейфер

166. Исследования по теории седенионов I, II. Такэно (Contributions to the theory of sedenions. I, II. Takeno Hyoitiro), Tensor, 1957, 7, № 3, 143—159; 160—172 (англ.)

Детально изучаются свойства «седениона», т. е. алгебры комплексных матриц четвертого порядка, образующими которой служат 5 матриц Дирака γ_α, 10 матриц $\gamma_{\alpha\beta}=\gamma_\alpha\gamma_\beta-\gamma_\beta\gamma_\alpha$ и единичная матрица I. Все теоремы формулируются в терминах коэффициентов разложения по этому базису и доказываются непосредственной проверкой. В статье нет принципиально новых результатов, однако в ней выведено около 70 различных формул, и поэтому ею можно пользоваться как справочной статьей. Для пояснения характера работы приведем названия последних параграфов:

§16. Решения уравнений $S\gamma_l=\eta_l\gamma_{i5}S$ и $S\gamma_l=\eta_l S\gamma_{i5}$ (η_l — комплексное число);

§ 17. Решения уравнения $S^2=0$,

§ 18. Решения уравнения $S^2=\alpha I$,

§ 20. Решения уравнения $S^2=\alpha\gamma_5$ и $S^2=\gamma_5$.

Судя по замечанию в конце работы, должно последовать ее продолжение. Э. Э. Шноль

167. Радикал и полупростота прямого произведения алгебр. Иван (Radikál a polojednoduchost direktného súčinu algebier. Ivan Ján), Mat.-fyz. časop., 1957, 7, № 3, 158—167 (словацк.; рез. русск. англ.)

Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ — алгебры конечного ранга над полем без характеристики, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ — их радикалы. Используя теорему о следах нильпотентных элементов алгебры (Чеботарев Н. Г., Введение в теорию алгебр, М., 1949 теорема 5 и 7) и свойства следов элементов алгебры $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ в регулярном представлении, автор доказывает некоторые теоремы, из которых основной является следующая: Радикалом алгебры $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ является сумма $\mathfrak{N}=(\mathfrak{N}_1\times\mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_1\times\mathfrak{N}_2)$; при этом $\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2/\mathfrak{N}\cong\mathfrak{A}_1/\mathfrak{N}_1\times\mathfrak{A}_2/\mathfrak{N}_2$. V. Vilhelm

168. Об одном классе некоммутативных алгебр с ассоциативными степенями. Эмке (A class of noncommutative powerassociative algebras. Oehmke Robert H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 226—236 (англ.)

Пусть G — алгебра над полем F характеристики $\neq 2$, S — подпространство пространства G, замкнутое относительно J-умножения $x\bigcirc y=\frac{1}{2}(xy+yx)$, U — подпространство пространства G, составленное из всех элементов вида $xy-yx$, σ — линейное отображение U в S. Подпространство S превращается в алгебру $B(G,S,\sigma)$ заданием умножения

$$x\cdot y=\tfrac{1}{2}(xy+yx)+(xy-yx)\sigma.$$

Доказывается, что всякая алгебра A, удовлетворяющая соотношению $x(xx)=(xx)x$ и превращающая после введения J-умножения в сепарабельную J-алгебру (т. е. разлагающуюся в прямую сумму простых алгебр, центр которых сепарабелен над основным полем), изоморфна некоторой алгебре $B(G,S,\sigma)$. При этом в качестве G может быть взята прямая сумма полупростых ассоциативных алгебр и матричных алгебр третьего порядка над алгеброй Кэли-Диксона. Л. А. Скорняков

169. Дополнение к статье о частично устойчивых алгебрах. Альберт (Addendum to the paper on partially stable algebras. Albert A. A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 1, 57—62 (англ.)

Исправляется ошибочное доказательство, данное автором в предыдущей работе (РЖМат, 1958, 5562).

Л. А. Скорняков

170. Представления алгебр Ли простой характеристики. Цассенхаус (The representations of Lie algebras of prime characteristic. Zassenhaus Hans), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1954, 2, № 1, 1—36 (англ.)

Ставится общая задача описания представлений произвольной алгебры Ли L конечного ранга n над полем F характеристики $p>0$. С этой целью рассматривается ставшее теперь уже обычным в такого рода исследованиях вложение L в ее обертывающую алгебру $A(L)$. Доказано, что $A(L)$ является максимальным порядком алгебры с делением размерности p^{2m} над полем отношений центра $\mathfrak{Z}$ в $A(L)$; $\mathfrak{Z}$ — нормальное алгебраическое многообразие размерности n над F.

Используя далее язык и методы алгебраической геометрии, автор показывает, что специализациям $\mathfrak{Z}$ на примарные кольца над F соответствуют неразложимые представления алгебры L. За исключением некоторого подмногообразия, соответствие между классами эквивалентных абсолютно неприводимых представлений и специализациями $\mathfrak{Z}$ на F является взаимно однозначным; степени абсолютно неприводимых представлений не превосходят p^m. Выяснена в некоторой мере природа неприводимых компонент любого неразложимого представления, которое не вполне приводимо. Установлено существование таких представлений произвольно высокой степени. Общие методы частично конкретизируются на примере нильпотентных алгебр Ли и алгебры Витта. Результаты автора значительно пересекаются с результатами, полученными в разное время и различными способами, в том числе—другими авторами. А. И. Кострикин

171. Неассоциативные свободные суммы алгебр с объединенной подалгеброй. Дидидзе Ц. Е., Матем. сб., 1957, 43, № 3, 379—396

Дается более полное изложение результатов, приведенных в другой статье автора (РЖМат, 1957, 8485).

Кроме того, исследуются алгебры, порожденные амальгамами алгебр.

Л. А. Скорняков

172. Дополнительное замечание о свободных алгебраических системах. Фудзивара (Supplementary note on free algebraic systems. Fujiwara Tsuyoshi), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 10, 633—635 (англ.)

Показана равнозначность понятий свободной алгебраической системы в смысле Шода (Shoda K., Osaka Math. J., 1949, **I**) и в смысле Биркгофа (Биркгоф, Теория структур, 1952, М., Изд-во ин. лит.). Указаны необходимые и достаточные условия существования свободных алгебраических систем в смысле Биркгофа.

Ю. И. Соркин

173. Производные операции и конгруэнтности. Терстон (Derived operations and congruences. Thurston H. A.), Proc. London Math. Soc., 1958, **8**, № 29, 127—134 (англ.)

Основные понятия и теоремы даны А. И. Мальцевым (РЖМат, 1957, 209). Автор доказывает еще несколько теорем. Отметим следующие: Если каждая алгебра некоторого примитивного класса имеет производную алгебру, трансляции которой транзитивны, то трансляции любой алгебры этого примитивного класса также транзитивны (у А. И. Мальцева алгебраическая система означает алгебру). Трансляции любой алгебры нормального примитивного класса тринзитивны (примитивный класс называется нормальным, если любая алгебра этого класса нормальна, т. е. любые две конгруэнтности коммутируют на этой алгебре). Примитивный класс правилен, если тождественная конгруэнтность правильна на любой алгебре этого класса (правильный примитивный класс определяется, как и нормальный примитивный класс).

Далее рассматриваются восемь свойств некоторой алгебры (правильность, нормальность, существование квазигрупповых операций и т. д.) и свойства типа X^*, которые означают, что существует производная алгебра, обладающая свойством X (из рассматриваемых восьми свойств). Устанавливается ряд импликаций, доказанных А. И. Мальцевым и автором, и с их помощью строится диаграмма импликаций между рассматриваемыми восьмью свойствами и свойствами типа X^*.

Рассматриваются ещё семь примитивных классов алгебр (битернарных, бикватернарных, структур, квазигрупп и др.) и на построенной диаграмме наносятся пунктирные линии, которые позволяют сразу определить, какие из семи примитивных классов какими из восьми свойств и свойств типа X^* обладают.

В заключение автор указывает, что следующие две импликации еще не доказаны: 1) если некоторый примитивный класс правилен, то он нормален, 2) если некоторый примитивный класс правилен, то любая алгебра этого класса обладает производной бикватернарной алгеброй.

В. Д. Белоусов

174. Квазипримитивные классы абстрактных алгебр. Мальцев А. И., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 2, 187—189

Изучаются классы алгебр (РЖМат, 1956, 3597). Класс алгебр называется квазипримитивным, если он является классом моделей так называемых тождеств:

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_m)[\varphi_1(x_1,\dots,x_m) = \psi_1(x_1,\dots,x_m) \,\&\, \dots \,\&\, \varphi_n(x_1,\dots,x_m) = \psi_n(x_1,\dots,x_m) \to \varphi_{n+1}(x_1,\dots,x_m) = \psi_{n+1}(x_1,\dots,x_m)$$

(φ_i, ψ_j — суперпозиции основных операций). Доказываются два критерия квазипримитивности. Изучаются квазипримитивные классы частичных алгебр (алгебр с не всюду определёнными операциями).

Рассматриваются условия вложения алгебр вида $\langle A, f_1, \dots, f_n\rangle$ в алгебры вида $\langle A_1 f_1, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+m}\rangle$.

Дан критерий свободы класса алгебр.

Ю. А. Шиханович

175. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы структура идеалов некоторого кольца обладала дополнениями. Саи (Sai Kinnosuke), Кобэ сёсэн дайгаку киё Дайнируй, Rev. Kobe Univ. Mercant. Marine. 1957, № 4, 133—134 (японск.; рез. англ.)

Показывается, что структура двусторонних идеалов кольца с единицей обладает дополнениями тогда и только тогда, когда каждый идеал порождается единственным идемпотентом, коммутирующим со всеми элементами этого идеала. Если структура идеалов коммутативного кольца с единицей обладает дополнениями, то она оказывается булевой алгеброй.

Л. А. Скорняков

176. О проблеме Стона. Гретцер, Шмидт (On a problem of M. H. Stone. Grätzer G., Schmidt E. T), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, **8**, № 3-4, 455—460 (англ.)

Решается 70-я проблема Биркгофа (Теория структур, М., Из-во ин. лит., 1952). Доказывается, что каждое из следующих условий необходимо и достаточно для того, чтобы в дистрибутивной структуре L с псевдодополнениями и с единицей для любого $a \in L$ выполнялось (в обозначениях Биркгофа) соотношение $a^* \cup a^{**} = 1$: а) сумма любых двух различных минимальных идеалов совпадает с L; б) для каждого $a \in L$ структура L допускает прямое разложение $L = I + K$, где $I = \{x; x \cap a = 0\}$. Отыскиваются также условия, необходимые и достаточные для того, чтобы свойствами а) и б) обладал любой замкнутый интервал структуры L.

Л. А. Скорняков

177. Характеристика модулярных структур посредством систем независимых аксиом. Вайда (Caracterizarea structurilor modulare prin sisteme cu axiome independente. Vaida Dragos), Studii şi cercetari mat. Acad. RPR, 1957, **8**, № 3-4, 457—466 (рум.; рез. русск., франц.)

Показано, что модулярная структура может быть задана или двумя аксиомами: $I_1. x \cap [(x \cup y) \cup z] = x$ и I_2. Если $x \leqslant z$, то $z \cap (y \cup x) = x \cup (y \cap z)$; или же четырьмя аксиомами: II_1. Если $x \leqslant y$, то $zx \leqslant zy$ и $z + x \leqslant z + y$; II_2. $xy \leqslant x \leqslant x + y$; II_3. $x^2 = x$; II_4. Если $xz = x$, то $x + yz = z(y + x)$. Показана независимость каждой аксиомы в обеих вышеприведенных аксиоматиках.

Ю. И. Соркин

178. О структуре идеалов коммутативного кольца главных идеалов. Саи (Sai Kinnosuke), Кобэ сёсэн дайгаку киё Дайнируй, Rev. Kobe Univ. Mercant. Marine. 1957, № 4, 129—131 (японск.; рез. англ.)

Доказывается, что указанная в заголовке структура дистрибутивна. Показывается также, что в недистрибутивной структуре идеалов коммутативного кольца без делителей нуля всегда найдутся такие бесконечные последовательности идеалов $\{I_n\}, \{J_n\}, \{K_n\}$, что $(I_n + J_n)K_n \neq I_n K_n + J_n K_n$ для каждого n.

Л. А. Скорняков

179. Структуры. Вредендёйн (Tralies. Vredenduin P. G. J.), Euclides (Neder), 1958, **33**, № 5, 129—152 (гол.)

См. также: 77—82, 92, 162, 402, 411, 603, 783, 789, 794, 875—881, 883—885

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

180. Коммутативные фундаментальные группы неориентируемых трехмерных многообразий. Ваккаро (Gruppi fondamentali commutativi di varietà tridimensionali non orientabili. Vaccaro Michelangelo), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 447—453 (итал.)

Рейдемейстер (Monatsh. Math. und Phys., 1936, **43**, 20—28) перечислил все абелевы группы, которые могут служить фундаментальными группами ориентируемых трехмерных многообразий. Пользуясь этим результатом Рейдемейстера, автор показывает, что только две абелевы группы (а именно, Z и $Z+Z_2$) могут быть фундаментальными группами неориентируемых трехмерных многообразий. А. С. Шварц

181. Об узлах простых и кратных I. Ватанабэ (Sur les noeuds et les anneaux. I. Watanabe Sigekatu), Дэнки цусин дайгаку гакухо. Рикогакухэн, Repts Univ. Electro-Communs, 1956, № 8, 1—30 (франц.; рез. японск.)

Даются некоторые элементарные приложения теории узлов (Reidemeister K., Knotentheorie, Berlin, 1932).

182. Об узлах простых и кратных. II. Ватанабэ (Sur les noeuds et les anneaux. II. Watanabe Sigekatu), Дэнки цусин дайгаку гакухо. Рикогакухэн, Repts Univ, Electro-Communs, 1957, № 9, 1—10 (франц.; рез. японск.)

Устанавливаются некоторые элементарные связи теории узлов и теории графов.

183. О графах узлов. Ядзима, Киносита (On the graphs of knots. Yajima Takeshi, Kinoshita Shinichi), Osaka Math. J., 1957, **9**, № 2, 156—163 (англ.)

Дается полное определение графа простого и кратного узла. Пусть имеется раскраска регулярной проекции узла. Прямой граф узла: множество $A_1 \ldots A_\alpha$ — белые области, объявляются вершинами и каждой двойной точке относится ребро, связывающее те A_i и A_j, которым данная точка принадлежит. Дуальный граф: $B_1 \ldots B_\beta$ —черные области вместе с бесконечной областью, объявляются вершинами и каждой дуге относится ребро, соединяющее те вершины, соответствующие области которых имеют данную дугу общей граничной. Для кратного узла небольшая модификация этого определения. Элементарным преобразованиям регулярной проекции узла соотносятся преобразования графов. Даются элементарные приложения. В. К. Белов

184. Об объединениях узлов. Киносита, Тэрасака (On unions of knots. Kinoshita Shin'ichi, Terasaka Hidetaka), Osaka Math. J., 1957, **9**, № 2, 131—153 (англ.)

Вводятся понятия объединения и косого объединения узлов, а именно: пусть (k) и (k') — графы узлов k и k' (реф. 180);приводим пару вершин A и A' к совпадению, а другую пару вершин B и B' соединяем n ребрами $e_1, e_2, \ldots, e_n$ одного знака. Узел, соответствующий полученному графу, называется объединением узлов k и k' с вращающим числом n, если n четно, и косым объединением с вращающим числом n, если n нечетно.

Доказано, что объединение двух нетривиальных узлов всегда есть нетривиальный узел, а при объединении или косом объединении симметрично расположенных графов полином Александера полученного узла не зависит от вращающего числа и равен квадрату полинома Александера.

В приложении доказано, что любой узел можно получить прямой суммой двух тривиальных узлов по некоторой дуге. А. П. Савин

Примечание редакции. В работе дается новый тип нетривиальных узлов с тривиальным полиномом Александера.

185. О матричном анализе связей в частично ориентированных графах. Поваров Г. Н., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 195—202

Множество A вместе с операциями $x+y$ и xy автор называет нумероидом, если операции ассоциативны и коммутативны, xy дистрибутивно относительно $x+y$ и в A существует единственный элемент 0 такой, что $0+x=x$, и единственный элемент 1 такой, что $1x=x$. Пусть $\|a_{ij}\|$ есть p^2-матрица над нумероидом и $\|a_{ij\nearrow kl}\|$ — матрица, полученная из нее вычеркиванием k-й строки и l-го столбца (нумерация рядов, т. е. строк и столбцов, не изменяется). Автор называет квазиминором $|a_{ij\nearrow lk}|_{kl}$, где $k \neq l$, сумму $\sum a_{ki_1} \; a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_r \, l}$, где суммирование производится по всем размещениям $i_1 i_2 \ldots i_r$ $(r = 0,1,\ldots,p-2)$ из номеров рядов матрицы $\|a_{ij\nearrow kk}\|$; если $k=l$, то $|a_{ij\nearrow lk}|_{kl} = a_{kk}$.

Теорема 1. Если $k \neq l$, то $|a_{ij\nearrow lk}|_{kl} = \sum_{m \neq k} a_{mk} A^{(l)}_{km}$, где $A^{(l)}_{km} = 1$ при $m=l$ и $A^{(l)}_{km} = |a_{ij\nearrow lk\nearrow km}|_{ml}$ при $m \neq l$.

В терминах квазиминоров даются формулы для числа путей, циклов, ориентированных циклов в частично ориентированном графе, а также условие связности графа и условие разложимости матрицы над нумероидом; квазиминоры применяются также для описания проводимостей контактно-вентильных схем. Эти результаты содержатся в теоремах 2—9. В качестве иллюстрации разбирается одна из задач о переливаниях. О. Б. Лупанов

186. О конечных ориентированных графах. Седлачек (O konečných orientovaných grafech. Sedláček Jiří). Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 2, 195—215 (чешск.; рез. русск., нем.)

В первой части работы приведены определения основных понятий (König D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936). Во второй части изучаются базисы ребер сети. Сеть с каждой парой вершин u, v содержит также и ребро $\overrightarrow{uv}$. Вершина $a \in B$ называется артикуляцией, если из нее выходят два ребра, которые не лежат одновременно в одной и той же окружности графа; несепарабельным называется такой граф, ни одна из вершин которого не является артикуляцией. Если B является базисом ребер сети, то число неразветвляющихся вершин (вершин 2-ой степени) $\nu(B) \geqslant 2$. Если B—несепарабельный базис с $2m+1$ вершиной, то $\nu(B) \geqslant 3$. Приведены все неразложимые несепарабельные базисы с n вершинами, для которых $\nu(B)=2$ или 3 для четного n, случай $\nu(B)=3$ для нечетного n. Пусть в случае несепарабельного базиса с n вершинами $\nu(B) \leqslant 3$ (для четного n) или 4 (для нечетного n); тогда B — плоский граф; существуют несепарабельные базисы B, для которых $\nu(B)=4$ или 5 и которые не являются плоскими. Следовательно, теорема Редеи (РЖМат, 1955, 2596), утверждающая, что каждый базис ребер сети является плоским, не верна.

Третья часть посвящена хорошо ориентированным графам. Каждый х. о. граф с h ребрами и u вершинами имеет по крайней мере $\mu = h-u+1$ циклов. Каждую квадратную матрицу A можно сопоставить с ориентированным графом G, элементы которого обозначены символами u_i, таким образом, что $\overrightarrow{u_i u_j} \in G \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0$; A неразложима тогда и только тогда, если

G — хорошо ориентированный граф. Четвертая часть посвящена ациклическим графам (которые не содержат никакого цикла). Ациклический граф имеет один-единственный базис ребер и вершин. Полным называется такой граф, в котором одновременно с вершинами u, v содержится в точности одно из ребер $\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{vu}$; полный граф содержит лишь один путь, проходящий через все вершины (так называемая ось) только в том случае, если он является циклическим. Это дополняет теорему Редея, по которой число осей в полном графе нечетно.

A. Švec

187. Об обобщении понятия компактности. I, II. Гал (On a generalized notion of compactness. I, II. Gál István S.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1957, **A60**, № 4, 421—430; 431—435; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 421—430; 431—435 (англ.)

С точки зрения покрытий исследуются пространства, компактные в данном полуинтервале (a, b) мощностей.

1. Автор называет пространство $R(a, b)$-компактным, если из всякого открытого покрытия мощности $\leqslant b$ можно выбрать подпокрытие мощности $\leqslant a$. Дается необходимое и достаточное условие с помощью a-центрированных систем замкнутых множеств. Замкнутые множества (a, b)-компактных пространств (a, b)-компактны. Если всякое открытое множество (a, b)-компактно, то всё пространство наследственно (a, b)-компактно (т. е. любое подмножество (a, b)-компактно). Если мощность системы (a, b)-компактных множеств Y_λ не больше чем a, то и сумма $\bigcup_\lambda Y_\lambda$ (a, b)-компактна. Если из каждой системы открытых множеств можно выбрать подсистему мощности $\leqslant a$ с той же суммой то все пространство наследственно (a, ∞)-компактно. Точка x пространства R называется a-предельной точкой для множества M, если для каждой окрестности $O(x)$ мощность пересечения $O(x) \cap M$ больше a. Множество M называется a-плотным, если для любой точки $x \in M$ и всякой ее окрестности $O(x)$ мощность $O(x) \cap M > a$. В (a, ∞)-компактном пространстве всякое множество мощности $> a$ имеет a-предельные точки.

Для того, чтобы пространство R было наследственно (a, b)-компактным, необходимо и достаточно каждое из следующих условий: 1) каждое множество M мощности m, $a < m \leqslant b$, содержит a-предельные точки; 2) каждое множество M мощности m, $a < m \leqslant b$, содержит a-плотное множество M'; 3) любая вполне упорядоченная последовательность различных открытых множеств имеет мощность или $> b$, или $\leqslant a$.

Тихоновское произведение бикомпактного пространства на (a, ∞)-компактное также (a, ∞)-компактно. Пример Зоргенфрея показывает, что произведение (a, ∞)-компактных пространств может быть не (a, ∞)-компактно.

2. Равномерной мощностью $u(R)$ равномерного пространства R автор называет наименьшее из кардинальных чисел, являющееся мощностью некоторой базы для данной равномерной структуры. Если пространство $(a, u(R))$-компактно, то оно и (a, ∞)-компактно. Если при некотором $a \geqslant u(R)$ в пространстве R каждое множество мощности $> a$ имеет предельную точку, то оно (a, ∞)-компактно. Если пространство R (a, ∞)-компактно для некоторого числа $a \geqslant u(R)$, то оно наследственно (a, ∞)-компактно.

Если в семействе $\{R_\lambda\}$ мощности $\leqslant a$ каждое конечное тихоновское произведение пространств R_λ наследственно (a, ∞)-компактно, то и произведение всех пространств R_λ наследственно (a, ∞)-компактно.

Доказательства полные. Не указана следующая литература, посвященная этому же вопросу: Alexandroff P., Urysohn A., Verh. Akad. Wetensch., 1929, **14**, 1—96; Смирнов Ю. М. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1950 **14**, № 2, 155—178; Укр. матем. ж., 1951, **3**, № 1).

Несмотря на небольшое различие в терминологии и некоторую ошибку в основной теореме, по существу все результаты, указанные в п. I, содержатся в цитированных работах референта.

Ю. М. Смирнов

188. Компактификация множества, отображенного на себя. Врис (Compactification of a set which is mapped onto itself. Vries H. de), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3. **5**, № 10, 943—945 LXXIX (англ.; рез. русск.)

Доказано, что если S — некоторое множество, то следующее утверждение эквивалентно гипотезе континуума: для любого взаимно однозначного отображения φ множества S на себя существует топология в S, в которой S является компактным метрическим пространством, а φ — гомеоморфизмом. При этом компакт S' можно считать лежащим на плоскости. Приводится пример, показывающий, что для некоторого гомеоморфизма φ компакт S' не может быть 0-мерным.

И. В. Проскуряков

189. О равномерной топологии функциональных пространств. II. Нагата (On uniform topology of functional spaces (II). Nagata Jun-iti), J. Inst. Polytechn. Osaka Univ., 1955, **A6**, № 2, 71—77 (англ.)

Аналогично предыдущей работе (РЖМат, 1957 1231) доказываются следующие три необходимые и достаточные условия для того, чтобы полные равномерные пространства X и Y были равномерно гомеоморфны:

1. Пространства $L(X)$ и $L(Y)$ всех ограниченных равномерных функций равномерно гомеоморфны в рассматриваемой здесь равномерной топологии и изоморфны как алгебраические структуры (с естественным частичным упорядочиванием).

2. Пространства $L'(X)$ и $L'(Y)$ всех равномерных функций, значения которых ограничены 0 и 1, равномерно гомеоморфны и изоморфны в данном выше смысле.

3. Пространства $C(X)$ и $C(Y)$ всех ограниченных равномерно непрерывных функций равномерно гомеоморфны в данном выше смысле и изоморфны как кольца.

Равномерная топология вводится иным, чем в предыдущей работе, образом: Рассматривается пространство $F(R)$ непрерывных функций, определенных на замкнутых множествах равномерного пространства R с равномерными окрестностями $U_\alpha(x)$. В $F(R)$ определяются равномерные окрестности $U_{\alpha\varepsilon}(f)$, $f \in F(R)$, $\varepsilon > 0$, как множества всех таких функций $g \in F(R)$, что для всех $x \in Df$ (Df — область определения функции f) существует такое $y \in U_\alpha(x)$, что $|f(x) - g(y)| < \varepsilon$ и, аналогично, для всех $x \in Dg$ существует такое $y \in U_\alpha(x)$, что $|f(y) - g(x)| < \varepsilon$. Пусть $Fu(R)$ — равномерное подпространство пространства $F(R)$, состоящее из всех равномерно непрерывных функций, а M — отображение пространства R в $F(Fu(R))$, ставящее в соответствие каждому $x \in R$ функцию $x(f) = f(x)$ при $x \in Df$. Отображение M равномерно гомеоморфно отображает R в $F(Fu(R))$, причем замыкание $[M(R)]$ полно.

Ю. М. Смирнов

190. О вложении метрического пространства в произведение одномерных пространств. Нагата (On imbedding a metric space in a product of one-dimensional spaces. Nagata Jun-iti), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 8, 445—449 (англ.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1958, 9658) автором было показано, что n-мерное метрическое пространство можно вложить в произведение $(n+1)$-го одномерного пространства. В реферируемой статье доказывается, что любое метрическое пространство может быть вложено в произведение счетного числа одномерных пространств.

И. А. Шведов

191. Накрытия с особенностями. Фокс (Covering spaces with singularities. Fox Ralph H.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 243—257 (англ.)

Излагаются основы общей топологической теории разветвленно накрывающих пространств.

Отображение g локально связного T_1-пространства Y в локально связное T_1-пространство Z называется простиранием, если g-прообразы открытых множеств пространства Z образуют базис пространства Y. Если такое отображение g существует, то говорят, что пространство Y распростерто (или простирается) над пространством Z. Простирание g называется полным, когда для любой точки $z \in Z$ выполнено следующее условие: если для каждой окрестности W точки z выбрана такая компонента V множества $g^{-1}(W)$, что $V_1 \subset V_2$, когда $W_1 \subset W_2$, то $\cap V$ не пусто. Простирание $g: Y \to Z$ называется пополнением простирания $f: X \to Z$, если g полно, X плотно и локально связано в Y, а $g|X = f$. Пополнение существует для любого простирания и определено однозначно (с точностью до некоторой само собой разумеющейся эквивалентности).

Примером простирания может служить отображение вложения $X \to Z$ некоторого связного, локально связного, локально компактного, сепарабельного, регулярного, но не компактного пространства X в его компактное замыкание Z, получающееся (по П. С. Александрову) присоединением одной точки. Пусть $Y \to Z$ — пополнение этого простирания. Оказывается, что Y является идеалом компактификации пространства X в смысле Фрейденталя (Freudenthal H., Math. Z., 1931. **33**, 692). Таким образом, понятие пополнения простирания устанавливает связь между компактификациями по Александрову и Фрейденталю.

Простиранием является, конечно, любое (неразветвленное) накрытие. Более общим классом простираний является класс разветвленных накрытий. Простирание $g: Y \to Z$ называется разветвленным накрытием, если 1) множество Z_0 точек пространства Z, в окрестности которых простирание g локально, является накрытием, связно, плотно и локально связно в Z; 2) множество $g^{-1}(Z_0)$ связно; 3) g служит пополнением простирания $g|g^{-1}(Z_0)$, являющегося в силу предыдущих условий неразветвленным накрытием. Автор показывает, что при некоторых естественных условиях любое пространство, разветвленно накрывающее полиэдр или многообразие, также является полиэдром или соответственно многообразием.

Первым вопросом, который встает при изучении разветвленных накрытий, является, конечно, вопрос о фундаментальной группе накрывающего пространства. Автор вычисляет эту группу для конечнолистных накрытий полиэдров.

В заключение автор рассматривает некоторые обобщения. М. М. Постников

192. Накрывающее пространство и простая связность пространства. Ли (Covering spaces and simple connectedness. Lee C. N.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 547—554 (англ.)

Для любого хаусдорфова пространства определяется обобщенное накрывающее пространство, с помощью которого вводится понятие слабой односвязности пространства. Последнее совпадает с классическим определением односвязности, если пространство связно и локально связно. Для новых понятий переносятся основные теоремы классической теории (теоремы о монодромии, о существовании универсального накрывающего пространства и др.) и понятие фундаментальной группы. Слабая односвязность пространства эквивалентна тривиальности фундаментальной группы. Построен пример слабо односвязного пространства, не являющегося локально связным. А. Д. Тайманов

193. О лебеговом свойстве равномерных пространств. Касахара (On the Lebesgue property in uniform spaces. Kasahara Shouro), Math. japon., 1955, **3**, № 3, 127—132 (англ.)

В равномерном T_1-пространстве R с равномерной структурой S покрытие $\{O_\alpha\}$ называется лебеговым, если в него можно вписать покрытие вида $\{V(x)\}$, $x \in R$, где $V \in S$ (согласно Бурбаки, $V \subset R \times R$. $\Delta = \{(x, x)\} \subseteq V$), другими словами, если покрытие $\{O_\alpha\}$ принадлежит равномерной структуре покрытий, соответствующей структуре S. Равномерное пространство обладает лебеговым (соответственно конечным лебеговым или счетным лебеговым) свойством, если каждое его открытое (соответственно конечное открытое или счетное открытое) покрытие — лебегово. В первом случае пространство R паракомпактно и полно. Во втором и только во втором оно нормально и каждая ограниченная непрерывная функция — равномерно непрерывна (достаточно чтобы бинарные покрытия уже были лебеговыми). В третьем случае пространство R счетно паракомпактно. Каждое из указанных свойств наследственно по замкнутым множествам. Если одно из них выполнено для всех открытых множеств, то оно выполнено и для любых множеств. Каждое множество пространства R имеет лебегово свойство тогда и только тогда, когда R дискретно в равномерном смысле. Если локально компактное метрическое пространство распадается в сумму компактного и дискретного множеств, то оно обладает лебеговым свойством. Обратное верно для любых метрических пространств. При произведении лебеговы свойства, вообще говоря, не сохраняются.

Ю. М. Смирнов

194. Об одной теореме Ф. Хаусдорфа. Виленкин Н. Я., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1957, **108**, 73—74

Дается простое доказательство следующей теоремы Хаусдорфа. Для того, чтобы метризуемое пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным в любой метризации. А. С. Шварц

195. О метрике, характеризующей размерность. Грот (On a metric that characterized dimension. Groot J. de), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 4, 511—514 (англ.)

Для пространств R со счетной базой доказывается следующим образом измененное необходимое и достаточное условие Нагата (РЖМат, 1958, 1079) для того, чтобы было $\dim R < n$: имеется такая вполне ограниченная метрика ρ, что среди любых $n+2$ точек $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ из R существуют такие точки x_i, x_j, x_k, $1 \leqslant i, j, k \leqslant n+1$, $i \neq j$, что $\rho(x_i, x_j) \leqslant \rho(x_0, x_k)$. Обычная метрика евклидовых пространств этому условию удовлетворяет, а условию Нагата — нет. Ставится вопрос: существенно ли здесь условие вполне ограниченности? Ю. М. Смирнов

196. Классификация точек декартова континуума. Капуано (Classification des points d'un continu cartésien. Kapuano Isaac), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 22, 1866—1868 (франц.)

Данная заметка является продолжением пяти других заметок автора (РЖМат 1957, 2130, 7746; 1958, 9709, 9710, 9711). Введены новые понятия: точка $p \in K$ называется концом K, если для любых двух подконтинуумов K_1 и $K_2 \subset K$, $p \in K_1 \cap K_2$, либо $K_1 \subset K_2$, либо $K_2 \subset K_1$, точка $p \in K$ называется заточенной (claustré), если она не является концом никакого подконтинуума K; точка p называется несцепленной, если не существует никакого сцепленного (caténal; см. первую из указанных выше заметок) подконтинуума K, содержащего p; точка p называется сильно недостижимой в K, если она недостижима в образе K при любом гомеоморфизме плоскости, содержащей K (K-плоский континуум). Точка $p \in K$ сильно недостижимая в любом подконтинууме K, называется абсолютно недостижимой в K (Доказано, что

не всякая сильно недостижимая точка является абсолютно недостижимой); наконец, точка $p \in K$ называется точкой возврата K, если существует такая окрестность v этой точки, что для любой содержащей эту точку связной компоненты из $K \cap v$ эта точка является концом.

Пользуясь введенными понятиями, автор доказывает ряд теорем, из которых отметим следующие. Существует сцепленный плоский континуум, все подконтинуумы которого содержат заточенные точки. Множество всех несцепленных точек любого плоского континуума является множеством типа $F\sigma$, не содержащим никакой простой дуги. Эта теорема не обобщается на континуумы более высокой размерности. Любая несцепленная точка плоского континуума либо является заточенной, либо принадлежит некоторому наследственно неразложимому континууму. Если K—плоский континуум, неприводимый между двумя своими точками, то $p \in K$ тогда и только тогда абсолютно недостижима в K, когда она либо заточенная, либо несцепленная точка K. Каждый континуум K, не содержащий простой дуги, либо содержит наследственно неразложимый подконтинуум, либо содержит заточенную точку. Не существует континуума, состоящего из одних несцепленных точек. Доказываются и другие теоремы, частично перекрывающиеся с результатами других авторов.

В. А. Зморович

197. Локально простые кривые и поверхности в трехмерном многообразии. Харролд (Locally tame curves and surfaces in three-dimensional manifolds. Harrold O. G., Jr), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **63**, № 5, 293—305 (англ.)

Обзорный доклад, сделанный на собрании Общества в Лексингтоне 1 декабря 1956 г. Библ. 31 название.

А. С. Пархоменко

198. Устойчивый стягиваемый двумерный полиэдр. Альбрехт (A stable contractible 2-dimensional polyhedron. Albrecht F.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, **5**, № 11, 1047—1049, LXXXVII (англ., рез. русск.)

Строится пример двумерного полиэдра, стягиваемого в точку и являющегося устойчивым в смысле Хопфа—Паннвица (Alexandroff P., Hopf H., Topologie. I, 1935, 286).

А. П. Савин

199. О понятии размерности. Картан (Sur la notion de dimension. Cartan Henri), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, **37**, № 187, 1—12 (франц.)

Приводятся различные определения размерности и формулируются (без доказательства) некоторые теоремы теории размерности.

А. С. Шварц

200. О непрерывных и дифференцируемых отображениях открытых множеств евклидова пространства. Роднянский А. М., Матем. сб., 1957, **42**, № 2, 179—196

Рассматриваются непрерывные отображения f открытого множества G n-мерного евклидова пространства E^n в E^n. Доказывается, что якобиан $I(x)$ дифференцируемого отображения f области G не может изменить знак, не обратившись в G в ноль. Отсюда получается локальная топологичность отображения f открытого множества G при условии, что якобиан $I(x) \neq 0$ в G. Без доказательства эти теоремы были опубликованы автором в 1950 г. (Докл. АН СССР, **72**, № 1, 15—17). Далее доказывается теорема о том, что отображение f, у которого степень отображения определена для всех точек $x \in G$ и не обращается в ноль, является открытым отображением. Как отмечается автором, эта теорема представляет из себя частный результат по сравнению с одной более общей ранее доказанной элементарной леммой референта (РЖМат., 1957, 8535) при дополнительном требовании постоянства знака степени отображения.

Примечание референта. В работе имеются неверные утверждения, как, например, в п. 1:9 (оно делается справедливым лишь при дополнительных ограничениях), иногда доказываются предложения уже ранее известные, например, п. I:2 (РЖМат, 1955, 149), имеются неточные ссылки, например, к. п. 2 : 12. Следует еще отметить близко примыкающую к рассматриваемому кругу вопросов работу Тайтуса и Юнг (Titus C. J., Young G. S., Michigan Math. J., 1951, **1**, № 1), в которой доказывается, что всякое ориентированное вполне разрывное отображение класса C^1 является внутренним.

Л. Д. Кудрявцев

201. Об отображениях произведения топологического пространства на евклидово в евклидово пространство. Роднянский А. М., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 4, 659—662

Пусть X — топологическое пространство, R^q_y и R^q_u— q-мерные евклидовы пространства, $Z = [X, R^q_y]$ — топологическое произведение X на R^q_y, G — открытое подмножество пространства Z, $G(x) = \{y : (x, y) \in G\}$, $x \in X$, $y \in R^q_y$, f — непрерывное отображение G в R^q_u f_x — отображение $G(x)$, определенное формулой $f_x(y) = f(x, y)$, $\gamma(G(x_0), f_{x_0}, u_0)$ — степень отображения f_{x_0} в точке y_0, где $u_0 = (x_0, y_0) \in Z$, π_x — проекция пространства Z на X.

Изучаются некоторые локальные свойства отображения f_x, связанные со степенью отображения; например, при некоторых ограничениях на G и отображение f доказывается теорема: Если $\overline{G}(x_0) \cap f^{-1}_{x_0}(u_0) \subseteq G(x_0)$ и $\gamma(G(x_0), f_{x_0}, u_0) \neq 0$, то для любой достаточно малой окрестности $U = U(u_0)$ существует окрестность

$$V = V\left[(x_0), \overline{G}(x_0) \cap f^{-1}_{x_0}(u_0)\right] \subseteq G$$

такая, что для всех $x \in \pi_x V$ имеет место

$$f_x(V(x)) = u, \overline{G}(x) \cap f^{-1}_x(u) = V$$

и для любой $u \in V$ определена степень

$$\gamma(V(x), f_{x_0}, u) = \gamma(G(x_0), f_{x_0}, u_0).$$

Более детально рассматривается случай, когда y_0 является изолированной точкой отображения f_{x_0} (причем предполагается, что степень отображений $\gamma(G(x_0), f_{x_0}, u_0) \neq 0$), а также случай, когда отображение f_x дифференцируемо в $G(x)$ для любого $x \in \pi_x G$, в частности, отмечается соответствующий аналог теоремы о неявных функциях.

Примечание референта. Эти результаты являются непринципиальным обобщением теоремы Лерэ-Шаудера о постоянстве степени при непрерывных изменениях в определенных пределах u, x, $v(x)$ (Докл. АН СССР, 1957, № 4, 536—559). Утверждение автора о том, что результаты являются существенно новыми, не соответствует действительности. В изложении имеются неточности, например, отображение f, определенное на G, в § 1 оказывается непрерывным на $\overline{G}$.

Л. Д. Кудрявцев

202. О замкнутых отображениях. Морита (On closed mappings. II. Morita Kiiti), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 325—327 (англ.)

Изучаются замкнутые (непрерывные!) отображения f семибикомпактных пространств, обладающие свойствами: а) полные прообразы $f^{-1}(y)$ точек связны и б) границы $|f^{-1}(y)|$ прообразов $f^{-1}(y)$ бикомпактны. Пространство R называется семибикомпактным, если у каждой точки есть сколь угодно малые окрестности с бикомпактной границей.

Теорема 1. Если f — квазибикомпактное отображение семибикомпактного пространства X на T_α-

пространство Y, обладающее свойствами а) и б), то оно замкнуто, а Y — семибикомпактно.

Теорема 2. Всякое замкнутое отображение семибикомпактного T_α-пространства X на семибикомпактное T_α-пространство Y, обладающее свойством б), можно продолжить в непрерывное отображение фрейденталевского расширения γX на фрейденталевское расширение γY. Фрейденталевским расширением называется максимальное бикомпактное расширение (семибикомпактного) пространства R из всех таких бикомпактных расширений αR, что $\operatorname{ind}(\alpha R \setminus R) = 0$. Условия а) и б) и некоторые другие существенны. Доказательство существенно опирается на работы Стоуна (РЖМат, 1957, 8495) и работы автора (Sci. Repts Tokyo Bunrika Daigaku, 1952, **A4**, 177 — 180; РЖМат, 1956, 8670; 1958, 3504). Ю. М. Смирнов

203. Об инволюциях и семействах компактов. Косинский (On involutions and families of compacta. Kosiński A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, **5**, № 11, 1055—1059, LXXXVII (англ., рез. русск.)

Пусть M — n-мерный компакт, $\varphi M \to M$ — инволюция пространства M, множество неподвижных точек которой имеет размерность $\leqslant n-1$, M^* — пространство, получающееся из M отождествлением точек, переводящихся друг в друга инволюцией φ. Показывается, что существует такое замкнутое множество $F \subset M$, что $F \cup f(F) = M$ и $\dim F \cap f(F) \leqslant n-1$. При условии, что автоморфизм $f_*: H_n(M, Z_2) \to H_n(M, Z_2)$ является тождественным, доказывается, что естественный гомоморфизм $H_n(M, Z_2) \to H_n(M^*, Z_2)$ тривиален. С помощью этого предложения обобщаются некоторые теоремы Борсука и автора (РЖМат, 1957, 2142, 2143). А. С. Шварц

204. Об антиподных множествах на сфере и непрерывных инволюциях. Яворовский (On antipodal sets on the sphere and on continuous involutions. Jaworowski J. W.), Fundam. math., 1956, **43**, № 2, 241—254 (англ.)

Подробное изложение ранее прореферированных работ автора (РЖМат, 1956, 7233; 1957, 257). А. С. Шварц

205. О пределе системы групп. Гриффитс (On limits of systems of groups. Griffiths H. B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 118—129 (англ.)

Введено следующее понятие системы групп и ее предельной группы с помощью которого удается охватить в одну логическую схему переход к пределу в прямых и обратных спектрах. Пусть в множестве M дано отношение Σ. Пара $< G, R >$, где G — функция, сопоставляющая каждому $m \in M$ некоторую группу $G(m)$, а R — функция, сопоставляющая каждой паре m, n такой, что $m \Sigma n$ в M, — подгруппу R_{mn} прямой суммы групп $G(m)$ и $G(n)$, называется системой групп над M. Пусть Φ — некоторая система непустых подмножеств из M такая, что из $X, Y \in \Phi$ следует $X \cap Y \in \Phi$. Рассматриваются пары (x, X), где $X \in \Phi$, а x — функция, сопоставляющая каждому $m \in X$ элемент $x(m) \in G(m)$, причем требуется, чтобы $(x(m), x(n)) \in R_{mn}$ при $m \Sigma n$. Предельная группа $\lim \Phi < G, R > (M, \Sigma)$ данной системы, по определению, имеет в качестве элементов классы эквивалентных между собой пар (x, X) при эквивалентности: $(x, X) \sim (y, Y)$, если существует такой $V \in \Phi$, что $x|V = y|V$; в качестве произведения классов, содержащих соответственно (x, X) и (y, Y), принимается класс, содержащий $(xy, X \cap Y)$. В случае спектров групп в качестве R_{mn} принимаются графики проекций спектра. При прямом спектре системой Φ служит совокупность таких подмножеств X, что из $x \Sigma m$, $x \in X$, следует $m \in X$. При обратном спектре в качестве Φ принимается одно только множество M, а упорядочение Σ заменяется дуальным. Н. А. Берикашвили

206. Триангулируемость локально триангулируемых пространств. Манкрес (The triangulation of locally triangulable spaces. Munkres James), Acta math., 1957, **97**, № 1-2, 67—93 (англ.)

Локально триангулируемым пространством называется сепарабельное метрическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству конечного полиэдра. Автор доказывает, что всякое локально триангулируемое пространство размерности $\leqslant 3$ можно триангулировать. В доказательстве используется установленная Мойзом и Бингом триангулируемость многообразий с краем, имеющих размерность $\leqslant 3$ (РЖМат, 1955, 1696, 1697). А. С. Шварц

207. Нормальные формы и гомотопические группы некоторых полиэдров. Чжан Су-чэн (Chang Su-cheng), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, **8**, № 1, 102—131 (кит.; рез. англ.)

Подробное изложение опубликованных ранее результатов (РЖМат, 1957, 7765; 1958, 5613). М. М. Постников

208. О фильтрованной дифференциальной группе. Зееман (On the filtered differential group. Zeeman E. C.), Ann. Math., 1957, **66**, № 3, 557—585 (англ.)

Для фильтрованной дифференциальной группы (с дифференциалом d) $\mathfrak{A} = (A, A^p, d)$

$$A = \ldots = A_{m+1} = A_m \supset A_{m-1} \supset \ldots \supset A_p \supset A_{p-1} \supset \ldots$$

$$\ldots \supset A_0 = A_{-1} = A_{-2} = \ldots = 0$$

строится плоская диаграмма Δ, описывающая категорию $\overset{\#}{\mathfrak{A}}$ групп и гомоморфизмов, естественным образом связанных с группой $\mathfrak{A}$. Группы, входящие в категорию $\overset{\#}{\mathfrak{A}}$, получаются из групп A_p с помощью конечного числа операций включения, факторизации, пересечения, объединения, взятия операторов d и d^{-1}. Изоморфизм между группами называется каноническим, если он может быть представлен в виде конечной композиции простейших изоморфизмов вида

$$\frac{F/H}{G/H} \longrightarrow \frac{F}{G} \quad \text{или} \quad \frac{F}{F \cap G} \longrightarrow \frac{F+G}{G}.$$

Диаграмма Δ представляет собой совокупность квадратов $a = [\pi, \rho]$, состоящих из точек плоскости (x, y), для которых $\pi - 1 < x \leqslant \pi$, $\rho - 1 < y \leqslant \rho$ (π, ρ — целые числа). Принимается, что $a \leqslant b$, если $\pi \leqslant \pi'$, $\rho \leqslant \rho'$, и $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$. При $\rho > 0$ определяется функция $\delta[\pi, \rho] = [\rho, \pi - m - 1]$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — достаточно общая дифференциальная фильтрованная группа в том смысле, что любые две формулы, определяющие изоморфные группы из $\overset{\#}{\mathfrak{A}}$, определяют изоморфные группы и в любой дифференциальной фильтрованной группе с тем же числом фильтров. Задается функция λ, относящая группам из $\overset{\#}{\mathfrak{A}}$ области из Δ, причем так, что: $\lambda(A_p) = \Delta(\pi \leqslant p)$; $\lambda(dA_p) = \Delta(\rho \leqslant p - m - 1)$; $\lambda(d^{-1}A_p) = \Delta(\rho \leqslant p)$.

Устанавливается, что:

а) $\lambda(F \cap G) = \lambda F \cap \lambda G$; $\lambda(F+G) = \lambda F \cup \lambda G$; $\lambda(F/G) = \lambda F - \lambda G$;

б) $\lambda F = \lambda G$ тогда и только тогда, когда F и G канонически изоморфны;

в) $\delta(\lambda F) = \lambda G$ тогда и только тогда, когда канонический изоморфизм индуцируется оператором d: $F \to G$;

г) Если λF и λG не равны и не переводятся друг в друга с помощью δ, то F и G не изоморфны.

Выясняются условия, при которых область диаграммы соответствует некоторой группе, соотношения между областями, отвечающие включению групп, факторизации их и т. п., а также действие гомоморфизмов на диаграмме.

Диаграмма может быть использована для рассмотрения относительных групп гомологий $H(A_p, A_q)$, групп спектральных последовательностей (при этом из наглядных соображений можно вывести их свойства), а также точных пар Масси.

В приложении к гомологиям расслоенных пространств приходится рассматривать набор диаграмм, соответствующих разным размерностям. Можно иллюстрировать гомоморфизмы, индуцированные вложением слоя в расслоенное пространство или проекцией последнего на базу (например, в случае, когда слой вполне не гомологичен нулю).

Вводится понятие инвариантной подкатегории $\mathfrak{L}$ для $\mathfrak{A}^{\#}$. В нее входят группы, задаваемые формулами, которые отображаются изоморфно при любом гомоморфизме дифференциальных фильтрованных групп, отображающем изоморфно член E_2 спектральной последовательности. Указывается область диаграммы, в которую отображаются все группы инвариантной категории. Описывается вид этих групп (в частности, точные пары, члены спектральных последовательностей). Указываются базисные группы, из которых они все могут быть получены:

$$R_{p,q} = im\,(H(A_p, A_{q-1}) \to H(A_{p+1}, A_q)).$$

В заключение автор обсуждает вопрос о дважды фильтрованной группе (задаваемой подгруппой $A' \subset A$) и приходит к заключению о невозможности интерпретации соответствующей категории групп с помощью аналогичной диаграммы. Причина этого кроется в недистрибутивности структуры, порождаемой A' и A_p с помощью пересечения, сложения и взятия операторов d и d^{-1}. Строится пример. И. З. Розенкноп

209. Фактор-система третьего препятствия. Мидзуно (On factor set of the third obstruction. Mizuno Katuhiko), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 7, 414—417 (англ.)

Излагается теорема о третьем препятствии для отображений в пространство Y, удовлетворяющее соотношениям $\pi_i(Y) = 0$, если $0 \leqslant 1 < n$. $n < i < q$, $q < i < r < 2q - 1$. Изложение ведется в направлении, начатом работами Эйленберга и Маклейна (РЖМат, 1956, 2059).

М. М. Постников

210. О реализации классов гомологий подмногообразиями. Судзуки (On the realization of homology classes by submanifolds. Suzuki Haruo), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 2, 541—550 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть u — n-мерный класс когомологий по модулю 2 замкнутого дифференцируемого многообразия. Если класс u реализуем (РЖМат, 1956, 291) в ортогональной группе $O(k) \subset O(n)$ ($k \leqslant$), то класс когомологий $Sq^* u$ также реализуем (в группе $O(n + k)$). А. С. Шварц

211. О делителях и кратных непрерывных отображений Хилтон (On divisors and multiples of continuous maps. Hilton P. J.), Fundam. math., 1956, **43**, № 3, 358—386 (англ.)

Пусть X_0 — компактное пространство и Y_0, Y_1 — либо компактные абсолютные окрестностные ретракты, либо бесконечные полиэдры. Несколько обобщая известное определение Борсука (РЖМат, 1956, 5680; 1957, 4676), автор называет отображение y: $X_0 \to Y_1$ (или его гомотопический класс) зависящим от некоторого семейства Φ отображений $X_0 \to Y_0$, если для каждого компактного пространства $X \supseteq X_0$ из продолжаемости на X любого отображения $f \in \Phi$ вытекает продолжаемость отображения g. Если это условие выполнено лишь тогда, когда $\dim(X \setminus X_0) \leqslant m$, то говорят, что g зависит от Φ в размерности m. Если X_0 является полиэдром (возможно, бесконечным), а сформулированное выше условие выполнено лишь тогда, когда X также является полиэдром (содержащим полиэдр X_0 в качестве подполиэдра), то говорят, что g полиэдрально зависит от Φ. Если при этом полиэдр X предполагается конечным, то говорят, что g финитно зависит от Φ. В последних двух случаях пространства Y_0 и Y_1 могут быть любыми топологическими пространствами.

Отношение зависимости отображений обобщает введенное Томом отношение зависимости классов когомологий полиэдра X (РЖМат, 1957, 6238). Именно, легко видеть, что класс когомологий $\beta \in Hq(X; B)$ тогда и только тогда зависит в смысле Тома от класса когомологий $\alpha \in H^p(X; A)$, когда соответствующее классу β отображение $X \to K(B, q)$ полиэдрально зависит от отображения $X \to K(A, p)$, соответствующего классу α. Если полиэдр X конечен, а группа A имеет конечное число образующих, то слово „полиэдрально" может быть опущено.

Последнее замечание вытекает из следующей общей теоремы: Если пространства X_0 и Y_0 являются конечными полиэдрами, а пространство Y_1 — либо полиэдром, либо компактным абсолютным окрестностным ретрактом, то отношения зависимости, полиэдральной зависимости и финитной зависимости эквивалентны. Кроме того, отображение $g: X_0 \to Y_1$ тогда и только тогда полиэдрально зависит от отображения f, когда $g \sim \varphi f$, где $\varphi: Y_0 \to Y_1$. Последнее утверждение справедливо и тогда, когда полиэдры X_0, Y_0 бесконечны, а пространство Y_1 произвольно. С другой стороны, эквивалентность отношений зависимости и финитной зависимости не зависит от предположения конечности полиэдра Y_0, причем каждое из этих отношений эквивалентно тому, что для любого конечного полиэдра $Y_0' \supset f(X_0)$ существует такое отображение $\varphi': Y_0' \to Y$, что $g \sim \varphi' t$. Аналогичные утверждения имеют место и для отношения зависимости в данной размерности m.

Как известно, множество $\pi(X, Y)$ гомотопических классов отображений $(X, x_0) \to (Y, y_0)$, где x_0, y_0 — некоторые точки, можно рассматривать как группу, если пара (X, Y) принадлежит к одному из следующих трех типов: 1) пространство X является надстройкой над некоторым пространством X_1; 2) пространство Y является H-пространством; 3) пространство X компактно и имеет размерность $\leqslant 2n - 2$, тогда как пространство Y является $(n-1)$- связным полиэдром (Третий случай в опубликованных работах до сих пор в полной общности детально не рассматривался). Автор изучает отображение $\alpha^*: \pi(Y_0, Y_1) \to \pi(X_0, Y_1)$, естественным образом индуцированное некоторым классом $\alpha \in \pi(X_0, Y_0)$, и доказывает, что это отображение является гомоморфизмом (т. е. $(\beta_1 + \beta_2) \circ \alpha = \beta_1 \circ \alpha + \beta_2 \circ \alpha$), вообще говоря, только в следующих двух случаях:

а) пара (Y_0, Y_1) принадлежит типу 1) и либо пара (X_0, Y_1) также принадлежит типу 1), причем α является надстроечным классом, либо пара (X_0, Y_1) принадлежит типу 3);

б) обе пары (Y_0, Y_1), (X_0, Y_1) принадлежат типу 2) или типу 3). При этом, за исключением случая, когда обе пары (Y_0, Y_1) и (X_0, Y_1) принадлежат типу 1), образ гомоморфизма α^* совпадает с множеством всех классов, зависящих от класса α, так что это множество является подгруппой. В исключенном случае это утверждение остается справедливым, если пространство Y_1 односвязно. На примерах показано, что в случаях, отличных от а) и б), множество всех классов, завися-

щих от класса α, подгруппой, вообще говоря, не является. Кроме того, дан пример двух отображений $X_0 \to Y_0$, каждое из которых зависит от другого и которые нельзя перевести друг в друга никаким гомеоморфизмом пространства Y_0. Вопрос о существовании таких отображений был поставлен Борсуком.

Обобщая предыдущие результаты на случай отображений, зависящих от нескольких отображений, автор, в частности, показывает, что если Y_1 является H-пространством, то подмножество группы $\pi(X_0, Y_1)$, состоящее из классов, зависящих от классов $\alpha_i \in \pi(X_0, Y_0)$, является подгруппой. Если X_0 является надстройкой или если $\dim X_0 \leqslant 2n-2$, а $\pi_i(X) = 0$, когда $i \leqslant n-1$, то эта подгруппа абелева и состоит из всех элементов вида $\sum \beta_i \circ \alpha_i$, где $\beta_i \in \pi(Y_0, Y_1)$. Аналогичные утверждения имеют место и для отношения зависимости в любой данной размерности.

В связи с доказательством этих обобщенных результатов автор приходит к (имеющему и самостоятельный интерес) вопросу о том, когда система $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ классов $\beta_i \in \pi(Y_0, Y_1)$ получается (соответствующими ограничениями области определения) из некоторого элемента $\beta \in \pi(Y, Y_1)$ где Y — прямое произведение k экземпляров пространства Y_0. Этот вопрос до конца рассмотрен в нескольких важных специальных случаях, в частности, когда $Y_0 = Y_1 = S^n$. Из получающихся отсюда результатов, касающихся проблемы зависимости, укажем для примера следующий, наиболее простой: класс $\beta \in \pi(X_0, S^n)$, где X_0 — произвольное компактное пространство, а n — четное число, тогда и только тогда зависит от классов $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \pi(X_0, S^n)$, когда он зависит от некоторого α_i.

В заключение приведен обзор всех известных случаев, когда операция компонирования классов удовлетворяет левому или правому дистрибутивному закону.

М. М. Постников

212. О регулярных окрестностях двумерных многообразий в четырехмерном евклидовом пространстве. Ногути (On regular neighbourhoods of 2-manifolds in 4-euclidean space. I. Noguchi Hiroshi), Osaka Math. J., 1956, 8, № 2, 225—242 (англ.)

Пусть P — полиэдр в евклидовом пространстве E^n (Под полиэдром всюду понимается прямолинейный полиэдр). Правильной окрестностью полиэдра P называется такая полиэдральная окрестность $U(P)$, которую можно стянуть в P. Полиэдры $P \subset E^n$ и $Q \subset E^n$ называются полуизотопными (semicongruent), если существуют правильные окрестности $U(P)$ и $U(Q)$ и сохраняющий ориентацию кусочно-линейный гомеоморфизм $U(P)$ в $U(Q)$, отображающий P на Q.

В работе показывается, что два любых комбинаторно-эквивалентных $(n-1)$-мерных многообразия в E^n $(n = 3,4)$ полуизотопны. Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы два двумерных комбинаторно-эквивалентных многообразия в E^4 были полуизотопны.

А. С. Шварц

213. Носители и S-теория. Спаньер, Уайтхед (The theory of carriers and S-theory. Spanier E. H., Whitehead J. H. C.), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 330—360 (англ.)

Статья состоит из двух частей, посвященных соответственно теории носителей и S-теории. В первой части на основе понятия носителя с единой точки зрения рассматриваются различные релятивизации основных задач теории гомотопий. Пусть X и Y — произвольные топологические пространства. Носителем $\varphi: X \to Y$ называется сохраняющая отношение включения функция, относящая каждому подмножеству $A \subset X$ некоторое подмножество $\varphi A \subset Y$. Говорят, что носитель φ определяется на семействе $\mathfrak{A}$ подмножеств пространства X, если $\varphi A = \bigcap \varphi A'$, где A' пробегает все подмножества из $\mathfrak{A}$, содержащие подмножество A. При явном определении конкретных носителей их значения указываются лишь на подмножествах соответствующего семейства $\mathfrak{A}$. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется φ-отображением, если $fA \subset \varphi A$ для любого $A \subset X$. Гомотопия $f_t: X \to Y$ называется φ-гомотопией, если для любого t отображение f_t является φ-отображением. Совокупность φ-гомотопических классов φ-отображений $X \to Y$ обозначается через $\Pi(\varphi)$. Основными задачами теории гомотопий являются задачи продолжения (Определить для данного носителя $\varphi: X \to Y$ и данного подмножества $X_0 \subset X$ образ естественного отображения ограничения $\Pi(\varphi) \to \Pi(\varphi \mid X_0)$, где $\varphi \mid X_0$ — носитель $X_0 \to Y$, определенный формулой: $(\varphi \mid X_0)(A) = \varphi A$, $A \subset X_0$) и задача стягивания (Определить для двух носителей φ, $\psi: X \to Y$, удовлетворяющих условию $\varphi \leqslant \psi$, т. е. условию $\varphi A \subset \psi A$ для любого $A \subset X$, образ естественного отображения расширения $\Pi(\varphi) \to \Pi(\psi)$).

Легко видеть, что задача стягивания равносильна некоторой задаче продолжения (для подмножества $X_0 = X \times 0$ пространства $X \times I$ и носителя $\Theta: X \times I \to Y$, определенного формулами $\Theta(A \times I) = \psi A$, $\Theta(A \times 1) = \varphi A$, $A \subset X$. Обратно, если X является клеточным разбиением, X_0 — его подразбиением, а φ — клеточным носителем (т. е. носителем, определяющимся на семействе всех подразбиений разбиения X), то задача продолжения для φ и X_0 равносильна некоторой задаче стягивания (для носителя φ, рассматриваемого как носитель $X \to TY$, где TY — конус над пространством Y, и носителя $\psi: X \to TY$, определенного формулой

$$\psi A = \begin{cases} \varphi A, & \text{если } A \subset X_0 \\ TY, & \text{если } A \subset X_0 \end{cases}$$

Авторы, ограничиваясь задачей стягивания, находят в первую очередь „ядро“ отображения $\Pi(\varphi) \to \Pi(\psi)$, т. е. прообраз нулевого класса из $\Pi(\psi)$. Оказывается, что это ядро является образом отображения ограничения $\Pi((\psi, \varphi)_1) \to \Pi(\varphi)$, где $(\psi, \varphi)_1$ — носитель $TX \to Y$, определенный формулами $(\psi, \varphi)_1 A = \varphi A$, $(\psi, \varphi)_1 TA = \psi A$, $A \subset X$. Этот результат легко обобщается следующим образом: Пусть φ_m — носитель $S^m X \to Y$ (здесь S — операция надстройки, т. е. $SX = TX \cup T'X$), определенный формулой $\varphi_m S^m A = \varphi A$, и пусть $(\psi, \varphi)_{m+1} = ((\psi, \varphi)_1)_m = (\psi_m, \varphi_m)_1$. Тогда имеет место „точная“ последовательность

$$\cdots \to \Pi_{m+1}(\psi, \varphi) \xrightarrow{\beta} \Pi_m(\varphi) \xrightarrow{\gamma} \Pi_m(\psi) \xrightarrow{\alpha} \cdots \to \Pi(\varphi) \to \Pi(\psi), \quad (1)$$

где $\Pi_{m+1}(\psi, \varphi) = \Pi((\psi, \varphi)_{m+1})$, $\Pi_m(\varphi) = \Pi(\varphi_m)$,

$$\Pi_m(\psi) = \Pi(\psi_m),$$

а γ — отображение расширения, β — отображение ограничения, и α — отображение, получающееся компонированием ψ_m-отображений $S^m X \to Y$ с отображением $TS^{m-1}X \to S^m X$, состоящим в „натягивании“ конуса $TS^{m-1}x$ на надстройку $S^m X = SS^{m-1}X$. „Точность“ этой последовательности означает, во-первых, что в каждом члене образ входящего отображения совпадает с „ядром“ исходящего отображения и, во-вторых, что отображение β взаимно однозначно, если $\Pi_{m+1}(\psi) = 0$, а отображение α взаимно однозначно, если $\Pi_m(\varphi) = 0$. Если множества $\varphi(\varnothing)$ и $\psi(\varnothing)$ односвязны, то члены этой последовательности будут группами относительно колейного сложения (РЖМат, 1956, 288), а ее отображения — гомоморфизмами. В этом случае построенная

последовательность точна в обычном смысле. Авторы рассматривают также и другие более сложные точные последовательности (например, для троек носителей).

Для случая, когда X является клеточным разбиением, а φ и ψ — клеточными носителями, авторы доказывают следующую теорему: Если для любой „замкнутой клетки" $\sigma \subset X$ (т. е. наименьшего подразбиения, содержащего некоторую открытую клетку) пара $(\psi\sigma, \varphi\sigma)$ p-связна, где $p = \dim\sigma$, то $\gamma\,\Pi(\varphi) = \Pi(\psi)$. Если же эта пара $(p+1)$-связна, то отображение γ взаимно однозначно. Эта теорема получается как следствие некоторого весьма общего утверждения, из других следствий которого можно отметить следующее предложение: Пусть X — клеточное разбиение, $\varphi : X \to Y$ — клеточный носитель и $S_\varphi : SX \to SY$ — носитель, определенный формулой $(S\varphi)(SA) = S\varphi A$, $A \subset X$. Тогда определено естественное отображение $S_* : \Pi(\varphi) \to \Pi(S\varphi)$. Оказывается, что если $\varphi(\varnothing) \neq \varnothing$ и для любой замкнутой клетки $\sigma \subset K$ множество $\varphi\sigma$ $(n_{p+1} - 1)$-связно, где $p = \dim\sigma$ и $n_{p+1} = \left[\frac{1}{2}p + 1\right]$, то $S_*\,\Pi(\varphi) = \Pi(S_\varphi)$. Если же множество $\varphi(\varnothing)$ связно, а множества $\varphi(\sigma)$ n_p-связны, то отображение S_* взаимно однозначно. Если $\dim X \leqslant n - 4$, то отображение $S_* : \Pi(S^n\varphi) \to \Pi(S^{n+1}\varphi)$ взаимно однозначно. Относительно колейного сложения (когда оно определено) отображение S_* является гомоморфизмом.

Во второй части авторы вводят основное понятие φ — S-отображения, как элемента множества $\Sigma(\varphi)$, являющегося пределом прямого спектра, состоящего из множеств $\Pi(S^n\varphi)$ и отображений $S_* : \Pi(S^n\varphi) \to \Pi(S^{n+1}\varphi)$. Так как для $n \geqslant 3$ множества $\Pi(S^n\varphi)$ являются абелевыми группами (относительно колейного сложения), то множество $\Sigma(\varphi)$ также является абелевой группой. Исходя из последовательности (1) и переходя к пределу, авторы получают точную последовательность (так называемую S-гомотопическую последовательность пары φ, ψ)):

$$\cdots \to \sum_{m+1}(\psi, \varphi) \xrightarrow{\beta} \sum_m(\varphi) \xrightarrow{\gamma} \sum_m(\psi) \xrightarrow{\alpha} \cdots,$$

где $\sum_m(\varphi) = \sum(\varphi_m)$, $\sum_m(\psi) = \sum(\psi_m)$, $\sum_{m+1}(\psi\varphi) = \sum((\psi, \varphi)_{m+1})$. Эту последовательность можно неограниченно продолжить вправо (определяя, например, группы $\sum_{-m}(\varphi)$ как $\sum(\varphi^m)$, где φ^m — носитель $X \to S^mY$, определенный формулой $\varphi^m A = S^m\varphi A$, $A \subset X$. Аналогичные последовательности имеют место и для троек носителей и т.д.

Пусть Θ^i — такие носители $X \to Y$, что $\Theta^{i+1} \leqslant \Theta^i$ и пусть $A_q^p = \sum_{q-p-1}(\Theta^p)$, $C_q^p = \sum_{q-p}(\Theta^{p-1}, \Theta^p)$, $A = \sum A_q^p$, $C = \sum C_q^p$. Легко видеть, что относительно естественных отображений $A \to A$ и $A \to C$ пара $\langle A, C\rangle$ является точной парой в смысле Масси (РЖМат, 1956, 7241). Пусть $\langle {}^{(n)}A, {}^{(n)}C\rangle$ — ее n-я производная пара. Так как $A_{r+1}^r = \sum(\Theta^r)$, то элемент $a \in \sum(\Theta^p)$ тогда и только тогда „стягиваем" в $\sum(\Theta^{p+n})$, когда $a \in {}^{(n)}A$. Если $a \in {}^{(n)}A$, то $a \in {}^{(n+1)}A$ тогда и только тогда, когда образ элемента a в ${}^{(n)}C$ равен нулю. Следовательно, этот образ можно рассматривать как $(n+1)$-е препятствие к стягиванию в $\sum(\Theta^{p+n+1})$. Аналогичное построение возможно и для случая „возрастающей последовательности носителей.

Эта общая конструкция применяется к случаю, когда X является клеточным разбиением, а носители Θ^p определяются по данным клеточным носителям φ и $\psi \geqslant \varphi$ посредством формулы

$$\Theta A = \begin{cases} \varphi A, & \text{если } A \subset X^p, \\ \psi A, & \text{если } A \subset X^p. \end{cases}$$

Пусть $\langle {}^{(n)}A(\psi, \varphi), {}^{(n)}C(\psi, \varphi)\rangle$ — соответствующие производные точные пары. Оказывается, что ${}^{(1)}C_q^p(\psi, \varphi) \approx H^p(X : G_q)$, где G_q — пучок в смысле Лере, определенный формулой: $G_q(A) = \sum_q(\chi_{\psi A}, \chi_{\varphi A})$, где $A \subset X$, а $\chi_{\omega A}$, $\omega = \varphi, \psi$ — носитель $\varnothing \to X$, для которого $\chi_{\omega A}^{(\varnothing)} = \omega A$. Таким образом, препятствие к „S-стягиванию" Θ^{p-1}-отображения в Θ^p-отображение может быть представлено, как и в обычной теории препятствий, в виде некоторого класса когомологий. Аналогичный результат имеет место и в двойственной ситуации, когда по данным носителям φ и ψ строится возрастающая последовательность носителей. В этом случае вместо групп когомологий получаются группы гомологий.

Эти результаты представляют собой весьма далекое обобщение результатов Масси о точных когомотопических и гомотопических парах (Ann. Math., 1952, **56**, 364—396; РЖМат, 1954, 2909).

Примечание референта. Изложенные результаты включают в себя в качестве весьма специального частного случая известную теорему Л. С. Понтрягина о стягивании отображения на остов меньшей размерности (Изв. АН СССР., сер. матем., 1950, **14**, № 3, 151—152). Их можно без труда обобщить так, чтобы они включали в себя и более общую теорему референта (РЖМат, 1956, 8687) о стягивании отображения на подпространство. М. М. Постников

214. Двойственность и S-теория. Спаньер (Duality and S-theory. Spanier E. H.), Bull. Amer. Math. Soc., 1956, **62**, № 3, 194—203 (англ.)

Обзор основных понятий и результатов S-теорий (реф. 213). М. М. Постников

215. О полусимплициальных комплексах. Кан (On c. s. s. complexes. Kan Daniel M.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 3, 449—476 (англ.)

В предыдущей работе (РЖМат, 1957, 4680) автор показал, что для кубических комплексов, удовлетворяющих аксиоме распространения, можно построить аналог обычной теории гомотопии. То же самое возможно, конечно, и для (полных) полусимплициальных комплексов, удовлетворяющих соответствующим образом видоизмененной аксиоме распространения. В реферируемой работе автор строит теорию гомотопий в произвольных полных полусимплициальных комплексах, перенося ее основные понятия с категории S_E комплексов, удовлетворяющих аксиоме распространения, на категорию S всех полных полусимплициальных комплексов с помощью некоторого функтора $Q : S \to S_E$. Для возможности такого переноса необходимо в первую очередь, чтобы гомотопные отображения функтор Q переводил в гомотопные. Кроме того, для того чтобы перенесенные понятия совпадали бы на подкатегории S_E с исходными, следует потребовать существования такого естественного отображения $q : E \to Q$, где $E : S \to S$ — тождественный функтор, что для любого комплекса $K \in S_E$ соответствующее отображение $qK : K \to QK$ является гомотопической эквивалентностью. Наконец, единственность перенесенной теории (т. е. ее независимость от функтора Q) обеспечивается следующим условием: если отображение $f : QK \to QK$, где $K \in S$, удовлетворяет соотношению $f \circ qK = qK$, то f является гомотопической эквивалентностью. Функтором Q описанного типа является, например, функтор, относящий

любому полусимплициальному комплексу K сингулярный комплекс его геометрической реализации. Однако естественно требовать, чтобы функтор Q строился чисто алгебраически без вспомогательных геометрических соображений. Такой функтор Q и строится в реферируемой работе.

Пусть K — произвольный полный полусимплициальный комплекс. Его расширением $\mathrm{Ex}\,K$ автор называет комплекс, n-мерными симплексами которого являются всевозможные симплициальные отображения $\Delta'[n] \to K$, где $\Delta'[n]$ — барицентрическое (в понятном смысле) подразделение стандартного n-мерного симплекса $\Delta[n]$ (рассматриваемого как полный полусимплициальный комплекс). Граничные операторы и операторы вырождения определяются в комплексе $\mathrm{Ex}\,K$ очевидным образом. Для любого симплициального отображения $f: K \to L$ через $\mathrm{Ex}\,f$ обозначается отображение $\mathrm{Ex}\,K \to \mathrm{Ex}\,L$, сопоставляющее каждому симплексу $\sigma: \Delta'[n] \to K$ композицию $f \circ \sigma$. Каждый комплекс $\sigma \in K$ отождествляется с симплексом $\Phi_\sigma \circ \delta \in \mathrm{Ex}\,K$, где δ — естественное отображение $\Delta'[n] \to \Delta[n]$, $n = \dim \sigma$, а Φ_σ — характеристическое отображение для симплекса σ, т. е. отображение $\Delta[n] \to K$, переводящее единственный невырожденный симплекс комплекса $\Delta[n]$ в симплекс σ. Таким образом, $K \subset \mathrm{Ex}\,K$ и, следовательно, $\mathrm{Ex}\,K \subset \mathrm{Ex}^2 K = \mathrm{Ex}\,\mathrm{Ex}\,K$ и, вообще, $\mathrm{Ex}^{n-1}K \subset \mathrm{Ex}^n K = \mathrm{Ex}\,\mathrm{Ex}^{n-1}K$. Пусть $\mathrm{Ex}^\infty K$ — объединение возрастающей последовательности комплексов $\mathrm{Ex}^n K$. Отображение $\mathrm{Ex}\,f$ на $K \subset \mathrm{Ex}\,K$ совпадает с f и потому отображения $\mathrm{Ex}^n f$ определяют некоторое отображение $\mathrm{Ex}^\infty f$. Оказывается, что $\mathrm{Ex}^\infty K \in S_E$, причем функции $\mathrm{Ex}^\infty K$ и $\mathrm{Ex}^\infty f$ составляют функтор Ex^∞, удовлетворяющий всем условиям, наложенным выше на функтор Q (естественное отображение q определяется отображениями вложения $K \subset \mathrm{Ex}^\infty K$). Тем самым возможность перенесения теории гомотопий на произвольные комплексы полностью обоснована чисто алгебраическим способом.

Интересным дополнительным свойством функтора Ex^∞ является то, что расслаивающие отображения полусимплициальных комплексов (т. е. отображения, удовлетворяющие соответствующим образом сформулированной аксиоме о накрывающей гомотопии) этот функтор переводит также в расслаивающие отображения.

Функтор Ex (состоящий из функций $\mathrm{Ex}\,K$ и $\mathrm{Ex}\,f$) тесно связан с (очевидным образом определяемым) функтором барицентрического подразделения $Sd: S \to S$. Именно, оказывается, что симплициальные отображения $SdK \to L$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с симплициальными отображениями $K \to \mathrm{Ex}\,L$, причем естественному отображению $SdK \to K$ соответствует вложение $K \subset \mathrm{Ex}K$.

В работе доказываются также некоторые теоремы о симплициальной аппроксимации, из которых, в частности, вытекает, что если $K \in S$ и $M \in S_E$, то любое непрерывное отображение геометрической реализации комплекса K в геометрическую реализацию комплекса M гомотопно реализации некоторого симплициального отображения $K \to M$.

М. М. Постников

216. Абстрактная гомотопия. III. Кан (Abstract homotopy. III. Kan Daniel M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 7, 419—421 (англ.)

Краткое резюме предыдущей работы (реф. 215).

217. Сопряженные функторы. Кан (Adjoint functors. Kan Daniel M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 2, 294—329 (англ.)

Пусть J — произвольная категория. Для любых двух ее объектов A, B обозначим через $H(A, B)$ множество всех ее отображений $A \to B$. Аналогично, для любых ее отображений $a: A' \to A$, $b: B \to B'$ обозначим через $H(a, b)$ отображение $H(A, B) \to H(A', B')$, определенное формулой $H(a, b)f = b \circ f \circ a$, где $f \in H(A, B)$. Очевидно, что пара $H(A, B)$, $H(a, b)$ образует функтор $H: \mathrm{J} \to \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — категория всех множеств, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму.

Пусть теперь $S: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ и $T: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ — произвольные ковариантные функторы. Автор называет функтор S сопряженным слева к функтору T, а функтор T — сопряженным справа к функтору S, если функторы $H(S(x), Z)$ и $H(X, T(z))$ естественно эквивалентны (первый из функторов H строится, как указано выше, для категории $\mathfrak{Z}$, а второй — для категории $\mathfrak{X}$). В этом случае каждый из функторов S и T однозначно (с точностью до естественной эквивалентности) определяет другой. Аналогично определяются сопряженные функторы нескольких аргументов. Примерами сопряженных функторов являются: 1) функтор, относящий любому пространству его произведение на единичный отрезок, и функтор, относящий любому пространству его пространство путей; 2) функтор, относящий любому пространству его сингулярный комплекс, и функтор, относящий любому полусимплициальному комплексу его геометрическую реализацию; 3) функторы $\otimes$ и Hom. В работе указаны и другие примеры сопряженных функторов.

Понятие сопряженности может быть следующим образом обобщено: пусть $F: Z \to \mathfrak{M}$ — произвольный ковариантный функтор; мы скажем, что функторы $S: \mathfrak{X} \to Z$ и $T: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ сопряжены относительно функтора F, если существуют такие двуместные функторы $Q: \mathfrak{X} \to \mathfrak{L}$, и $R: \mathfrak{Z} \to \mathfrak{L}$, контравариантные по первому аргументу и ковариантные по второму, что имеют место естественные эквивалентности $H(x, x) \to FQ(x, x)$, $H(z, z) \to FR(z, z)$ и $R(S(x), z) \to Q(x, T(z))$. Функторы Q и R, обладающие этим свойством, автор называет гом-функторами относительно функтора F. Построенный выше функтор H является гом-функтором относительно тождественного функтора $E: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$. Классический функтор Hom является гом-функтором относительно функтора, относящего любой группе множество, на котором эта группа определена. Аналогично, функтор Map, относящий пространствам X и Y пространство отображений Y^X (рассматриваемое в компактно-открытой топологии) является гом-функтором относительно функтора, относящего любому пространству множество, на котором оно определено. Весьма интересно, хотя и совершенно тривиально, то обстоятельство, что из сопряженности относительно некоторого функтора F вытекает сопряженность в первоначальном (абсолютном) смысле. Этот факт часто позволяет весьма легко доказывать сопряженность данных функторов (ярким примером являются функторы $\otimes$ и Hom).

Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{Z}$ — произвольные категории и $\mathfrak{Z}_v$ — категория всех ковариантных функторов $\mathfrak{V} \to \mathfrak{Z}$ и их естественных преобразований. Тогда определен функтор вложения $E_v\mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}_v$, относящий каждому объекту $Z \in \mathfrak{Z}$ постоянный функтор $E_v Z: \mathfrak{V} \to \mathfrak{Z}$, переводящий все объекты категории V в объект Z. Автор называет объект $A \in \mathfrak{Z}$ прямым пределом функтора $K \in Z_v$ относительно отображения $k: K \to E_v A$, если для любого объекта, $B \in \mathfrak{Z}$ и любого отображения $k': K \to E_v B$ существует одно и только одно такое отображение $f: A \to B$, что $k' = E_v f \circ K$. В частном случае, когда $\mathfrak{V}$ является направленным множеством, рассматриваемым как категория, это понятие переходит в классическое понятие прямого предела. Категория $\mathfrak{Z}$ называется $\mathfrak{V}$-прямой, если для каждого объекта категории $\mathfrak{Z}_v$ существует его прямой предел (относительно некоторого отображения). Оказывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функтор E_v обладал левым сопряженным функтором. Этот левый сопряженный функтор $\mathfrak{Z}_v \to \mathfrak{Z}$ обозначается через $\varinjlim_v$. Понятия обратного предела $\varprojlim^v$,

$\mathfrak{B}$-обратной категории и т. п. получаются из изложенных „прямых" понятий на основании обычных соображений двойственности. В частности, категория $\mathfrak{Z}_v$ заменяется категорией $\mathfrak{Z}^v$ контравариантных функторов $\mathfrak{B} \to \mathfrak{Z}$.

Если категория $\mathfrak{Z}$ является $\mathfrak{B}$-прямой (соответственно $\mathfrak{B}$-обратной) категорией, для любой категории V, то автор говорит, что категория $\mathfrak{Z}$ допускает прямые (соответственно обратные) предельные переходы. Пусть $\mathfrak{Z}_d$ — категория, состоящая из пар $(\mathfrak{B}, K)$, где V — произвольная категория, а K — ковариантный функтор, отображениями $(\mathfrak{B}, K) \to (\mathfrak{B}', K')$ которой являются пары (F, k), где F — произвольный ковариантный функтор, $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$, а k — естественное преобразование $K \to K'F$. Оказывается, что категория $\mathfrak{Z}$ тогда и только тогда допускает прямые предельные переходы, когда существует функтор, сопряженный слева к функтору $E_d : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}_d$, сопоставляющему каждому объекту A категории $\mathfrak{Z}$ объект $(\mathfrak{D}, E_0 A)$ категории $\mathfrak{Z}_d$, где $\mathfrak{D}$ — некоторая фиксированная категория, состоящая из одного объекта и одного (автоматически тождественного) отображения. Этот сопряженный слева функтор $\mathfrak{Z}_d \to \mathfrak{Z}$ обозначается через $\lim_d$. Двойственное утверждение имеет место, конечно, и для категорий, допускающих обратные предельные переходы. Соответствующий справа сопряженный функтор обозначается в этом случае через $\lim^d$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная категория. Ее подразделением $\mathfrak{B}^\wedge$ автор называет категорию, объекты $v^\wedge$ которой находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями v категории $\mathfrak{B}$. Каждому отображению $v : V_1 \to V_2$ категории $\mathfrak{B}$ сопоставляются три отображения $i_{V^\wedge}, v'$ и $v^\wedge$ категории $\mathfrak{B}^\wedge$, причем $i_{V^\wedge}$ является тождественным отображением $v^\wedge \to v^\wedge$, а $v' : v^\wedge \to (i_{V_1})^\wedge, v^\wedge : v^\wedge \to (i_{V_2})^\wedge$. Никаких других отображений категория $\mathfrak{B}^\wedge$ не содержит. Композиция отображений категории $\mathfrak{B}^\wedge$ определена только тогда, когда хотя бы одно из отображений — тождественное.

Пусть $F : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ — произвольный ковариантный функтор. Тогда для любой категории $\mathfrak{B}$ определены функторы $F_v : \mathfrak{K}_v \to \mathfrak{L}_v$ и $I^\vee K^v \to \mathfrak{L}^v$, называемые накрытиями функтора F. Функтор F_v переводит ковариантный функтор $A \in \mathfrak{K}_v$ в функтор $F \vee A \in \mathfrak{L}_v$, сопоставляющий каждому объекту $v \in \mathfrak{B}$ объект $F(AV) \in \mathfrak{L}$ и каждому отображению $v \subset \mathfrak{B}$ отображение $F(Av) \subset \mathfrak{L}$. Функтор F^v определяется двойственным образом. Ковариантный функтор $F : \mathfrak{L} \to N$ автор называет W-обратным, где W — некоторая категория, если категории L и N обе W — обратны и составные функторы $F \lim^w$ и $\lim^w F^w$ естественно эквивалентны. Оказывается, что если функторы S и T сопряжены относительно $V^\wedge$-обратного функтора F, то функторы S_v и T_v также сопряжены относительно функтора F. В частности, накрытия сопряженных (абсолютно) функторов также являются сопряженными функторами. Аналогичные утверждения имеют место (с некоторыми оговорками) и для (сходным образом определяемых) накрытий многоместных функторов.

В заключительном пункте работы автор рассматривает двуместный ковариантный функтор $\otimes_d$, определенный на категориях $\mathfrak{M}^v$ и $\mathfrak{Z}_v$, значения которого принадлежат категории $\mathfrak{Z}_d$. Этот функтор относит объектам $C \subset \mathfrak{M}^v$ и $K \subset \mathfrak{Z}_v$ объект $C \otimes_d K$, представляющий собой пару $(\mathfrak{C}, KC^0)$, где $\mathfrak{C}$ — категория, состоящая из пар (V, c), $V \subset \mathfrak{B}$, $c \subset CV$, отображениями $(V_1, c_1) \to (V_2, c_2)$ которой являются тройки (v, c_1, c_2), $V : V_1 \to V_2 (Cv) c_1 = c_2$, а C^0 — функтор $\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$, относящий объекту (V, c) объект V и отображению $(v_1 c_1, c_2)$ отображение v. Отображению $a : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ категории $\mathfrak{M}^v$ и отображению $k : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}'$ категории $\mathfrak{Z}_v$ функтор $\otimes_d$ относит отображение $a \otimes_d k$, представляющее собой пару $(a^0, k\, C^0)$, где a^0 — ковариантный функтор $\mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, сопоставляющий объекту (V, c) объект $(V, (aV) c)$ и отображению (v_1, c_1, c_2) — отображение $(v_1 (aV_1) c_1, (aV_2) c_2)$, а KC^0 — естественная эквивалентность $KC^0 \to K' D^0 a^0 = K' C^0$, индуцированная эквивалентностью k. Оказывается, что категория $\mathfrak{Z}$ тогда и только тогда допускает прямые предельные переходы, когда накрытия H^v функтора H по первому аргументу сопряжены справа к функторам $\lim_d C \mathfrak{M}^v \otimes_d \mathfrak{Z}_v)$. В этом случае функтор H обладает левым сопряженным функтором $\lim_d (\mathfrak{M}^v \otimes_d \mathfrak{Z}_0)$.

М. М. Постников

218. Функторы и полные полусимплициальные комплексы. Кан (Functors involving c. s. s. complexes. Kan Daniel M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 87, № 2, 330—346 (англ.)

Общие теоремы предыдущей работы (реф. 217) применяются к изучению полных полусимплициальных комплексов.

Пусть $\mathfrak{B}$ — категория, объектами которой являются отрезки $[n] = (0, 1, \ldots, n)$ натурального ряда, а отображениями $[m] \to [n]$ — монотонные функции. Тогда объекты категории $\mathfrak{M}^v$ представляют собой полные полусимплициальные комплексы. Эту категорию автор обозначает символом $\mathfrak{S}$.

Пусть $\mathfrak{Z}$ — произвольная категория, допускающая прямые предельные переходы, и пусть $\otimes$ — составной функтор $\lim_d \otimes_d$. Это двуместный функтор, определенный на категориях $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Z}_v$, значения которого принадлежат категории $\mathfrak{Z}$. Фиксируя его второй аргумент $\Sigma \in \mathfrak{Z}_v$, мы получим одноместный ковариантный функтор $\otimes \Sigma : \mathfrak{S} \to \mathfrak{Z}$. Из общих результатов предыдущей работы следует, что функтор $\otimes \Sigma$ сопряжен слева к функтору $H \vee (\Sigma,) : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{S}$.

В частном случае, когда $\mathfrak{Z}$ является категорией $\mathfrak{A}$ всех топологических пространств (эта категория, как показывает автор, допускает прямые предельные переходы), а объект $\Sigma \in \mathfrak{A}_v$ представляет собой функтор, сопоставляющий отрезку $[n]$ некоторый фиксированный евклидов симплекс с вершинами $A_0, \ldots, A_n$, а функции $\alpha : [m] \to [n]$ — симплициальное отображение $A_i \to A_{\alpha(i)}$, объект $H^v(\Sigma, X)$, где X — топологическое пространство, является сингулярным комплексом пространства X, а объект $K \otimes \Sigma$, где K — полный полусимплициальный комплекс, — геометрической реализацией комплекса K. Применяя к этому случаю свои общие результаты, автор воспроизводит классическую теорию полусимплициальных комплексов.

Более подробно автор рассматривает другой частный случай, когда $\mathfrak{Z}$ является категорией $\partial \mathfrak{G}$ цепных комплексов (которая также допускает прямые предельные переходы), а объект Σ — функтором Γ, сопоставляющим отрезку $[n]$ нормализованный цепной комплекс n-мерного евклидова симплекса, а функции α — соответствующее цепное отображение. В этом случае для любого цепного комплекса A комплекс $H \vee (\Gamma, A)$ естественным образом определяется как абелева полусимплициальная группа (реф. 217). Основной результат: Функтор $H^\vee(\Gamma,)$ устанавливает, в некотором смысле взаимно однозначное, соответствие между категорией $\partial \mathfrak{G}^0$ положительно градуированных цепных комплексов и категорий $\mathfrak{G}^v$ абелевых полусимплициальных групп. При этом группы гомологий комплекса A оказываются изоморфными гомотопическим группам комплекса $H^v(\Gamma, A)$ (реф. 217).

М. М. Постников

219. О второй нетривиальной гомотопической группе пар и триад. Барратт, Уайтхед (On the second non-vanishing homotopy groups of pairs and triads. Barratt M. G., Whitehead J. H. C.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 20, 392—406 (англ.)

Известные результаты о строении группы $\pi_{r+1}(Y)$, где Y — конечный r — 1-связный ($r \geqslant 3$) полиэдр, с одной стороны, переносятся на случай бесконечного Y, а с другой,— обобщаются на случай r — 1-связных пар (K, L), для которых подполиэдр L 2—связен. Подробно рассмотрен частный случай, когда $K = A \times B$, $L = A \vee B$, где A и B — соответственно m — 1-связный и n — 1-связный полиэдры (в этом случае $r = m + n$). Полученные результаты применяются к вычислению группы $\pi_{m+n}(X; A, B)$, где A и B — такие подполиэдры полиэдра X, что $X = A \cup B$, пары $(A, A \cap B)$ и $(B, A \cap B)$ — соответственно m — 1- и n — 1-связны и пересечение $A \cap B$ 2-связно. Рассмотрены конкретные примеры.

В первом пункте работы, имеющем чисто алгебраический характер, рассматривается группа $\mathrm{Ext}(Q, G)$ для случая, когда $pG = 0$. В частности, доказано, что эта группа изоморфна группе $\mathrm{Hom}({}_pQ, G)$.

М. М. Постников

220. **О точной когомотопической паре. Адем** (Sobre la pareja exacta de cohomotopia. Adem José), Bol. Soc. mat. mexicana, 1956, **1**, № 2, 72—84 (исп.)

Автор вычисляет (через стинродовский квадрат Sq^2) дифференциал в первой производной точной когомотопической пары (Massey W. S., Ann. Math., 1952, **56**, 363—396; РЖМат, 1954, 2909). А. С. Шварц

221. **Непараллелизуемость n-мерной сферы при $n>7$. Кервер** (Non-parallelizability of the n-sphere for $n>7$. Kervaire Michel A.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, **44**, № 3, 280—283 (англ.)

Исходя из результатов Ботта (РЖМат, 1958, 9672) и неопубликованного результата Ботта: $\pi_{2n}(U(n)) = Z_{n!}$, автор показывает, что n-мерная сфера S^n параллелизуема лишь при $n = 1, 3, 7$. А. С. Шварц

221. **Непараллелизуемость n-мерной сферы при ного пространства. I, II. Гуревич, Фейделл** (On the spectral sequence of a fiber space. I, II. Hurewicz Witold, Fadell Edward), Proc. Nat Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 11, 961—964; 1957, **43**, № 2, 241—245 (англ.)

Пусть (X, B, F) — расслоенное пространство в смысле Гуревича (РЖМат, 1957, 5420). Предположим, что база B односвязна и ациклична в размерностях $< r$. Тогда для порожденной расслоением (X, B, F) спектральной последовательности $\{E_i, d_i\}$ сингулярных групп гомологий с коэффициентами в группе G авторы доказывают следующее:

1. $E_i^{p,q} = H_p(B, H_q(F, G))$ $\qquad (2 \leqslant i \leqslant r)$,

$d_i = 0$ $\qquad (2 \leqslant i \leqslant r-1)$;

2. Если отождествить $E_r^{p,q}$ с $H_p(B, H_q(F, G))$, то дифференциал

$$d_r : H_p(B, H_q(F, G)) \to H_{pr}(B, H_{q+r-1}(F, G))$$

задается с помощью формулы $d_r(h) = \gamma \cap h$, где $\gamma \in H^r(B, \pi_r(B))$ — фундаментальный класс когомологий пространства B, а символ $\cap$ обозначает чеховское произведение класса когомологий на класс комологий (cap-product) относительно соответствующим образом выбранного спаривания $H_q(F, G)$ и $\pi_r(B)$ в $H_{q+r-1}(F, G)$.

Примечание референта. Когомологический аналог этой теоремы легко следует из того, что в когомологической спектральной последовательности определено умножение. А. С. Шварц

223. **Когомологии с неабелевыми коэффициентами и расслоенные пространства. Дедеккер** (Cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés. Dedecker Paul), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1955, **41**, № 10, 1132—1146 (франц.)

Указано необходимое и достаточное условие для того, чтобы структурную группу некоторого расслоенного пространства можно было бы расширить до заданной группы. Это условие состоит в равенстве нулю некоторого двумерного класса когомологий с коэффициентами в пучке (вообще говоря) неабелевых групп. Ранее аналогичные результаты были известны лишь в предположении, что упомянутый пучок состоит из абелевых групп. Новым в работе является в основном введение двумерных когомологий над неабелевыми областями коэффициентов.

М. М. Постников

224. **Дифференциальные операторы и точные последовательности на келеровых многообразиях. Гуггенхеймер** (Opérateurs différentiels et suites exactes sur une variété kählérienne. Guggenheimer H.), Tohoku Math. J., 1956, **8**, № 3, 308—323 (франц.)

На келеровом многообразии изучаются различные дифференциальные операторы, индуцированные оператором внешнего дифференцирования на пространствах форм того или иного типа. В частности, изучено поведение рангов пространств гармонических форм при модификациях келеровых многообразий (РЖМат, 1958, 9678.). М. М. Постников

225. **Характеристические классы с локальными коэффициентами. Ли Пэй-син** (Characteristic classes on local coefficients. Lee Pei-shing), Кэсюэ цзилу, Sci Rec, 1957, **1**, № 6, 381—384 (англ.)

Указывается, что штифелевский характеристический класс W^k косого произведения ортогональной группой $O(n)$ при k нечетном и $k = n$ естественно рассматривать как класс когомологий с локальными коэффициентами.

Вычисляются группы когомологий классифицирующего пространства $B_{O(n)}$ группы $O(n)$, реализуемого как грассманово многообразие $C_{n,n}$ с коэффициентами в группе „подкрученных целых чисел" (т. е. с коэффициентами в единственной нетривиальной локальной системе коэффициентов на $B_{O(n)}$, каждая группа которой изоморфна группе целых чисел). Каждый из элементов получившихся групп когомологий пространства $B_{O(n)}$ обычным образом определяет характеристический класс с локальными коэффициентами в косом произведении группой $O(n)$. Указывается, какие классы когомологий с в пространстве $B_{O(n)}$ соответствуют характеристическим классам Штифеля W^k при k нечетном и $k=n$, рассматриваемым как классы когомологии с локальными коэффициентами. А. С. Шварц

226. **Группы $\pi_r(V_{n,m})$. II. Пехтер** (The groups $\pi_r(V_{n,m})$. II. Paechter G. F.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 33, 8—27 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 3619. Работа посвящена вычислению некоторых гомотопических групп штифелевских многообразий $V_{n,m}$. Вычисляются группы $\pi_{k+p}(V_{k+3,3})$ с $p = 1, 2, 3, 4, 5$ при любом k, а также группы $\pi_7(V_{4,3})$ и $\pi_8(V_{4,3})$. В. А. Рохлин

227. **О комплексном проективном пространстве. Хирцебрух, Кодаира** (On the complex projective spaces. Hirzebruch F., Kodaira K), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 3, 201—216 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть X — замкнутое келерово многообразие комплексной размерности n, гладко гомеоморфное комплексному проективному пространству $P_n(C)$ с обычной гладкостью. В случае, если размерность n нечетна, многообразие X комплексно аналитически гомеоморфно многообразию $P_n(C)$. В случае, если размерность n четна, также можно утверждать, что X комплексно аналитически гомеоморфно

многообразию $P_n(C)$, если только двумерный класс Чжэнь Шэн-шэня (Черна) C_1 многообразия X не равен $-(n+1)g$ (через g обозначен образующий элемент группы когомологий $H^2(X, Z)$, знак которого выбран таким образом, чтобы класс g был классом когомологий келеровой метрики на X).

Примечание референта. Как следует из работы Рохлина и референта, в формулировке теоремы условие: многообразия X и $P_n(C)$ гладко гомеоморфны, можно заменить условием: многообразия X и $P_n(C)$ комбинаторно эквивалентны. А. С. Шварц

228. **О теории критических точек и топологии многообразия.** Баяда (Sulla teoria dei punti critici e la topilogia delle varietà. Bajada E. Matehatiche, Catania, 1953, 8, № 1, 27—49 (итал.)

Изложение морсовской теории критических точек на замкнутых дифференцируемых многообразиях. В частности, выводятся морсовские соотношения между числами Бетти многообразия и типовыми числами критических точек. H. Seifert

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 518

———

См. также: 237, 353, 565, 590, 602, 842

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков*

229. **Заметка о расширении меры.** Клуванек (Poznámka k rozšírovaniu miery. Kluvánek Igor), Mat.-fyz. časop., 1957, 7, № 2, 108—115 (словацк.; рез. русск., англ.)

Пусть X — произвольное множество, $\mathbf{R}$ — некоторая алгебра его подмножеств и μ — конечная мера на $\mathbf{R}$. Статья содержит новое доказательство известной теоремы об однозначном расширении μ. При доказательстве рассматриваются системы $\mathbf{R}_{\sigma\delta}$ ($\mathbf{R}_{\delta\sigma}$) всех множеств вида $E=\lim_{n\to\infty}E_n$, где $E_n=\lim_{k\to\infty}E_{nk}$, причем $E_{nk}\in\mathbf{R}$, $\{E_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ возрастает (убывает) для всякого n и $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает (возрастает). Для множеств этого вида определяется $\mu_2 E)=\lim_{n\to\infty}(\lim_{k\to\infty}\mu(E_{nk}))$. Наконец, если $\mathbf{S}$ — система всех $E\subset X$, для которых существуют такие $A\subset\mathbf{R}_{\delta\sigma}$, $B\subset\mathbf{R}_{\sigma\delta}$, что $A\subset E\subset B$ и $\mu_2(A)=\mu_2(B)$, и если положить в таком случае $\bar{\mu}(E)=\mu_2(A)=\mu_2(B)$, то $\mathbf{S}$ есть σ-алгебра, содержащая $\mathbf{R}$, и $\bar{\mu}$ — мера, являющаяся однозначным расширением μ на $\mathbf{S}$.

M. Jiřina

230. **Теорема Витали.** Данжуа (Le théorème de Vitali. Denjoy Arnaud), Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR, 1957, 1, № 1, 11—15 (франц.)

Резюме доклада, сделанного автором на математическом конгрессе в Бухаресте, состоявшемся в мае—июне 1956 г. Даются изложение и анализ некоторых обобщений классической теоремы Витали о возможности покрытия с точностью до меры нуль того или иного множества с помощью попарно непересекающихся множеств некоторой системы, удовлетворяющей определенным условиям. Л. Д. Кудрявцев

231. **Емкость множеств-произведений.** Оцука (Capacité des ensembles produits. Ohtsuka Makoto), Nagoya Math. J., 1957, 12, 95—130 (франц.)

Пусть Ω— метрическое локально компактное пространство, $\rho(P,Q)$ — расстояние между точками $P\in\Omega$, $Q\in\Omega$, $\Phi_0(P,Q)=\log[\rho(P,Q)]^{-1}$, $\Phi_\alpha(P,Q)=[\rho(P,Q]^{-\alpha}$ ($0<\alpha<\infty$), μ — положительная мера Радона с компактным носителем S_μ; потенциал $U_\alpha^\mu(P)=\int_\Omega\Phi_\alpha(P,Q)d\mu(Q)$ ($0\leqslant\alpha<\infty$). Пусть K — компакт, $K\subset\Omega$ и F_K — множество всех мер, для которых $S_\mu\subset K$ и полная масса равна 1. Полагаем $V_\mu^{(\alpha)*}=\sup_{P\in S_\mu}U_\alpha^\mu(P)$,

$$V_\mu^{(\alpha)}=\sup_{P\in\Omega}U_\alpha^\mu(P),\ \alpha\geqslant 0;\qquad V_\alpha^*(K)=\inf_{\mu\in F_K}V_\mu^{(\alpha)*},$$

$$V_\alpha(K)=\inf_{\mu\in F_K}V_\mu^{(\alpha)},$$

если K не пусто; $V_\alpha^*=V_\alpha=\infty$ для пустого множества.

Пусть $X\subset\Omega$ — любое множество. По определению

$$C_i^{(\alpha)}(X)=\begin{cases}\exp\left[\inf_{K\subset X}V_0(K)\right], & \alpha=0\\ \left\{\inf_{K\subset X}V_\alpha(K)\right\}^{-1}, & \alpha>0\end{cases}$$

есть внутренняя α-емкость множества X. Внешняя α-емкость есть $C_e^{(\alpha)}(X)=\sup_{Y\subset X}\inf_{G\supset Y}C_i^{(\alpha)}(G)$, где Y относительно компактно в Ω, G — открытое множество. Определения внутренней и внешней сжатых (restreintes) α-емкостей $C_i^{(\alpha)*}$ и $C_e^{(\alpha)*}$ получаются из определений $C_i^{(\alpha)}$ и $C_e^{(\alpha)}$ заменой $V_\alpha(K)$ на $V_\alpha^*(K)$. По определению множество X имеет α-емкость (α-capacitable), если $C_i^{(\alpha)}(X)=C_e^{(\alpha)}(X)$. Аналогично для сжатых емкостей.

Множество $X\subset\Omega$ называется α-полярным, если для всякого подмножества $Y\subset X$, относительно компактного в Ω, найдется мера μ такая, что $U_\mu^{(\alpha)}(P)=\infty$ как только $P\in Y$.

Имеют место утверждения: Если X α-полярно, то $C_e^{(\alpha)}(X)=0$ ($C_e^{(\alpha)*}(X)=0$). Всякий компакт K нулевой α-емкости (сжатой α-емкости) несет меру единичной полной массы такую, что $U_\alpha^\mu(P)=\infty$ в каждой точке $P\in K$.

Пусть E_n — n-мерное евклидово пространство и $X\subset E_n$. Полагают

$$m_\alpha^{(e)}(X)=\begin{cases}\inf_{\{H_k\}}\sum_{k=1}^{\infty}\{-\log\operatorname{diam}H_k\}^{-1}, & \alpha=,\\ \inf_{\{H_k\}}\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{diam}H_k)^\alpha, & \alpha>0,\end{cases}$$

где $\operatorname{diam}H_k$ есть диаметр множества H_k из счетного покрытия $\{H_k\}$ множества X, причем $\operatorname{diam}H_k<\varepsilon$ ($k=1,2,\ldots$). Мерой Хаусдорфа размерности α мно-

жества $X \subset E_n$ называется $m_\alpha(X) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} m_\alpha^{(\varepsilon)}(X)$, а внутренней мерой размерности α множества X называется $\underline{m}_\alpha(X) \equiv \sup_{K \subset X} m_\alpha(K)$, K — компакты. Если $m_\alpha(X) < \infty$, то $\underline{m}_\alpha(X) = m_\alpha(X)$. Имеют место утверждения: а) Если $m_\alpha(X) > 0$, то $C_e^{(\beta)}(X) > 0$ для всех β, $0 \leqslant \beta < \alpha$, и если $\underline{m}_\alpha(X) > 0$, то $C_i^{(\beta)}(X) > 0$ для всех β, $0 \leqslant \beta < \alpha$. б) Если $C_e^{(\alpha)}(X) > 0$ ($\alpha \geqslant 0$), то $m_\alpha(X) = \infty$; если $C_i^{(\alpha)}(X) > 0$, то $\underline{m}_\alpha(X) = \infty$.

Внутренняя емкостная размерность множества $X \subset \Omega$ определяется как $\inf \alpha$ таких α, что $C_i^{(\alpha)}(X) = 0$, и обозначается $\dim_{ci}(X)$. Аналогично определение $\dim_{ce}(X)$. Если $X \subset E_n$, то хаусдорфова размерность $\dim_h(X)$ определяется как $\inf \alpha$, причем $m_\alpha(X) = 0$. Определение внутренней хаусдорфовой размерности $\dim_{hi}(X)$ получается из предыдущего заменой $m_\alpha(X)$ на $\underline{m}_\alpha(X)$.

Имеет место: Для всякого $X \subset E_n$ верно $\dim_{ce}(X) = \dim_h(X) \geqslant \dim_{ci}(X) = \dim_{hi}(X)$. Если $m_\alpha(X) > 0$, для всякого α, для которого $\underline{m}_\alpha(X) > 0$, то все размерности между собой равны.

В § 1 приводится ряд утверждений, описывающих свойства введенных понятий и связи между ними, а также результаты других авторов относительно емкостей, мер и размерностей множеств вида $X \times Y$, где X и Y — множества двух пространств Ω_1 и Ω_2.

Пусть Ω_1 и Ω_2 — метрические локально компактные пространства и $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ — пространство с метрикой $\rho(P, Q) = \sqrt{\rho_1^2(P_1, Q_1) + \rho_2^2(P_2, Q_2)}$, где $\rho_l(P_i, Q_i)$ — метрика в Ω_i ($i = 1,2$) и $P = \{P_1, P_2\}$, $Q = \{Q_1, Q_2\}$.

В § 2 доказываются теоремы:

1. $C_i^{(\alpha+\beta)}(X \times Y) \geqslant \alpha^{-\alpha/s} \beta^{-\beta/s} (\alpha+\beta)^{(\alpha+\beta)/s} C_i^{(\alpha)}(X) \times C_i^{(\beta)}(Y)$ для $\alpha, \beta > 0$, $C_i^{(0)}(X \times Y) \geqslant 2\sqrt{C_i^{(0)}(X) C_i^{(0)}(Y)}$, $C_i^{(\alpha)}(X \times Y) \geqslant C_i^{(\alpha)}(X)$ для $\alpha > 0$ и непустого Y.

2. Пусть $Z \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, Z относительно компактно в Ω и пусть $X \subset \Omega_1$. Обозначим через Z_{P_1} множество таких $P_2 \in \Omega_2$, что $(P_1, P_2) \in Z$, и пусть $C_e^{(\beta)}(Z_{P_1}) \geqslant b$ ($\beta \geqslant 0$) для всех $P_1 \in X$. Тогда $C_e^{(\alpha+\beta)}(Z) \geqslant \alpha^{-\alpha/s} \beta^{-\beta/s} (\alpha+\beta)^{(\alpha+\beta)/s} b\, C_e^{(\alpha)}(X)$ для $\alpha, \beta > 0$; $C_e^{(0)}(Z) \geqslant \sqrt{2bC_e^{(\alpha)}(X)}$. Имеем также $C_e^{(\alpha)}(Z) \geqslant C_e^{(\alpha)}(X)$ для $\alpha \geqslant 0$.

3. Если $\Omega_1 = E_n$, то $C_i^{(n+\beta)}(X \times Y) \geqslant \gamma(n, b)\, \underline{m}_n(X) \times C_i^{(\beta)}(Y)$, $\beta > 0$, а при условии $m_n(X) < \infty$ имеет место аналогичное неравенство для $\beta = 0$, где $\gamma(n, \beta)$ — положительная постоянная, зависящая только от n и $\beta \geqslant 0$. Если $m_n(X) = \infty$, $C_i^{(0)}(Y) > 0$, то $C_i^{(n)}(X \times Y) = \infty$.

4. Если $\Omega_1 = E_n$, $m_\alpha(X) > 0$ $(0 < \alpha \leqslant n)$, $Y \subset \Omega_2$, $C_i^{\beta}(Y) > 0$ ($\beta \geqslant 0$), то

$$C_i^{\alpha+\beta}(X \times Y) \geqslant \begin{cases} c(X, \alpha, \beta)\, C_i^{(\beta)}(Y), & \text{если } \beta > 0, \\ [c(X, \alpha, 0) - c'(X, \alpha, \beta) \log C_i^{+(0)}(Y)]^{-1}, & \\ \text{если } \beta = 0, & \end{cases}$$

где $c(X, \alpha, \beta)$ и $c'(X, \alpha, \beta)$ — постоянные, зависящие только от X, α, β; $C_i^{+(0)}(Y)$ — внутренняя емкость, построенная для

$$\Phi_0^+(P, Q) = \log^+ [\rho(P, Q)]^{-1}.$$

Верны также теоремы, получающиеся из 1—4 заменой емкости на сжатую емкость. В § 2 доказаны также 3 леммы, имеющие самостоятельный интерес. Из теорем 1, 2, в частности, следуют $\dim_{ci}(X \times Y) \geqslant \dim_{ci}(X) + \dim_{ci}(Y)$ и аналогичные неравенства с заменой $\dim_{ci}$ на $\dim_{ce}$, $\dim_h$, $\dim_{hi}$ (последние два в предположении, что Ω_1 и Ω_2 — евклидовы пространства).

В § 3 отмечается, что оценка сверху емкостей множеств $X \times Y$ через емкости или меры Хаусдорфа множеств X и Y, вообще говоря, невозможна, за исключением нескольких частных случаев.

Имеют место следующие теоремы:

5. Пусть $X \subset E_n$ $(n \geqslant 1)$ — борелевское множество, $m_\alpha(X) < \infty$ и

$$d(P_1) = \lim_{r \to 0} \frac{m_\alpha[X \cap B(P_1, r)]}{r^\alpha} > 0$$

в каждой точке $P_1 \in X$ ($B(P_1, r)$ — шар радиуса r с центром в (P_1)). Пусть Y — β-полярное множество ($\beta \geqslant 0$) в Ω. Тогда $X \times Y$ есть $(\alpha + \beta)$-полярное в $E_n \times \Omega$.

6. Пусть X — замкнутый куб с ребром l в E_n ($n \geqslant 1$) и пусть $Y \subset \Omega$. Тогда

$$C_i^{(n+\beta)^*}(X \times Y) \leqslant (1 + l^2)^{(n+\beta)/s} \left[c_n \left\{ \frac{1}{C_i^{(\beta)^*}(Y)} - 1 \right\}^+ \right]^{-1},$$

если $\beta > 0$; и аналогичное для $\beta = 0$. Такие же неравенства верны для C_e^*.

7. В предположениях теоремы 6 $C_i^{(n+\beta)}(X \times Y) > 0$ тогда и только тогда, когда $C_i^{(\beta)}(Y) > 0$ ($\beta \geqslant 0$). То же верно для C_e.

В § 4 доказывается теорема:

8. Пусть заданы целые числа n, m и числа α, β, $0 < \alpha \leqslant n$, $0 < \beta \leqslant m$. Существуют компакты $X \subset E_n$, $Y \subset E_m$ такие, что $\dim X = \alpha$, $\dim Y = \beta$ и $\dim (X \times Y) = \min(n + \beta, m + \alpha)$.

Из результатов § 2 следует, что $\dim(X) + \dim(Y) \leqslant \dim(X \times Y)$, и очевидны примеры наличия равенства. Из результатов § 3 следует, что $\dim(X \times Y) \leqslant \min\{n + \dim(Y), m + \dim(X)\}$.

Теорема 8 дает пример равенства в последнем неравенстве.

Х. Л. Смолицкий

232. **Емкости борелевских множеств и непрерывность потенциалов.** Кисси (Capacities of borelian sets and the continuity of potentials. Kishi Masanori), Nagoya Math. J., 1957, 12, 195—219 (англ.)

Пусть Ω — локально компактное хаусдорфово пространство, μ — положительная мера с компактным носителем $S_\mu \subset \Omega$, $\mu(1)$ — полная масса; $\Phi(P, Q)$ — функция, определенная в $\Omega \times \Omega$, $P \in \Omega$, $Q \in \Omega$, причем: 1) $0 < \Phi(P, Q) \leqslant \infty$, 2) $\Phi(P, Q) < \infty$, если $P \neq Q$, 3) $\Phi(P, Q) = \Phi(Q, P)$. Интеграл $U^\mu(P) = \int_\Omega \Phi(P, Q)\, d\mu(Q)$ называется потенциалом. Мера μ называется допустимой на компактном множестве K, если $S_\mu \subset K$, $U^\mu(P) \leqslant 1$, $P \in \Omega$; положим $c(K) = \sup_\mu \mu(1)$ на множестве всех допустимых мер множества K. Для произвольного множества $A \subset \Omega$ внутренней емкостью $\mathrm{cap}_i(A)$ называется $\sup c(K)$, $K \subset A$; внешняя емкость определяется так: $\mathrm{cap}_e(A) = \inf_G \mathrm{cap}_i(G)$, G — открытые множества, $G \supset A$; говорят, что A имеет емкость (capacitable), если $\mathrm{cap}_i(A) = \mathrm{cap}_e(A)$.

Если некоторое свойство имеет место во всех точках множества X, за исключением множества A нулевой внешней (внутренней) емкости, то говорят, что это свойство имеет место почти везде (приблизительно везде) в X (quasi, nearly).

Известны теоремы: 1) $\mathrm{cap}_i(\bigcup_1^\infty B_n) \leqslant \sum_1^\infty \mathrm{cap}_i(B_n)$, где B_n — борелевские множества; 2) $\mathrm{cap}_e(\bigcup_1^\infty A_n) \leqslant \sum_1^\infty \mathrm{cap}_e(A_n)$, где A_n — любые множества.

Говорят, что Ф удовлетворяет принципу максимума в смысле Фростмана, если для всякой μ такой, что $U^{\mu}(P) \leqslant 1$, $P \in S_{\mu}$, всюду имеет место $U^{\mu}(P) \leqslant 1$. Равновесной мерой компактного множества K называется такая положительная мера μ_K, что: а) $S_{\mu_K} \subset K$, б) $U^{\mu}{}_K(P) \leqslant 1$ $P \in \Omega$, в) $U^{\mu}{}_K(P) = 1$ приблизительно везде на S_{μ_K}. Известно, что $\mu_K(1) = \mathrm{cap}_i(K)$. Потенциал U^{μ} называется почти непрерывным в Ω, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество G_ε, что $\mathrm{cap}(G_\varepsilon) < \varepsilon$ и U^{μ} непрерывен в $\Omega \setminus G_\varepsilon$. Говорят, что Ф удовлетворяет принципу непрерывности (почти непрерывности), если непрерывность U^{μ} на S_{μ} влечет непрерывность (почти непрерывность) U^{μ} в Ω.

В случае, когда каждое открытое множество имеет положительную емкость, существование равновесной меры каждого компактного множества влечет принцип Фростмана и затем принцип непрерывности. В случае наличия открытых множеств нулевой емкости доказывается: Если каждое компактное множество имеет равновесную меру, то Ф удовлетворяет принципу почти непрерывности.

В § 2 изучается сходимость последовательности потенциалов в предположении слабой сходимости к μ последовательности $\{\mu_n\}$ положительных мер и что Ф удовлетворяет принципу почти непрерывности (непрерывности). Именно, при дополнительных предположениях относительно $\{\mu_n\}$ доказаны утверждения типа

$$\int U^{\mu_n} d\nu = \int U^{\mu} d\nu, \text{ если } U^{\nu} \leqslant 1 \text{ в } \Omega, \lim U^{\mu_n} = U^{\mu} \quad \text{и}$$

получающиеся из них заменой lim на $\underline{\lim}$.

В § 3 в предположении, что каждое компактное множество метризуемо и имеет равновесную меру, доказывается наличие емкости у всякого борелевского и аналитического множества, содержащегося в компактном. Доказывается также наличие равновесной меры для произвольных множеств, содержащихся в компактном.

В § 4 предполагается, что каждое открытое множество имеет положительную емкость. Вводится функция $m^*(P, U^{\mu})$; пусть μ — положительная мера, ω — открытое множество; число k называется E-нижней гранью U^{μ} в ω, если множество точек $Q \in \Omega$, для которых $U^{\mu}(Q) < k$, имеет нулевую внутреннюю емкость; для каждого открытого множества ω существует максимум $m^*(U^{\mu}, \omega)$ E-нижних граней. Положим $m^*(P, U^{\mu}) = \sup m^*(U^{\mu}, \omega(P))$ по всем открытым окрестностям $\omega(P)$ точки P. Известно, что $m^*(P, U^{\mu})$ полунепрерывна снизу Ω в и $U^{\mu}(P) \leqslant m^*(P, U^{\mu}))$ всюду в Ω. U^{μ} называется E-непрерывным в открытом множестве ω, если $m^*(P, U^{\mu})$ непрерывна в ω. Исследуется связь между непрерывностью и E-непрерывностью U^{μ} и совпадением функций $U^{\mu}(P)$ и $m^*(P, U^{\mu})$. Приводим некоторые из доказанных утверждений:

Если в открытом множестве ω существует непрерывная функция $\psi(P)$, отличающаяся от $U^{\mu}(P)$ самое большее на множестве нулевой внутренней емкости, то U^{μ} E- непрерывен в Ω.

Если U^{μ} E-непрерывен в Ω, то существует непрерывная в Ω функция $\psi(P)$, равная $U^{\mu}(P)$ приблизительно всюду в Ω, и $m^*(P, U^{\mu}) = U^{\mu}(P)$ приблизительно всюду в Ω.

Потенциал $U^{\mu}(P)$ совпадает с $m^*(P, U^{\mu})$ в Ω тогда и только тогда, когда для каждой точки $P_0 \in \Omega$

$$\mathrm{cap}_i(\{P \in \omega(P_0), U^{\mu}(P) \leqslant h\}) > 0$$

для любой окрестности $\omega(P_0)$ и любого $h > U^{\mu}(P_0)$.

Х. Л. Смолицкий

233. Абсолютные интеграл и мера Банаха. Богданов Ю. С., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 34—37 (рез. англ.)

Согласно теореме Банаха, существует бесчисленное множество неотрицательных, конечноаддитивных, инвариантных, нормированных функций, определенных на совокупности всех подмножеств окружности. Множества, на которых все функции совпадают, автор называет абсолютно измеримыми в смысле Банаха, а общее значение этих функций—абсолютной мерой Банаха. Аналогично определяются интегрируемость в смысле Банаха и абсолютный интеграл Банаха на окружности. Доказывается, что функция x в том и только в том случае абсолютно интегрируема в смысле Банаха, если на окружности существует такая последовательность точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, что последовательность функций $\frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} x(t+\alpha_\kappa)$ равномерно сходится к постоянной. Эта постоянная и есть абсолютный интеграл Банаха функции x. Приводится пример множества, измеримого по Лебегу, но не абсолютно измеримого по Банаху.

Примечание референта. Абсолютно измеримые линейные множества и их абсолютная мера подробно исследовались Тарским (Tarski A., Fundam. math., 1938, **30**, 218—234). Связь проблемы с нёймановским средним, указанная в реферируемой работе, изучалась (в n-мерном случае) Хадвигером (РЖМат, 1955, 652).

В. А. Рохлин

234. Интерполяция оператора с изменением меры. Стейн, Уэйсс (Interpolation of operators with change of measures. Stein E. M., Weiss G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **87**, № 1, 159—172 (англ.)

Обобщается одна теорема Марцинкевича, касающаяся интерполяции оператора T, переводящего $f \in L^{p_i}(M)$ в $Tf = g \in L^{q_i}(N)$ $(i = 1, 2)$, где M и N — пространства с мерами μ и ν соответственно. Формулировка и доказательство теоремы Марцинкевича приведены в одной статье Зигмунда (РЖМат, 1957, 2980). Основное отличие результата авторов (теорема (2. 9)) от теоремы Марцинкевича состоит в том, что они рассматривают в пространствах M и N различные меры μ_i и ν_i $(i = 1, 2)$ и при интерполяции оператора вводят промежуточные меры.

Этот результат применяется для обобщения некоторых неравенств, содержащих коэффициенты ряда Фурье функции из L^p. Именно, обобщаются неравенства Пейли (другим способом эти обобщения были получены Марцинкевичем и Зигмундом), а также неравенство Питта для функции из L^p с весом x^{α}. А. А. Шнейдер

235. Заметка к теории интеграла Римана. Дрбоглав (Poznámka k theorii Riemannova integrálu. Drbohlav Karel), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 1, 23—26 (чешск.; рез. русск., нем.)

Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена и интегрируема по Риману функция φ, причем $\varphi(t) \geqslant 0$, пусть a — произвольное вещественное число и $b = a + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\, dt$. Доказывается, что для любой ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ имеет место

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\overline{\beta}} f[a + \int_{\alpha}^{t} \varphi(y)\, dy]\, \varphi(t)\, dt,$$

$$\int_{a}^{\underline{b}} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\underline{\beta}} f[a + \int_{\alpha}^{t} \varphi(y)\, dy]\, \varphi(t)\, dt,$$

где чертой сверху и снизу обозначаются соответственно

верхний и нижний интегралы Римана. Далее доказывается, что, например, имеет место формула

$$\int_{\Phi(\alpha)}^{-\Phi(\beta)} F(x)\,dx = \int_{\alpha}^{-\beta} F[\Phi(t)]\,\Phi'(t)\,dt,$$

где $\Phi'(t) \geqslant 0$ и $\Phi'(t)$ интегрируема по Риману на отрезке $[\alpha, \beta]$, а F — произвольная, ограниченная на отрезке $[\Phi(\alpha), \Phi(\beta)]$ функция. Л. Д. Кудрявцев

236. **Одно достаточное условие для интегрирования последовательности функций. Ли Фын-чжан, Цзи Янь-жуй** (Lee F. C., Chi Y. S.), Шусюэ цзиньчжань, 1957, 3, № 4, 655—657 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, определенных на множестве E, такая, что существует положительная интегрируемая функция $\Phi(x)$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x} |f_n(x)| \cdot \operatorname{mes} E\{x : |f_n(x)| > \Phi(x)\} = 0.$$

Если во всех точках E $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)dx.$$

Указан пример, когда теорема Лебега о сходимости последовательности функций уже не действует, а данный критерий еще остается в силе. Ши Чжун-цы

237. **О правиле замены переменного в n-мерном интеграле Лебега для вещественных евклидовых пространств и многообразий. Домбровский** (Zur Substitutionsregel für n-dim. Lebesgue'sche Integrale in reellen Zahlräumen und Mannigfaltigkeiten. Dombrowski Peter. Bonn. math. Schr., 1957, № 1, 98 S., ill.) (нем.)

Работа содержит десять параграфов. В § 1 дается обзор основных результатов работы и объясняются обозначения, применяемые в дальнейшем. В § 2 сообщаются необходимые сведения из метрической теории дифференцируемых отображений в n-мерных евклидовых пространствах. В § 3 изучаются отображения, удовлетворяющие условию Липшица локально и в целом, доказывается их почти всюду однозначная дифференцируемость. Изучается связь измеримости и нульмерности множеств в образе и прообразе для рассматриваемых отображений. Доказывается основная для этой части работы теорема о замене переменного в n-кратном интеграле Лебега для определенного класса взаимно однозначных отображений измеримых множеств n-мерного евклидова пространства в такое же пространство. § 4 содержит краткое изложение теории степени отображения и некоторые ее приложения. Здесь, как указывает автор, он следует в основном концепции, предложенной Нагумо (Nagumo, Amer. J. Math., 1951, 73, 485—495).

§ 5 посвящен изложению необходимых сведений из теории многообразий. В § 6 излагается теория степени отображений Нагумо для непрерывных компактных отображений (в терминологии автора, «eigentliche Abbildungen») и доказывается ряд теорем о степени отображений. В § 7 даются основные сведения о теории дифференцируемости в многообразиях, примыкающие к монографии К. Шевалле «Теория групп Ли» (М., Изд-во ин. лит., 1948) и работам Криккеберга (см., например, РЖМат, 1955, 152). § 8 содержит теорию меры и интегрируемости по Лебегу на множествах некоторого многообразия. В § 9 доказываются основные теоремы работы о замене переменного в интеграле, сначала для определенного класса взаимно однозначных отображений измеримых множеств из многообразия и затем для, вообще говоря, не взаимно однозначных отображений, но уже всего многообразия. Сформулируем кратко вторую теорему.

Пусть M и M' — ориентированные n-мерные многообразия (удовлетворяющие некоторым определенным условиям), M' связно, f — непрерывное компактное отображение M в M', отображающее множество точек, в которых отображение f не регулярно дифференцируемо, в множество меры нуль. Пусть, далее, d — степень отображения f, ω' — некоторая измеримая дифференциальная форма на многообразии M', а $f^*\omega'$ — соответствующим образом определенная форма на многообразии M. Тогда имеет место формула

$$\int_M f^*\omega' = d \int_{f(M)} \omega'. \qquad (1)$$

§ 10 содержит некоторые добавления: конструктивное изложение отдельных вопросов теории степени отображения по Нагумо и связи ее со степенью отображения, введенной в книге П. С. Александрова и Хопфа (Topologie, Berlin, 1935), а также некоторые дополнения к теории многообразий.

Примечание референта. Литературные ссылки по рассматриваемому вопросу в работе даны не полно. Не указано, что формула типа (1) замены переменного в случае областей n-мерного евклидова пространства для достаточно широкого класса просто непрерывных отображений и, следовательно, с определенной точки зрения при весьма общих предположениях, была доказана Радо и Рейхельдерфером (Rado T., Reichelderfer P., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1949, 35 (12), 678—680; см. также РЖМат, 1957, 533). Формула (1) для случая произвольного измеримого множества, лежащего в отображаемой области евклидова пространства, и непрерывного почти всюду дифференцируемого отображения, обладающего нуль-свойством (почти всюду дифференцируемость и нуль-свойство нужны лишь для того, чтобы образ множества точек, в которых отображение не дифференцируемо, имело меру нуль) и, следовательно, в частности, без предположения компактности отображения доказана референтом (РЖМат, 1955, 3737; 1956, 5791). Эта формула имеет вид:

$$\int \varphi[f(x)]\, I(x)\, dE = \int d(y, f, E)\, \varphi(y)\, df(E),$$

где E — измеримое множество, φ — функция, определенная и измеримая на $f(E)$, а $d(y, f, E)$ — степень отображения f относительно множества E. Указанная формула, очевидно, остается верной, если вместо почти всюду дифференцируемости и нуль-свойства отображения f потребовать, чтобы образ множества точек D, в которых f не дифференцируема, имел бы меру нуль, и если положить $\varphi[f(x)]=0$ для $x \in D$. Эту формулу можно обобщить и на случай многообразий. Следует еще отметить работу Ака по тому же кругу вопросов (РЖМат, 1955, 659). Л. Д. Кудрявцев

238. **Преобразование интеграла Стильтьеса—Лебега. Крал Иосеф** (Král Josef), **Марек Иржи** (Marek Jiří), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 1, 86—93 (рез. нем.)

Основной результат статьи состоит в следующем. Пусть существует интеграл Стилтьеса—Лебега

$$\int_a^b \Phi(f(x))\, dg(f(x)).$$

Тогда при достаточно общих предположениях о функциях Φ, g, f, существует и интеграл Стилтьеса—Лебега

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, dg(y)$$

и эти интегралы равны. Н. А. Столяров

239. Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками. II. Гармонические функции на прямоугольных областях. Никольский С. М., Матем. сб., 1957, 43, № 1, 127—144

Статья является продолжением предыдущей (РЖМат, 1957, 6263). Рассматриваются граничные свойства гармонических функций на прямоугольных плоских областях; указывается, что метод доказательств полностью распространяется на случай n переменных, $n > 2$.

Пусть Δ — прямоугольник: $0 < x < \pi$, $0 < y < a$, u — гармоническая в Δ функция, удовлетворяющая условиям $u(0, y) = u(\pi, y) = u(x, a) = 0$, $u(x, 0) = \varphi(x)$. Доказывается, что для того чтобы $u \in H_2\left(r+\frac{1}{p}\right)(\Delta; M)$ (определение H-классов см. РЖМат, 1954, 4381), необходимо и достаточно, чтобы граничная функция φ после нечетного и периодического ее продолжения принадлежала классу $H_2^{(r)*}(cM)$, где c — некоторая постоянная, не зависящая от M (но, вообще говоря, не одна и та же в отдельности для необходимых и достаточных условий).

Пусть, далее, Ω — плоская область, граница Γ которой состоит из конечного числа отрезков, параллельных координатным осям; через s обозначается длина дуги контура Γ, отсчитываемая от одной из угловых точек в положительном направлении, причем через $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N$ обозначаются длины дуг, соответствующие угловым точкам. Пусть на Ω задана гармоническая функция $u(x, y)$, принадлежащая классу $H_p^{(r)}(G)$, где r и

$$\rho = r - \frac{1}{p} > 0$$

— не целые числа, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и пусть $\rho = \bar{\rho} + \alpha$, $\bar{\rho}$ — неотрицательное целое, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда, если $\varphi(s) = u|_\Gamma$ — граничная функция, то

1) $$\varphi \in H_p^{(\rho)}\left(\left[s_i, s_{i+1}\right]\right),\ i = 0, 1, \ldots, N-1, \quad (1)$$

причем

$$\|\varphi\|^{(\rho)}_{L_p([s_i, s_{i+1}])} \leqslant A < \infty \quad (2)$$

(определение нормы $\|\varphi\|^{(\rho)}_{L_p}$ см. РЖМат, 1957, 4691);

2) четные производные $\varphi^{(2l)}$ функции φ удовлетворяют условию

$$\varphi^{(2l)}(s_k + 0) = (-1)^l \varphi^{(2l)}(s_k - 0) \quad (3)$$

при $2l < \bar{\rho} - 1$;

3) при четном $\bar{\rho} = 2k$ и $h > 0$ имеет место неравенство

$$\left[\int_0^h \left|\varphi^{(2k)}(s_i + s) - (-1)^k \varphi^{(2k)}(s_j - s)\right|^p ds\right]^{1/p} \leqslant A h^\alpha \quad (4)$$

В соотношениях (2) и (4)

$$A = c\,\|u\|^{(r)}_{L_{p(\Omega)}},$$

причем постоянная c не зависит от u.

В случае $p = 2$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$, когда $G = \Delta$ является прямоугольником (значит $N = 4$), доказывается обратная теорема: если на контуре Γ прямоугольника Δ задана функция $\varphi(s)$, удовлетворяющая условиям (1), (3), (4), то гармоническая в Δ функция $u(x, y)$, удовлетворяющая граничным условиям $u|_\Gamma = \varphi(s)$, принадлежит классу $H_2^{(r)}(\Delta)$, причем

$$\|u\|^{(r)}_{L_{2(\Delta)}} \leqslant d \sum_k \|\varphi\|^{(\rho)}_{L_2([s_k, s_{k+1}])},$$

где d — постоянная, не зависящая от φ. Отмечается, что аналогичную теорему можно получить и для произвольного p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Л. Д. Кудрявцев

240. Теоремы вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках. Никольский С. М., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 1, 35—37

Доказывается теорема вложения для функций многих переменных, которые имеют по разным переменным производные, вообще говоря, различных порядков, причем эти производные (и это делается впервые) предполагаются различным образом нормированными, т. е. принадлежащими, вообще говоря, различным пространствам L_p. Полученные результаты являются развитием предыдущих исследований С. Л. Соболева, В. И. Кондрашова (Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950) и автора (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38, 244—273). Рассматриваются вещественные измеримые функции, определенные на n-мерном евклидовом пространстве R^n. Пусть M, r_i, p_i — положительные вещественные числа и $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, пусть $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$, где $\bar{r}_i$ — неотрицательное целое, $0 < \alpha_i \leqslant 1$. Функция f называется функцией класса $H^{(r_i)}_{p_i x_i}(M)$, если у нее существует обобщенная производная $\partial^{\bar{r}_i} f / \partial x_i^{\bar{r}_i}$, которая, как и сама функция, принадлежит пространству $L_p(R^n)$, причем при любом вещественном h в случае $0 < \alpha_i < 1$ для первой разности $\Delta^{(1)}_{x_i}\left(\frac{\partial^{\bar{r}_i} f}{\partial x_{ii}^{\bar{r}_i}}, h\right)$ имеет место

$$\left\| \Delta^{(1)}_{x_i}\left(\frac{\partial^{\bar{r}_i} f}{\partial x_{ii}^{\bar{r}_i}}, h\right)\right\|_{L_p(R^n)} < M |h|^{\alpha_i},$$

а в случае $\alpha = 1$ для второй разности

$$\left\| \Delta^{(2)}_{x_i}\left(\frac{\partial^{\bar{r}_i} f}{\partial x_i^{\bar{r}_i}}, h\right)\right\|_{L_p(R^n)} < M |h|$$

Далее по определению

$$H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(M) = \bigcap_{i=1}^n H^{(r_i)}_{p_i x_i}(M)$$

и

$$H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n} = \bigcup_{M > 0} H^{(r_1, \ldots, r_n)}_{p_1, \ldots, p_n}(M).$$

Основная теорема состоит в следующем: Пусть $1 \leqslant p_i \leqslant q \leqslant \infty$, n и m — натуральные числа, $1 \leqslant m < n$, $\rho_i = r_i \chi / \chi_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где

$$\chi = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{k=1}^n \frac{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{q}}{r_k} & -\frac{1}{q}\sum_{k=1}^n \frac{1}{r_k} \\ -\sum_{k=m+1}^n \frac{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{q}}{r_k} & 1 - \frac{1}{q}\sum_{k=m+1}^n \frac{1}{r_k} \end{vmatrix},$$

$$\varkappa_i = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{p_k} - \frac{1}{p_i}}{r_k},$$

и пусть $f \in H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(M)$. Тогда при любых фиксированных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ функция f на соответствующей m-мерной гиперплоскости R^m, как функция от переменных $x_1, \ldots, x_m$, принадлежит к классу $H_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_m)}(M^*)$, причем выполняется неравенство

$$\left\| f \right\|_{L_q(R^m)} + M^* < c \left(\min_i \left\| f \right\|_{L_{p_i}(R^n)} + M \right),$$

где постоянная c не зависит от f и M. Полученный результат точен в следующем смысле:

если $1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k r_k} > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in H^{(r_1,\ldots,r_n)}_{p_1,\ldots,p_n}(M)$, не принадлежащая к классу $H_q^{(\rho_1,\ldots,\rho_{i-1},\rho_i+\varepsilon,\rho_{i+1},\ldots,\rho_n)}$.

Указывается, что теорема остается верной и для соответствующих классов $H^{(r_1,\ldots,r)_n}_{p_1,\ldots,p_n}(M^*)$ периодических функций, определенных аналогичным образом. Приводятся некоторые обобщения сформулированной теоремы для случая n-мерных областей $G \subset R^n$, в частности для случая, когда область G является параллелепипедом или когда она представляет собой декартово произведение двух областей $G' \subset R^m$ и $G'' \subset R^{n-m}$ с достаточно гладкой границей: $G = G' \times G''$. Отмечается, что из основной теоремы вытекает соответствующая теорема о компактности аналогично тому, как это делалось автором ранее (РЖМат, 1957, 4691).

Л. Д. Кудрявцев

241. К теоремам вложения. Бугров Я. С., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 4, 531—534

Доказывается теорема: Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, функция $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ определена на m-мерной гиперплоскости $R^m = \{x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$ n-мерного евклидова пространства R^n точек $(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$, и пусть $\varphi \in L_p(R^m)$.

Тогда функция

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{R^m} K(t_1, \ldots, t_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)\, \varphi(t_1 + x_1, \ldots, t_m + x_m)\, dt_1 \ldots dt_m,$$

где

$$K(t_1, \ldots, t_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \int_{R^m} \exp\left[-\sum_1^m \left(\left| u_k \right| + 1 \right) \left(\sum_{m+1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp\left[i \sum_1^m u_k t_k \right] du_1 \ldots du_m,$$

обладает следующими свойствами: 1) $f \in H^{\left(\frac{n-m}{p}\right)}_{pn}$, 2) $f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ (определение H-классов см. РЖМат, 1954, 4381), 3) функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет несмешанные производные любого порядка такие, что при произвольном $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\left\| \left[1 - \exp\left(-\sum_{m+1}^n x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{s+\bar{r}-\frac{n-m}{p}+\varepsilon} f^{\bar{r}+s}_{x_k^{\bar{r}+s}}(x_1, \ldots, x_n) \right\|$$

$$\| L_p(R^n) \leqslant C \| \varphi \|_{L_p(R^m)}, \quad s = 1,2 \ldots, \quad k = 1,2, \ldots, \quad n,$$

где постоянная C не зависит от функции φ.

В случае $p = 2$ утверждается, что последнее неравенство остается справедливым и при $\varepsilon = 0$. Отмечается, что эта теорема является развитием соответствующих исследований С. М. Никольского (РЖМат, 1954, 4381) и референта (РЖМат, 1957, 295).

Аналогичная теорема о продолжении функций доказывается в несколько усиленной форме и для круга на плоскости: именно, показывается, что всякую функцию $\varphi(\theta) \in L_p$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, заданную на границе γ круга σ, можно продолжить внутрь этого круга в гармоническую функцию $u(\rho, \theta)$ класса $H_p^{(1|p)}$, причем при любом $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\left\| \frac{\partial^l u}{\partial \rho^l} \left(1 - \rho\right)^{l - \frac{1}{p} + \varepsilon} \right\|_{L_p(\sigma)} \leqslant C \left\| \varphi \right\|_{L_p(\gamma)},$$

$$\left\| \frac{\partial^l u}{\partial \theta^l} \left(1 - \rho\right)^{l - \frac{1}{p} + \varepsilon} \right\|_{L_p(\sigma)} \leqslant C \left\| \varphi \right\|_{L_p(\gamma)},$$

где постоянная C также не зависит от функции φ.

Л. Д. Кудрявцев

242. Об индикатрисе Банаха. Лозинский С. М., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 70—87 (рез. англ.)

Для непрерывной в промежутке $[0,1]$ функции $X = X(t)$ Банах ввел в рассмотрение (Fundam. math., 1925, 7, 225—236) функцию $N(x, X)$, определенную при всех вещественных значениях x как число (возможно — и бесконечное) различных $t \in [0,1]$, удовлетворяющих соотношению $X(t) = x$. Автор обобщает определение функции $N(x, X)$ на класс U_1 функций $X = X(t)$, конечных в $[0,1]$, но могущих иметь разрывы первого рода.

Теорема 1. Для любой $X \in U_1$ функция $N(x, X)$ измерима, и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} N(x, X)\, dx$ равен полной вариации X в $[0,1]$.

Эта теорема обобщает аналогичную теорему Банаха, относящуюся к непрерывным функциям.

Говорят, что последовательность функций $\{X_n\}$ сходится по вариации к функции X_0 (и пишут $X_n \overset{v}{\to} X_0$), если 1) все эти функции ограниченной вариации, 2) $\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X_0(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, 3) полная вариация X_0 служит пределом для полной вариации X_n.

Теорема 2. Пусть $X_n \overset{v}{\to} X_0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} | N(x, X_n) - N(x, X_0) |\, dx = 0.$$

Результаты автора были им ранее опубликованы без доказательств (Докл. АН СССР, 1948, **60**, № 5, 765—767).

Г. М. Фихтенгольц

243. О некоторых классах бесконечно дифференцируемых функций. Лалагю (Sur certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables. Lalague Pierre),

Ann. scient. École norm. supér., 1955, **72**, № 3, 237—298 (франц.)

См. реф. 249Д.

244. О квазианалитических (B) функциях. Гаркави А. Л., Доповіді та повідомлення. Львівськ. ун-т, 1957, вип. 7, ч. 3, 281—284

Через $B\{n_k\}$ обозначается класс квазианалитических в смысле С. Н. Бернштейна функций. Бесконечно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ называется квазианалитической (D) (в смысле Данжуа), если

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n^{-\frac{1}{n}} = \infty, \text{ где } M_n = \max_{[a,\,b]} \left| f^{(n)}(x) \right|.$$

Без доказательства формулируются следующие предложения:

Теорема. Для того чтобы все функции класса $B\{n_k\}$ являлись квазианалитическими (D), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая четная нормально возрастающая весовая функция $\Phi(x)$, что выполняются неравенства

$$\ln \Phi(n_{k+1}) \leqslant n_k \, (k = 1,2, \ldots).$$

Необходимое и достаточное условие в иных терминах ранее было дано С. Н. Мергеляном (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **37**).

Теорема. Любая непрерывная на $[a, b]$ функция $\varphi(x)$ может быть псевдоаналитическим продолжением некоторой квазианалитической на $[b, c]$ функции.

В. С. Виденский

245. Нули неквазианалитического класса функций в R^n. Неквазианалитическое продолжение. Салинас (Ceros de las funciones de una clase no cuasi-analitica en R^n. Prolongación no cuasi-analitica. Salinas Baltasar R.), Collect. math., 1957, **9**, № 1, 65—76 (исп.)

Рассматривается семейство $\mathfrak{D}^n$ бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$, где x — точка n-мерного евклидова пространства R^n. Через $\mathfrak{C}^n(m_v, G)$ обозначается множество функций $f(x)$, заданных на открытом множестве G из R^n и таких, что

$$\left| \frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_n} f(x)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \right| \leqslant m_p \, (p = p_1 + \ldots + p_n; \quad p_v = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть E — топологическое пространство со второй аксиомой счетности, а $\mathfrak{F}$ — полное линейное пространство функций, вещественных и непрерывных на E. Класс $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$ называется свободным, если для каждой точки x из E и любой окрестности U_x точки x существует функция f из $\mathfrak{F}^*$, которая равна нулю на дополнении к U_x и не обращается в нуль в точке x.

Теорема 2. Если $\mathfrak{F}_{0,1}$ — свободный класс, то для каждой замкнутой области $F_0 \subset E$ существует такая функция $f(x) \in \mathfrak{F}_{0,1}$, которая обращается в нуль точно на F_0.

Теорема 4. Если $\mathfrak{F}_{0,1}$ — свободный класс и если существует функция $g \leqslant 1$ из $\mathfrak{F}_{0,1}$, которая принимает значения 0 и 1 соответственно на замкнутых непересекающихся множествах F_0 и F_1, то можно указать такую постоянную $a = a(F_0, F_1)$, $0 < a \leqslant 1$ и функцию $f \leqslant a$ из $\mathfrak{F}_{0,1}$, которая принимает значения 0 и a на множествах F_0 и F_1.

Доказывается, что для того чтобы множество $\mathfrak{C}^n(m_v, R^n)$ было квазианалитическим классом, необходимо и достаточно, чтобы $\{m_v\}$ удовлетворяла условию Данжуа—Карлемана.

Отметим, что в статье не цитируются заметки Лелонга (Lelong P., C. r. Acad. sci., 1951, **232**, 1178—1180) и А. Л. Кузьминой (Докл. АН СССР, 1951, **80**, 853—856), в которых этот результат был установлен впервые.

Теорема 8. Если $f \in \mathfrak{D}^n$ и

$$M_p = \sup \left| \frac{\partial^{p_1 + \cdots + p_n} f(x)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \right| \quad (x \in R^n, \; p = p_1 + \ldots + p_n),$$

то $M_p < k^{p_n} M_0^{1 - p/q} M_q^{p/q}$ при $p \leqslant q$, где $k_n < 8\, e k_{n-1} < 2\,(4e)^{n-1}$. Это предложение обобщает соответствующую теорему А. Н. Колмогорова для одной переменной.

Теорема 9. Пусть F_0 и F_1 — замкнутые непересекающиеся множества из R^n. Если $\overline{\mathfrak{C}}^n(m_v)$ — неквазианалитический класс функций, то существует функция $f(x) \in \overline{\mathfrak{C}}^n(m_v)$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, равная соответственно нулю и единице на F_0 и на F_1. В. С. Виденский

246. К вопросу о критериях компактности в функциональных пространствах. Судаков В. Н., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 221—224

Исследуется независимость условий в критериях компактности множеств функций G, лежащих в тех или иных функциональных пространствах R. В частности устанавливается зависимость требований в критериях компактности А. Н. Колмогорова, А. Н. Тулайкова, Мазура—Натансона и др.

Именно, показывается, что в ряде случаев условие ограниченности множества функций G в пространстве R является следствием равномерного приближения элементов $x \in G$ элементами Ux, где U — некоторый оператор, участвующий в формулировке рассматриваемого критерия компактности. Например, для критерия А. Н. Колмогорова (Göttinger Nachr., 1931, 60—63) U является оператором усреднения Стеклова. Л. Д. Кудрявцев

247. Представление функции двух переменных в виде $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$. Лидягон, Сухак ка мулли, Математика и физика, 1957, **1**, № 4, 22—28 (кор.; рез. русск.)

Получено необходимое и достаточное условие для представимости функции двух переменных в виде $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$.

Автор называет: 1) C-разбиением разбиение замкнутого квадрата E, если множество Σ всех классов можно упорядочить изоморфно замкнутому сегменту так, чтобы на каждом сегменте квадрата, параллельном x- или y-оси, классы в топологии Σ сменялись непрерывно; 2) прозрачным такое разбиение, что из попарной эквивалентности трех вершин любых двух прямоугольников с параллельными осям сторонами следует эквивалентность четвертых вершин; 3) циклической последовательность четырех точек, эквивалентных вершинам прямоугольника, стороны которого параллельны осям; 4) арифметической последовательность точек $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+1}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ — все циклические (в резюме опечатка: напечатано $(i = 1, 2, 3, 4)$); 5) CA-разбиением прозрачное C-разбиение, не имеющее бесконечной арифметической последовательности.

Доказана теорема: Чтобы функция $f \in C(E)$ была представимой в виде $\chi[\varphi(x) + \psi(y)]$, где χ, φ и ψ непрерывны, необходимо и достаточно, чтобы разбиение E на множества уровня функцией f было равно или меньше некоторого CA-разбиения. В. И. Арнольд

248. О ε-длине. Перкаль (On the ε-length. Perkal J.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, Cl. 3, **4**, № 7, 399—403 (англ.), Бюл. Польской АН, 1956, Отд. 3, **4**, № 7, 391—395

Если под расстоянием $\rho(X, Y)$ двух кривых X и Y друг от друга мы понимаем наибольшее расстояние точек одной из этих кривых от другой кривой, то для произвольной спрямляемой кривой X и произвольных положительных чисел μ и ν существует кривая Y такая, что $\rho(X, Y) < \mu$ и длины кривых X и Y различаются больше чем на ν. В этом смысле длина кривой является разрывным функционалом. Этот факт приводит к парадоксу, что длины эмпирических кривых увеличиваются, иногда в несколько раз, с увеличением точности измерения. Проблема устранения этого парадокса важна для естественных наук, в частности для географии. Для этой цели Штейнхаус ввел понятие длины порядка k (k — положительное целое число), равной ожидаемому числу точек пересечения данной кривой с линиями семейства параллельных, равно отстоящих друг от друга прямых в плоскости кривой, когда положение кривой относительно семейства параллельных случайным образом меняется и в каждом положении имеется не более k точек пересечения; если более чем k точек пересечения, их не учитывают. Понятие длины k-го порядка помогает решать много проблем, связанных с измерением длины, однако его часто недостаточно, так как: 1) установление порядка длины — условность, которая не характеризует точности измерения в единицах длины; 2) исследователи природы желают, чтобы приближенная длина данной кривой была действительной длиной некоторой кривой, приближающейся к данной, и они хотят знать, какие кривые измеряются точно и какие только приблизительно; понятие длины k-го порядка не удовлетворяет этим требованиям; 3) измерение длины k-го порядка часто связано с практическими трудностями.

Автор вводит поэтому новое понятие длины порядка ε, где ε — длина отрезка, которая устанавливается условно. ε-соседством кривой X называется множество всех точек плоскости, расстояние которых от данной кривой X не более ε. Площадь $\alpha_\varepsilon(X)$ этого ε-соседства является непрерывной и монотонно возрастающей функцией аргументов ε и X. Длину $L_\varepsilon(X)$ порядка ε кривой X определяем формулой

$$L_\varepsilon(X) = \frac{\alpha_\varepsilon(X) - \pi\varepsilon^2}{2\varepsilon};$$

$L_\varepsilon(X)$ — непрерывная функция аргументов ε и X и возрастающая функция относительно X. Фаст (H. Fast) показал, что $L_\varepsilon(X)$ — убывающая функция относительно ε и что длина порядка ε является обычной длиной так называемых 2ε-выпуклых кривых (Кривая X называется ε-выпуклой, если для каждой точки этой кривой существует окружность с радиусом ε, касающаяся кривой в этой точке и не имеющая других общих точек с кривой). Для других кривых длина порядка ε меньше, чем обычная длина. По теореме Минковского длина порядка ε спрямляемой кривой стремится к ее обычной длине, если ε стремится к нулю. Понятие длины порядка ε обладает поэтому всеми требуемыми свойствами.

Длину порядка ε можно легко измерить с помощью кружкового лонгиметра, сконструированного автором. Идея этого лонгиметра основывается на известной теореме, по которой ожидаемое число точек правильной решетки, находящихся внутри заданной области, пропорционально площади этой области, если относительное положение решетки и области изменяется случайным способом.

M. Warmus

249 Д. О некоторых классах бесконечно дифференцируемых функций. Лалагю (Sur certaines classes de fonctions indéfiniment dérivables. Lalaguë Pierre. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Paris, 1956, Paris, Gauthier-Villars, 1955, 64 p.) (франц.)

Изучаются классы бесконечно дифференцируемых почти периодических функций $C^E\{M_n\}$ со спектром, принадлежащим данному множеству E. Установлены необходимые и достаточные условия для того, чтобы класс $C^E\{M_n\}$ был квазианалитическим. Исследована проблема эквивалентности двух классов $C^E\{M_n\}$ и $C^E\{M'_n\}$. Эта проблема рассмотрена не только для нормы $\sup|f^n(x)|$, но и для различных других норм. Последняя глава посвящена вопросу, первоначально рассмотренному Мандельбройтом и состоящему в следующем: если функция $f(x)$ принадлежит к данному классу $C\{M_n\}$ на отрезке $[-1, 1]$, то к какому классу принадлежит функция $F(\theta) = f(\cos\theta)$, и обратно, к какому классу принадлежит $f(x)$, если известен класс, к которому принадлежит $F(\theta) = f(\cos\theta)$? Эта же работа была опубликована в виде статьи (Реф. 243).

В. С. Виденский

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

250. О значении структурных свойств функции для сходимости ее ортогонального разложения. Алексич, Кралик (Über die Bedeutung der strukturellen Eigenschaften einer Funktion für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen. Alexits G., Králik D.), Acta scient. math., 1957, **18**, № 1-2, 131—139 (нем.)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — некоторая ортонормированная система функций и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty\right)$ — ряд Фурье некоторой функции $f(x)$. При дополнительных предположениях на систему $\{\varphi_n(x)\}$, дается достаточный критерий, выраженный непосредственно через свойства функции $f(x)$, сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\,\lambda(n), \tag{1}$$

где $\lambda(x)\uparrow$ является вогнутой функцией.

Доказывается

Теорема 1. Если

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k\varphi_k(x) \right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2} = O\left\{\omega_2\left(\frac{1}{n}, f\right)\right\},$$

где квадратичный модуль непрерывности $\omega_2(\delta, f)$ удовлетворяет требованию

$$\omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi(\delta^{-1})}}\right) \quad (\Phi(x)\uparrow), \tag{2}$$

то из условия

$$\int_1^{\infty} \frac{\lambda'(x)}{\Phi(x)}\,dx < \infty \tag{3}$$

вытекает, что сходится ряд (1).

Далее показывается, что для тригонометрической системы сходимость ряда (1) эквивалентна выполнению условий (2) и (3).

Из полученных результатов авторы как следствие получают, например, теорему Колмогорова—Селиверстова—Плеснера о сходимости почти всюду некоторого класса тригонометрических рядов, а также результат референта, относящийся к безусловной сходимости рядов по ортогональным полиномам, и др.

Далее даются локальные достаточные условия для сходимости или для суммируемости некоторых ортогональных разложений.

Для случая тригонометрической системы аналогичного типа локальные условия для сходимости почти всюду были ранее даны Алексичем, С. Б. Стечкиным и референтом.

Примечание референта. По-видимому, авторам неизвестна работа референта (РЖМат, 1954, 3285), в которой для случая тригонометрической системы были даны достаточно широкие условия (функция $\lambda(x)$ не обязательно вогнута), при которых сходимость ряда (1) эквивалента сходимости интеграла

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x+t)-f(x-t)]^2\,\alpha(t)\,dt\,dx.$$

(где функция $\alpha(t)$ строится по $\lambda(n)$ или, наоборот, $\lambda(n)$ строится по функции $\alpha(t)$), т. е. сходимость ряда (1) может быть непосредственно выражена через свойства функции $f(x)$. П. Л. Ульянов

251. Некоторые дополнительные асимптотические свойства констант Фурье. Чжэнь Юн-мин (Some further asymptotic properties of Fourier constants. Chen Yung-ming), Math. Z., 1958, **69**, № 2, 105—120 (англ.)

Рассматриваются те же вопросы, что и в предыдущей статье автора (РЖМат, 1958, 7624), но результаты даются в более общем виде. Всего в статье 24 теоремы, большинство из которых дано без доказательства. Приведем некоторые результаты.

Через $\Phi(x)$ обозначается неотрицательная, заданная на $(0,\infty)$ функция, для которой $\Phi(x)/x$ не убывает, а $\Phi(x)/x^k$ убывает при некотором $k>1$. Через $\Psi(x)$ обозначается возрастающая, заданная на $(0,\pi)$ функция, для которой $\Psi(x)/x^{1-\delta}$ убывает при достаточно малом $\delta>0$. Через $\Omega_p(x)$ $(p>1)$ обозначается положительная, возрастающая, заданная на $(0,\pi)$ функция, для которой $\Omega_p(x)/x^{\delta}$ возрастает, а $\Omega_p(x)/x^{p-1-\delta}$ убывает при достаточно малом $\delta>0$. Через $J(x)$ обозначается функция

$$J(x)=\int_1^q K(t)\,x^t\,dt \quad (q>1),$$

где $K(t)$ — некоторая неотрицательная, интегрируемая на $(1, q)$ функция. Пусть

$$f(x)=\frac{1}{2}\lambda_0+\sum_1^\infty \lambda_n\cos nx,\quad g(x)=\sum_1^\infty \lambda_n \sin nx,$$

где $\lambda_n\downarrow 0$.

Теорема 1. Условие

$$\sum_1^\infty \frac{\Phi(n\lambda_n)}{n^2\,\Psi(n^{-1})}<\infty \qquad (1)$$

равносильно условию

$$\Phi(|g(x)|)/\Psi(x)\in L(0,\pi).$$

Теорема 2. Условие (1) достаточно для того, чтобы

$$\Phi(|f(x)|)/\Psi(x)\in L(0,\pi).$$

Теоремы 3 и 4. Условие

$$\sum_1^\infty n^{p-2}\lambda_n^p\ \Omega_p(n^{-1})<\infty$$

равносильно каждому из условий:

$$\Omega_p(x)\,|f(x)|^p\in L(0,\pi),\quad \Omega_p(x)\,|g(x)|^p\in L(0,\pi).$$

Теоремы 19 и 20. Условие

$$\sum_1^\infty \frac{J(n\lambda_n)}{n^2\,\Psi(n^{-1})}<\infty$$

равносильно каждому из условий:

$$J(|f(x)|)/\Psi(x)\in L(0,\pi),\quad J(|g(x)|)/\Psi(x)\in L(0,\pi).$$

Рассматриваются также функции, аналогичные $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, обладающие некоторыми дополнительными свойствами, например супермультипликативностью (т. е. $\Phi(xy)\geqslant\Phi(x)\,\Phi(y)$). Приводятся теоремы, аналогичные указанным выше, для степенных рядов с незозрастающими коэффициентами и для преобразования Лапласа от невозрастающей функции.

В заключение дается теорема 24, аналогичная одному результату Надя (Sz-Nagy) о сходимости ряда $\sum(|a_n|+|b_n|)/n^\gamma$ где a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции, имеющей ограниченную вариацию на $(0, 2\pi)$, за исключением окрестностей конечного числа особых точек некоторого типа. А. А. Шнейдер

252. О проблеме Зигмунда. Лу Цин-цзюнь (On a problem of Zygmund. Loo Ching-tsün), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957, **1**, № 6, 363—368 (англ.)

Пусть 2π-периодическая, непрерывная функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,2\pi]$. Зигмунд доказал, что если модуль непрерывности функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(\delta)\leqslant C\log^{-\eta}\frac{1}{\delta}\ (\eta>2), \qquad (1)$$

где C — постоянная, то ряд Фурье функции $f(x)$ всюду абсолютно сходится. Условие (1) несколько было ослаблено Чэнь Цзянь-гуном (реф. 262). С другой стороны, известно, что теорема Зигмунда становится неверной при предположении $\eta\leqslant 1$.

В работе дается ответ в случае, когда $1<\eta\leqslant 2$. Именно справедлива.

Теорема 1. Существует функция ограниченной вариации $F(x)$, ряд Фурье которой абсолютно не сходится, хотя выполнено условие (1) при $\eta=2$.

Кроме того, исследуется вопрос об абсолютной суммируемости рядов Фурье функций с ограниченным изменением, которые удовлетворяют условию (1) при некотором η из полуинтервала $(1,2]$. В работе имеются опечатки. П. Л. Ульянов

253. Об одной теореме Винера—Леви. Кахан (Sur un théorème de Wiener—Lévy. Kahane Jean-Pierre), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 13, 1949—1951 (франц.)

Пусть A есть класс 2π-периодических комплекснозначных функций, ряды Фурье которых сходятся абсолютно; A_r — часть этого класса, состоящая из функций, принимающих действительные значения.

Если $f(x)\in A_r$, $F(x)$ — аналитическая функция действительного переменного, то, согласно теореме Винера—Леви, функция $\Phi(x)\equiv F(f(x))$ принадлежит классу A. Автор показывает, что это утверждение, вообще говоря, перестает быть верным, если вместо аналитичности функции $F(x)$ потребовать лишь ее принадлежность к классу функций, квазианалитических в смысле Данжуа—Карлемана. А. Л. Гаркави

254. О сходимости и суммируемости одного ряда, связанного с продифференцированным рядом Фурье. Ратх, Моханти (On the convergence and summability of a series associated with the derived Fourier seri-

es. Rath P. C., Mohanty R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 11—17 (англ.)

Рассматривается ряд

$$\sum_1^\infty S_n(x)/n, \qquad (1)$$

где через $S_n(x)$ обозначены частные суммы в точке x продифференцированного ряда Фурье функции $f(x)\in L(-\pi,\pi)$, имеющей период 2π. Как показывают приведенные ниже результаты, ряд (1) ведет себя в некоторых случаях сходно с рядом, сопряженным к ряду Фурье функции $f(x)$.

Положим

$$g(t)=\{f(x+t)-f(x-t)\}/4\sin\frac{t}{2},$$

$$G(t)=\int_t^\pi g(u)\operatorname{cosec}\frac{1}{2}u\,du \qquad (0<t<\pi).$$

Предполагая существование конечного предела $\lim_{t\to+0}G(t)$, автор доказывает, что:

1) ряд (1) суммируется (C,ρ) при $\rho>1$;

2) ряд (1) суммируется $(C,1)$ при дополнительном условии

$$\int_0^t|g(u)|\,du=O(t);$$

3) ряд (1) сходится при дополнительном условии

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{v\to0}}\int_{kv}^{\eta}\left|\frac{g(t+v)}{t+v}-\frac{g(t)}{t}\right|dt=0 \quad (0<\eta\leqslant\pi).$$

Доказывается также, что для логарифмической суммируемости первого порядка ряда (1) достаточно, чтобы при $t\to+0$

$$\int_0^t|g(u)|\,du=o(t\log t^{-1}),\quad G(t)=o(\log t^{-1}),$$

$$\int_t^\pi\frac{G(u)}{u}\,du=o(\log t^{-1}).$$

А. А. Шнейдер

255. О тригонометрических рядах, расходящихся в каждой точке. Стечкин С. Б., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, 21, № 5, 711—728

Основные результаты реферируемой работы были без доказательства опубликованы ранее (Успехи матем. наук, 1951 6, № 2, 148—149). В § 1 реферируемой работы доказывается следующее утверждение: Действительная и мнимая части известного расходящегося степенного ряда Лузина являются всюду расходящимися тригонометрическими рядами. Заметим, что Лузиным была доказана расходимость только почти всюду действительной части степенного ряда.

Далее автор ставит задачу о возможной скорости убывания коэффициентов тригонометрических рядов, которые (вместе с сопряженными рядами) всюду расходятся. В § 2 автор на это дает ответ. Именно, справедлива:

Теорема 2. Какова бы ни была последовательность чисел $a_n\downarrow0$ с $\sum_{n=1}^\infty a^2{}_n=\infty$, найдется тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (1)$$

который одновременно с сопряженным рядом всюду расходится и при этом $a_n=O(a_n)$, $b_n=O(a_n)$.

Из этой теоремы, как следствие, вытекают результаты Недера, Харди—Литтлвуда и Р. О. Кузьмина, относящиеся к расходимости степенных рядов. Кроме того, теоремой 2 автор, в частности, впервые дает доказательство утверждения А. Н. Колмогорова (относящегося к расходимости всюду некоторого ряда (1), если $a_n\downarrow0$ и $\sum_{n=1}^\infty a^2{}_n=\infty$), доказательства которого в литературе не было.

Примечание референта. В последнее время также появилась работа Дворецкого и Эрдёша (РЖМат, 1956, 8727), посвященная аналогичным вопросам, но относящаяся к степенным рядам.

Именно они показали, например, что если $a_n\downarrow0$ и $\sum_{n=1}^\infty a^2{}_n=\infty$, то существует степенной ряд

$$\sum_{k=1}^\infty a_{n_k}z^{n_k}\quad(n_1<n_2<\ldots),$$

который на единичной окружности всюду расходится. Ясно, что порядок n-го коэффициента ряда в этом случае есть a_n. П. Л. Ульянов

256. О риссовской суммируемости ряда Фурье. Сян Фу-чжэн (On Riesz summability of Fourier series. Hsiang Fu Cheng), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 37—44 (англ.)

Доказывается, что ряд Фурье четной функции $\varphi(t)$ суммируется методом $(R,\exp\mu,2)$ к нулю в точке $t=0$, если: при достаточно больших x $\mu(x)$ монотонно возрастает (и стремится к ∞ при $x\to\infty$), $\mu'(x)$ монотонно убывает (и стремится к нулю при $x\to\infty$), выполняются неравенства

$$\{\mu'(x)\}^2\geqslant-2\mu''(x)\geqslant0,\qquad\{\mu'(x)\}^3\geqslant-\{3\mu'(x)\mu''(x)+\mu'''(x)\},$$

существует функция

$$U(x)=\int_x^\infty\{u\,\mu(u)\}^{-1}\,du,$$

для которой

$$x\{\mu'(x)\}^\Delta\;U\left(\frac{1}{\mu'(x)}\right)=O(1)$$

при некотором Δ $(0<\Delta<2)$, $x^\Delta U(x)$ монотонно возрастает для некоторого Λ $(0<\Lambda<2-\Delta)$, для функции $\varphi(t)$ выполняется соотношение

$$\int_0^t\varphi(u)\,du=o\left\{t^\Delta\;U\left(\frac{1}{t}\right)\right\}\quad(t\to+0).$$

Если еще для коэффициентов Фурье выполняются неравенства

$a_n>-K[\exp\mu(n)-\exp\mu(n-1)]/\exp\mu(n)$ $(K>0)$,

то, на основании результата Харди, ряд Фурье будет сходиться к нулю в точке $t=0$.

Имеются опечатки в формулировках условий. Так, например, на стр. 37 в условии (i) напечатано $\mu(x)>1$ вместо $\mu(x)\to\infty$. На стр. 43 в случае (c) пропущен минус в (ii), кроме того, случай (c) сформулирован неточно: показатель a в (i) нужно подчинить некоторым условиям, иначе результат может оказаться неверным (см., например, РЖМат, 1957, 6960). А. А. Шнейдер

257. Обобщение некоторых результатов С. М. Никольского и А. Ф. Тимана. Ганзбург И. М., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 727—730

Пусть $MH^{(\alpha)}$ — класс функций $f(x)$, заданных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M|x' - x''|^{\alpha},\ 0 < \alpha \leqslant 1,$$

для любых x', $x'' \in [-1,1]$.

Положим

$$\sigma_{n,k}(f,x) = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=n-k}^{n} s_\nu(f,x),\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant k \leqslant n,$$

где $s_\nu(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\nu} a_p \cos p \arccos x$,

$$a_p = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(u)\cos p \arccos u}{\sqrt{1-u^2}}\,du,$$

и пусть

$$E_n(MH^{(\alpha)}, x) = \sup_{f \in MH^{(\alpha)}} |f(x) - \sigma_{n,k}(f,x)|.$$

Теорема. При $n \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$E_n(MH^{(\alpha)}, x) = \frac{2^{\alpha+1}M}{\pi^2 n^{\alpha}}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}\int_0^{\pi/2} t^{\alpha}\sin t\,dt \cdot \ln\frac{n+1}{k+1} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

где $O(1)$ означает величину, равномерно ограниченную относительно всех $x \in [-1,1]$ и всех k $(0 \leqslant k \leqslant n$ при $0 < \alpha < 1$ и $0 \leqslant k \leqslant n\theta$, $\theta < 1$ при $\alpha = 1)$.

При $k = 0$ и $\alpha = 1$ это результат С. М. Никольского Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, **10**, 295), а при $k = 0$ и $0 < \alpha < 1$ — результат А. Ф. Тимана (Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 6, 969). Ю. А. Казьмин

258. **Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. Конюшков А. А.**, Матем. сб., 1958, **44**, № 1, 53—84

Рассматриваются функции $f(x)$ периода 2π, принадлежащие $L_p(0,2\pi)$. Устанавливается, в частности, ряд предложений в терминах коэффициентов Фурье об условиях, при которых наилучшее приближение $E_n(f)_{L_p}$ функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n в метрике L_p удовлетворяет условию $E_n(f)_{L_p} = O(\varphi_n)$, или условию $E_n(f)_{L_p} \sim \varphi_n$, где $\{\varphi_n\}$ — некоторая данная последовательность, монотонно убывающая к нулю, а символ $\sim$ означает, что $A\varphi_n \leqslant E_n(f)_{L_p} \leqslant B\varphi_n$ $(A > 0,\ B > 0$ — константы).

Пусть $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k x$.

1. Пусть при некотором $\tau > 0$ убывает монотонно к нулю последовательность $b_n n^{-\tau}$, а $\varphi_n = \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где функция $\varphi(t)$, определенная на $[0,1]$, удовлетворяет условиям: а) $\varphi(t)$ не убывает, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$; б) существует число γ, $0 < \gamma < 1$, такое, что $\varphi(t) = O[\varphi(\gamma t)]$; в) имеется константа $C > 1$, для которой

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\frac{\varphi(Ct)}{\varphi(t)} > 1$$

(условие С. М. Лозинского, см. Докл. АН СССР, 1952. **83**, № 5, 645 — 647).

Тогда при $1 < q < p < \infty$ следующие 5 соотношений эквивалентны друг другу:

1) $E_n(f)_{L_p} = O(\varphi_n)$,

2) $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^p\, k^{p-2} = O\left(\varphi_n^p\right)$,

3) $b_n = O\left(n^{-\frac{1}{p'}}\varphi_n\right)$, $p' = \frac{p}{p-1}$,

4) $E_n(f)_{L_q} = O\left(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\varphi_n\right)$,

5) $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^{p'} = O\left(\varphi_n^{p'}\right)$

(о соотношении 5) см. Тиман А. Ф., Тиман М. Ф., Докл. АН СССР, 1950, **71**, № 1, 17—20).

Аналогичное предложение устанавливается для $\sim$-соотношений при $1 < q < p < \infty$, а также при $1 < q < \infty$, $p = \infty$ (в последнем случае соотношение 2) опускается).

2. Условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma-\frac{\beta}{p'}} E_k^{\beta}(f)_{L_p} < \infty \qquad (1)$$

достаточно для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma}|b_k|^{\beta} \qquad (2)$$

в следующих случаях: а) $1 < p \leqslant \infty$, $\beta > 0$, для некоторого $\tau > 0$ последовательность $d_n = n^{-\tau}b_n$ почти убывает по С. Н. Бернштейну (это означает, что существует такая константа C', что $d_{n_2} \leqslant C' d_{n_1}$ при $n_2 > n_1$); б) $1 < p \leqslant 2$, $\beta \leqslant p'$, b_n — любые; в) $2 < p \leqslant \infty$, $\beta \leqslant 1$, $b_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

3. Условие (2) необходимо для сходимости ряда (1) в случаях: а) $1 < p \leqslant \infty$, $\gamma > \frac{\beta}{p'} - 1$, при некотором $\tau > 0$ $n^{-\tau}b_n \to 0$ монотонно; б) $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $\gamma > \frac{\beta}{p'} - 1$, $\beta < p'$, а $n^{-\tau}b_n$ при некотором $\tau > 0$ почти убывают (при $\beta \geqslant p'$ на b_n нет ограничений).

Из предложений 2 и 3 вытекает

Следствие. Если при $1 < p \leqslant \infty$, $\beta < p'$ существует $\tau > 0$ такое, что $n^{-\tau}b_n \to 0$ монотонно (или при $2 \leqslant p \leqslant \infty$ $n^{-\tau}|b_n|$ почти убывают), то для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{\beta}{p'}} E_n^{\beta}(f)_{L_p} < \infty.$$

Предложения верны и для рядов с синусами и косинусами.

4. При $\gamma - \frac{\beta}{p'} - \beta r < -1$ сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma-\frac{\beta}{p'}}\omega_r^{\beta}\left(\frac{1}{k}, f\right)_{L_p}$$

эквивалентна соотношению (1); здесь $\omega_r(\delta, f)_{L_p}$ — модуль непрерывности r-го порядка ($r \geqslant 1$) функции $f(x)$ в метрике L_p, т. е.

$$\omega_r(\delta, f)_{L_p} = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\| \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x + \nu h) \right\|_{L_p}.$$

Предложение 4 в сочетании с предыдущими дает признаки сходимости ряда (2) в терминах модулей непрерывности.

Утверждение 2 б) при $\gamma = 0$ см. Стечкин С. Б., Успехи матем. наук, 1947, **2**, № 3, 177—178; следствие при $p = 2$ и $|b_n| \to 0$ монотонно (РЖМат, 1956, 4423). Достаточный признак сходимости ряда (2) при $\gamma = 0$ см. Szász O., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, **42**, № 2, 366—395.

Кроме того, в работе доказан ряд теорем о наилучших приближениях $E_n(f)_{L_p}$ функций $f(x) \in L_p(0, 2\pi)$. В некоторых из них дается связь между коэффициентами Фурье функции $f(x)$ и $E_n(f)_{L_p}$ (а также модулями непрерывности функции $f(x)$). Например, устанавливается, что для функции $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, у которой $b_k \geqslant 0$, выполняется

$$\sum_{k=2n}^{\infty} k^{-2} b_k \leqslant A_n^{\frac{1}{p}-2} E_n(f)_{L_p} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty),$$

а если, кроме того, для некоторого $\tau > 0$ почти убывают $n^{-\tau} b_n$, то $b_{3n} \leqslant A_1 n^{\frac{1}{p}-1} E_n(f)_{L_p}$.

Если же b_k таковы, что $n^{-\tau} b_n$ монотонно стремится к нулю и $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{p}} b_k < \infty$ для какого-то p $(1 < p < \infty)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ есть ряд Фурье некоторой функции $g(x) \in L_p$ и

$$E_n(g)_{L_p} \leqslant C_1 \left(n^{\frac{1}{p'}} b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-\frac{1}{p}} b_k\right).$$

Указанные теоремы, представляющие и самостоятельный интерес, применяются, в частности, автором для доказательства предложений 1—4. Кроме того, автор в доказательствах пользуется результатами Харди и Литтлвуда (Hardy G. H., Littlewood J. E., Math. Ann., 1927, **97**, 159—209), С. М. Никольского (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 244—278), Н. К. Бари (РЖМат, 1957, 2192) и некоторыми результатами других авторов, упомянутых выше.

Опечатка: на стр. 74, строка 16 сверху, в (3. 3) вместо $n^{\frac{\gamma-\beta}{p'}}$ должно быть $n^{\gamma-\frac{\beta}{p'}}$. Библ. 19 назв.

И. М. Ганзбург

259. Некоторые свойства коэффициентов двойных рядов Фурье. Лу Цин-цзюнь (Loo Ching-tsün), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 4, 520—532 (кит.; рез. англ.)

Пусть $f(x, y)$ интегрируема и имеет период 2π относительно каждого переменного. Рассматривается разложение функции $f(x, y)$ в ряд Фурье

$$f(x, y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}(x, y);$$

здесь

$$A_{mn}(x, y) = \lambda_{mn}(a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \cos mx \sin ny + c_{mn} \sin mx \cos ny + d_{mn} \sin mx \sin ny),$$

$$\lambda_{00} = \frac{1}{4}, \lambda_{m0} = \lambda_{0n} = \frac{1}{2}, \lambda_{mn} = 1 \ (m > 0, n > 0),$$

$$a_{mn} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx \, dy \text{ и т. д.}$$

Доказываются следующие теоремы:

1. Если $f(x, y)$ абсолютно непрерывна (в смысле Гергена (Gergen J. J., Trans. Amer. Math. Soc., 1933, **35**, 27—63)), то $\rho_{mn} = o\left(\frac{1}{mn}\right)$, здесь $\rho_{mn}^2 = a_{mn}^2 + b_{mn}^2 + c_{mn}^2 + d_{mn}^2$.

Показывается, что существует непрерывная функция, имеющая ограниченную вариацию (в смысле Харди — Крауса; см. Chandrasekharan K., Minakshisundaram S., Duke Math. J., 1947, **14**, 731—753), но не являющаяся абсолютно непрерывной. Функция эта такова:

$$f(x, y) = -xy + \lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \int_0^x \int_0^y \prod_{p=1}^{m} (1 + \cos 4^p t) \prod_{q=1}^{n} (1 + \cos 4^q t') \, dt \, dt'.$$

2. Пусть $f(x, y)$ есть функция ограниченной вариации. Для того чтобы она была непрерывна, необходимо условие

$$(MN)^{-1} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} mn \rho_{mn} = o(1). \qquad (1)$$

Пример показывает, что это условие не является достаточным. Заметим, что для функции одного переменного Винер доказал, что условие $N^{-1} \sum_{n=1}^{N} n \rho_n = o(1)$ является не только необходимым, но и достаточным для того чтобы функция ограниченной вариации была непрерывна.

Хотя условие (1) не является достаточным, однако справедлива теорема 3: Пусть $f(x, y)$ — функция ограниченной вариации, удовлетворяющая условию (1), тогда при $h \to 0$, $k \to 0$ $f(x + h, y + k) - f(x - h, y + k) - f(x + h, y - k) + f(x - h, y - k) \to 0$. Ши Чжун-цы

260. Приближение тригонометрическими полиномами классов функций, определяемых полигармоническим оператором. Бугров Я. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 149—156

Пусть $r = 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Функция $f(x, y)$ называется функцией класса Δ_p^r, если она периодическая

по x и y с периодом 2π и имеет обобщенные производные по Соболеву до порядка $2r$ такие, что, полагая

$$\Delta^r f = \Delta(\Delta^{r-1} f) = \varphi(x, y), \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

имеем

$$\varphi \in L_p \text{ и } \|\varphi\|_p = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(x, y)|^p \, dx\, dy\right)^{1/p} \leqslant 1.$$

Для функций класса Δ_p^r дается интегральное представление, с помощью которого находится оценка приближения функций класса Δ_p^r суммами Фурье. Именно, пусть

$$E_{m,n}(\Delta_p^r) = \sup_{f \in \Delta_p^r} \|f - S_{m,n}(f)\|_p,$$

где $S_{m,n}(f)$ — сумма Фурье функции f порядка $m-1$ по x и порядка $n-1$ по y. Доказывается, что при $p = 1$ и при $p = \infty$ имеет место

$$E_{mn}(\Delta_p^r) = \frac{16 \ln m \cdot \ln n}{\pi^4 (m^2+n^2)^r} + O\left(\frac{\ln m}{m^{2r}} + \frac{\ln n}{n^{2r}}\right). \quad (1)$$

Далее изучается порядок приближения функций класса Δ_p^r тригонометрическими суммами и доказывается, что

$$\sup_{\|\varphi\|_p \leqslant 1} \min_{T_{m,n}} \|f - T_{m,n}\|_p \leqslant c\left(\frac{1}{m^{2r}} + \frac{1}{n^{2r}}\right),$$

где постоянная c не зависит от m и n. Даются некоторые обобщения полученных результатов.

Примечание референта. В работе имеются мелкие неточности. При выводе интегрального представления функций класса Δ_p^r в соответствующем ряде для функции $f \in \Delta_p^r$

$$f(x, y) = \sum_0^\infty{}' \sum_0^\infty{}' (-1)^r \lambda_{kl} \frac{A_{kl}(x, y)}{(k^2+l^2)^r},$$

а также и в самом интегральном представлении

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_D K^{(r)}(u-x, v-y)\, \varphi(u, v)\, du\, dv, \quad \varphi \in L_p$$

не хватает справа постоянного члена. В формуле (1) для $E_{m,n}(\Delta_p^r)$ первый член правой части является главным не только в случае $c_1 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant c_2$, как это утверждается автором.

Л. Д. Кудрявцев

261. Аналог формулы Кристоффеля для многочленов, ортогональных на единичной окружности, и некоторые ее приложения. Голинский Б. Л., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 33—42

Пусть многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ ортонормальны на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, относительно обложения $d\sigma(\theta)$; автор вводит новое обложение

$$d\sigma_s(\theta) = \left|\frac{b_s(e^{i\theta})}{b_s(0)}\right|^2 d\sigma(\theta), \qquad b_s(z) = \prod_{k=1}^{s} (z - e^{i\theta_k}),$$

и выражает соответствующие ему ортонормальные многочлены $\{\varphi_n^{(s)}(z)\}$ через многочлены $\{\varphi_n(z)\}$ (аналогично тому, как сделано Кристоффелем для многочленов, ортогональных на вещественной оси). При некоторых ограничениях, накладываемых на обложение $d\sigma(\theta)$ и ортонормальную систему $\{\varphi_n(z)\}$, автор находит некоторые асимптотические свойства (при $n \to \infty$) ортонормальной системы $\{\varphi_n^{(s)}(z)\}$ на единичной окружности.

Я. Л. Геронимус

262. О рядах по ортогональным полиномам. Чэнь Цзянь-гун (On the series of orthogonal polynomials. Chen Kien-kwong), Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1957 1, № 2, 13—18 (англ.)

Сначала обобщается результат референта, относящийся к сходимости и безусловной сходимости ортогональных рядов по полиномам, ортогональным относительно интегрируемого веса.

Далее дается обобщение теоремы Саса (о сходимости рядов из степеней коэффициентов тригонометрического ряда) на случай рядов по полиномам, ортогональным относительно веса $\tau(x)$, который удовлетворяет условию $\sqrt{(x-a)(b-x)}\ \tau(x) \leqslant A$, где A — постоянная.

В таком же направлении обобщается результат Зигмунда, относящийся к непрерывным функциям с ограниченным изменением. Как следствие автор получает результат референта, относящийся к поведению коэффициентов Фурье (по ортогональным полиномам) от функции с ограниченным изменением.

Например, доказывается

Теорема 3. Если $\sqrt{(x-a)(b-x)}\ \tau(x) \leqslant A$ и функция $f(x)$ непрерывна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p$ сходится при

$$p > \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\frac{1}{2}\log n - \log \omega(n^{-1})}$$

где c_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно полиномов, ортонормированных по весу $\tau(x)$, а $\omega(n^{-1})$ — модуль непрерывности функции $f(x)$.

Примечание референта. 1) В правой части неравенства (7) работы в числителе вместо 1 должен быть, по-видимому, $\log n$. 2) Обобщение теоремы референта, относящейся к безусловной сходимости, было дано также Алексичем и Краликом (реф. 250).

П. Л. Ульянов

263. О некоторой связи между функциями Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби, ортонормированным с весом $P(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, и полиномам П. Л. Чебышева. Яхнин Б. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 202—207

Обозначая через $L_n(x)$ функцию Лебега процесс Фурье — Чебышева

$$L_n(x) = \int_{-1}^{1} \left|\sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(y)\right| d\sigma(y) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $\{P_n(x)\}$ — многочлены, ортонормальные на отрезке $[-1, 1]$ относительно обложения $d\sigma(x)$, автор рассматривает два специальных случая многочленов Якоби, соответствующих обложениям

$$d\sigma^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \qquad d\sigma^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx;$$

между функциями Лебега $L_n^{(1)}(x)$ и $L_n^{(2)}(x)$, соответст-

вующими этим обложениям, имеет место при $n \to \infty$ соотношение

$$L_n^{(2)}(x) = L_n^{(1)}(x) + O\left\{ \frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\arccos x\right|}{\sqrt{1+x}} + 1 \right\},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n и $x \in [-1,1]$. Отсюда вытекают асимптотические оценки для $L_n^{(2)}(x)$; в частности, в каждой фиксированной точке x полуинтервала $[-1,1]$ имеем

$$L_n^{(2)}(x) = L_n^{(1)}(x) + O(1) = \frac{4}{\pi^2}\lg n + O(1),$$

в то время как при $x \to 1$ эта величина имеет порядок $O(n)$. Я. Л. Геронимус

264. О взаимном расположении нулей последовательных полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. Виденский В. С., Докл. АН СССР, 1957, 116, № 5, 723—726

Известно, что нули и точки максимального отклонения двух последовательных многочленов Чебышева $T_n(x)$ и $T_{n+1}(x)$ ($T_n(x) = \cos n \arccos x$) взаимно разделены. В реферируемой работе доказывается, что подобный факт имеет место для вводимых ниже функций.

Теорема. Пусть на отрезке $[a, b]$ даны две непрерывные вместе со своими первыми производными функции $t_n(x)$ и $t_{n+1}(x)$, обладающие следующими свойствами:

1) $t_n(x)$ имеет n простых нулей в промежутке (a, b): $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$; $t_{n+1}(x)$ имеет $n+1$ простых нулей в промежутке (a, b): $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n+1}$ (нуль x_0 функции $f(x)$, непрерывной вместе со своей первой производной $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, называется простым, если $f'(x_0) \neq 0$);

2) любая линейная комбинация $\lambda t_n(x) + \mu t_{n+1}(x)$ (λ, μ вещественные, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$) имеет $\leqslant n+1$ нулей на отрезке $[a, b]$;

3) на отрезке $[a, b]$

$$|t_n(x)| \leqslant 1, \qquad |t_{n+1}(x)| \leqslant 1,$$

причем в $n+1$ различных точках $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$ и в $n+2$ различных точках $\eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_{n+2}$ выполняются соотношения

$$t_n(\xi_k) = (-1)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1),$$

$$t_{n+1}(\eta_k) = (-1)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+2).$$

Тогда справедливы неравенства

$$a \leqslant \eta_1 \leqslant \xi_1 < \eta_2 < \xi_2 < \ldots < \eta_{n+1} < \xi_{n+1} \leqslant \eta_{n+2} \leqslant b$$

$$a < y_1 < x_1 < y_2 < \ldots < x_n < y_{n+1} < b.$$

Приведены примеры прил ожения этой теоремы.
Г. К. Лебедь

265. О формах экстремальных кратно-монотонных полиномов. Рыманенко Б. А., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 1, 35—37

Устанавливается (без доказательств) форма экстремальных полиномов $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ с действительными коэффициентами, принадлежащих классам $T_n^{(h)}$ или $B_n^{(h)}$, а также экстремальных функций вида

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2} y_n(z)\, dz,$$

где $y_n(x)$ — полином, неотрицательный на всей вещественной оси (автор называет эти функции функциями класса G_n, $n = 2m$), если коэффициенты полиномов $y_n(x)$ подчинены допустимым условиям вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_{kj} p_k = A_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s; \quad s \leqslant n),$$

причем $s = 1$ для $y_n(x) \in T_n^{(h)}$ (теорема 1) и $s = 2$ для $y_n(x) \in B_n^{(h)}$ и $f_n(x) \in G_n$ (теоремы 2 и 3); a_{kj} и A_j — данные вещественные числа и хотя бы одно $A_j \neq 0$.

Пользуясь этими теоремами, автор решает две экстремальные задачи:

Задача 1. Среди полиномов

$$y_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k \in B_n^{(h)}$$

найти экстремальный на сегменте $[-1,1]$, если дано $y_n^{(2h+1)}(\xi) = A^2 > 0$ (ξ и A^2 — данные вещественные числа).

Задача 2. В классе G_{2m} найти экстремальную функцию $f_{2m}(x)$, если дано $f'_{2m}(0) = A^2 > 0$ и $f''_{2m}(0) = B$ (A^2 и B — вещественные числа).

В обеих задачах определяется также наименьшая осцилляция рассматриваемых функций. И. А. Григорьева

266. О взвешенно-равномерном приближении полиномами функций многих переменных. Джрбашян М. М., Тавадян А. Б., Матем. сб., 1957, 43, № 2, 227—256

Задача, впервые поставленная С.Н. Бернштейном, о равномерном приближении непрерывной функции полиномами на всей вещественной оси при заданном весе распространяется на случай функций многих переменных. При этом используются результаты и методы, развитые А. Л. Шагиняном и М. М. Джрбашяном в теории равномерно-взвешенных и средневесовых приближений в бесконечных областях на плоскости комплексного переменного и на бесконечных кривых.

Функция $p(x)$ принадлежит классу A, если при $x \geqslant 0$ ее можно представить в виде $p(x) = p(1) + \int_1^x t^{-1}\omega(t)\, dt$, где $\omega(t)$ не убывает и стремится к бесконечности при $t \to \infty$, а при $x < 0$ она получена четным продолжением на отрицательную полуось. Непрерывная функция $q(x)$, $-\infty < x < +\infty$, принадлежит классу $A[p(x)]$, если существует $p(x) \in A$ такая, что $q(x) \geqslant p(|x|)$. Под классом $C\{q_1(x_1), \ldots, q_n(x_n)\}$ понимается совокупность функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, непрерывных во всем n-мерном пространстве B_n: $-\infty < x_k < +\infty$, $k = 1, \ldots, n$, и удовлетворяющих условию

$$\lim_{r \to \infty} e^{-\sum_{k=1}^{n} q_k(x_k)} \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad r = \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Система полиномов полна в классе $C\{q_k(x_k)\}$ в пространстве B_n, если

$$\inf_{Q} \left\{ \max_{B_n} e^{-\sum_{k=1}^{n} q_k(x_k)} |f(x_1, \ldots, x_n) - Q(x_1, \ldots, x_n)| \right\} = 0,$$

где Q — всевозможные полиномы.

Теорема 1. Если $q_k(x_k) \in A[p_k(x_k)]$, $k = 1, \ldots, n$, и

$$\int_1^\infty \frac{p_k(x_k)}{x_k^2} dx_k = +\infty, \qquad (1)$$

то система полиномов полна в классе $C\{q_k(x_k)\}$ во всем пространстве B_n.

Указывается, что система полиномов не полна, если условие (1) не выполняется хотя бы для одного значения k.

Аналогичная теорема получена для бесконечных областей D_n, определяемых неравенствами $-\infty < x_k < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots, \mu$, $0 \leqslant x_k < +\infty$; $k = \mu+1, \ldots, \mu+\nu$, $-\infty < a_k \leqslant x_k \leqslant b_k < +\infty$, $k = \mu+\nu+1, \ldots, n$. Непрерывная функция $q^*(x)$, $x \geqslant 0$, принадлежит классу $A[p(x)]$, если $q^*(x) \geqslant p(x)$, $x \geqslant 0$. Непрерывная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $C\{q_\mu;\ q^*_{\mu+\nu};\ 0\}$, если в области D_n выполняется условие

$$\lim_{r\to\infty} e^{-\sum_{k=1}^{\mu} q_k(x_k) - \sum_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} q_i^*(x_i)} f(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

$$r = \left\{\sum_{k=1}^{\mu+\nu} x_k^2\right\}^{1/2}.$$

Теорема 2. Если

$$\int_1^\infty \frac{p_k(x_k)}{x_k^2} dx_k = +\infty, \quad k = 1, \ldots, \mu,$$

$$\int_1^\infty \frac{p_i(x_i)}{x_i^{3/2}} dx_i = +\infty, \quad i = \mu+1, \ldots, \mu+\nu,$$

то система полиномов полна в классе $C\{q_\mu;\ q^*_{\mu+\nu};\ 0\}$ в области D_n.

Ряд теорем относится к наилучшим приближениям. Пусть $f \in C\{p_k\}$. Наилучшим приближением ее в области B_n полиномами $P_{m_1 \ldots m_n}$ степени $(m_1, \ldots, m_n)$ называется число

$$E_{m_1 \ldots m_n}(f;\ p_k;\ B_n) =$$

$$= \inf_{P_{m_1 \ldots m_n}} \left\{ \max_{B_n} e^{-\sum_{k=1}^{n} p_k(x_k)} \left| f(x_1, \ldots, x_n) - P_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) \right| \right\}.$$

Класс $C^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$ определяется условиями:

1) функции

$$f(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial^p f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k^p}, \quad p = 1, \ldots, r_k,$$

непрерывны и существенно ограничены в B_n;

$$2)\ \operatorname{vrai\,sup}_{B_n} \left| \frac{\partial^{r_k} f}{\partial x_k^{r_k}} \right| \leqslant M_k < +\infty. \qquad (2)$$

На весовые функции накладываются дополнительные ограничения: 1) они положительны, непрерывны, четны на всей оси, 2) $p_k(x_k)/x_k$, при $x_k > x_k^0$ монотонно возрастая, стремятся к $+\infty$. Под $x_k = q_k(y_k)$ подразумевается функция, обратная к $y_k = p_k(x_k)$.

Теорема 3. Если $f \in C^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$, то при $r_1, \ldots, r_n \geqslant 1$

$$E_{m_1 \ldots m_n}(f;\ p_k;\ B_n) \leqslant \Omega \sum_{k=1}^{n} M_k \left(\frac{m_k}{q_k(m_k)}\right)^{-r_k}, \qquad (3)$$

где Ω зависит от $r_1, \ldots, r_n$.

Если вместо условия (2) потребовать, чтобы функции $\partial^{r_k} f / \partial x_k^{r_k}$, $k = 1, \ldots, n$, были равномерно непрерывны в B_n, и обозначить через $\omega_k(\delta)$ модуль непрерывности их по переменному x_k, то неравенство (3) заменяется таким:

$$E_{m_1 \ldots m_n}(f;\ p_k;\ B_n) \leqslant \Omega^* \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{q_k(m_k)}{m_k}\right)^{r_k} \cdot \omega_k\left(\frac{q_k(m_k)}{m_k}\right).$$

Аналогичные результаты получены для оценок наилучших приближений в областях $\overline{B}_n^*$, определяемых неравенствами $-\infty < x_k < +\infty$, $k = 1, \ldots, \mu$; $-\infty < a_k \leqslant x_k \leqslant b_k < +\infty$, $k = \mu+1, \ldots, n$. В этом случае оценка (3) заменяется такой:

$$E_{m_1 \ldots m_n}(f;\ p_k;\ \overline{B}_n^*) < a\left[\sum_{k=1}^{\mu} M_k \left(\frac{m_k}{q_k(m_k)}\right)^{-r_k} + \sum_{k=\mu+1}^{n} M_k m_k^{-r_k}\right];$$

если же $\partial^{r_k} f / \partial x_k^{r_k}$ равномерно непрерывны в $\overline{B}_n^*$, то M_k заменяется через $\omega_k(q_k(m_k))/m_k)$, $k = 1, \ldots, \mu$, и через $\omega_k(1/m_k)$, $k = \mu+1, \ldots, n$.

В конце коротко указывается, что справедливы обратные теоремы, позволяющие по оценке наилучшего приближения судить о дифференциальных свойствах приближаемой функции. М. Г. Хапланов

267. **Расходимость интерполяционного процесса Эрмита — Фейера.** **Берман Д. Л.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 143—148

Пусть $f(x)$ — непрерывная в $[-1, 1]$ функция и

$$H_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) h_k^{(n)}(x),$$

$$h_k^{(n)}(x) = \left[1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x - x_k^{(n)})\right]\left[\frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\,\omega_n'(x_k^{(n)})}\right]^2,$$

$$\omega_n(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j^{(n)}).$$

Здесь $H_n(f, x)$ — интерполяционный полином Эрмита — Фейера степени $2n-1$, построенный для n-й строчки матрицы

$$(x_j^{(n)})\ (j = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots;$$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 1).$$

Доказывается, что при матрице узлов

$$x_k^{(2n+1)} = -1 + \frac{k-1}{n} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n+1;$$

$$n = 1, 2, \ldots),$$

$$x_k^{(2n+2)} = -1 + \frac{2(k-1)}{2n+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n+2;$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots)$$

интерполяционный процесс Эрмита—Фейера $\{H_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ для функции $f(x) \equiv x$ расходится во всех точках интервала $(-1,1)$, за исключением точки $x = 0$. Работа примыкает к результатам Марцинкевича (Marcinkiewicz J., Acta litt. Acad. scient. Szeged, 1937, 8, 131—135), Грюнвальда (Grünwald G., Ann. Math., 1936, **37**, 903—918) и С. Н. Бернштейна (Собр. соч., т. 1, 1952, стр. 257), рассматривавших расходимость интерполяционного процесса Лагранжа. А. В. Ефимов

268. Общие формы остаточных членов линейных формул многомерного приближенного анализа. II. Эзрохи И. А., Матем. сб., 1957, **43**, № 1, 9—28

В другой работе автора (РЖМат, 1957, 5469) был установлен алгорифм построения остаточных членов таких линейных приближенных формул для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, которые становятся точными, когда $f(x_1, \ldots, x_n)$ оказывается многочленом степени $\leqslant s_i$ относительно x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Эти остаточные члены рассматривались как линейные функционалы, заданные на некоторых пространствах функций и аннулирующиеся на указанных многочленах. В настоящей работе подобное же исследование проведено при помощи введения пространств несколько более общего вида, чем упомянутые. Полученные результаты иллюстрируются на некоторых интерполяционных и кубатурных формулах. И. П. Натансон

269. О функционалах в пространствах $C_{s_1 \ldots s_n}$ и $L^p_{s_1 \ldots s_n}$ аннулирующихся на обобщенных многочленах многих переменных. Эзрохи И. А., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 5, 773—776

Под $C_{s_1 \ldots s_n}$ понимается пространство функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданных в единичном кубе и имеющих там непрерывные производные

$$\partial^{si} f / \partial x_i^{si} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Устанавливаются общие формы линейных функционалов, заданных на $C_{s_1 \ldots n}$ и аннулирующихся на некоторых конечномерных подпространствах $C_{s_1 \ldots s_n}$. То же делается для аналогичного пространства $L^p_{s_1 \ldots s_n}$. Полученные результаты обобщают более ранние теоремы автора (РЖМат, 1957, 5469; 1959, 268) об остаточных членах линейных приближенных формул, точных для многочленов степени $\leqslant s_i$ относительно x_i $(i = 1, \ldots, n)$. И. П. Натансон

См. также: 384, 390, 494, 573, 595 599, 635, 839

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

270. Международный коллоквиум по теории функций комплексного переменного в г. Хельсинки. Маркушевич А. И., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 209—211

271. Тождество Эйлера. Йейтс (The Euler identity. Yates Robert C.), Math. Teacher, 1958, **51**, № 4, 266 (англ.)

Формально определяя e^{ix} как функцию от x, значение которой при $x=0$ равно 1, а производная которой есть ie^{ix}, устанавливается тождество Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Г. Ц. Тумаркин

272. Применение разделенных разностей к теории функций комплексного переменного. Кук (Divided differences in complex function theory. Cook Erben, Jr), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 1, 17—24 (англ.)

Автор считает, что разделенные разности недостаточно используются в теории функций комплексного переменного, и ставит себе целью показать, как это можно было бы сделать.

Доказана теорема о разделенных разностях, в которой приведена интерполяционная формула Ньютона и известное выражение разделенной разности в виде контурного интеграла. С помощью этой теоремы доказаны несколько известных предложений теории функций комплексного переменного, например формула Тейлора, интерполяционная формула Лагранжа и др. В статье встречаются неточности. А. Г. Нафталевич

273. Введение в предмет теории комплексных функций. Андреян-Казаку (Introducere în obiectul teoriei functiilor complexe. Andreian-Cazacu Cabiria). Gaz. mat. si. fiz., 1958, **A10**, № 2, 65—76 (рум.; рез. русск., франц.)

Вступительная лекция к курсу теории функций комплексного переменного в Бухарестском университете им. Пархона. Подчеркивается прикладное значение теории и ее связь с другими математическими дисциплинами. В историческом очерке, составляющем основную часть лекции, особое внимание уделено работам русских, советских и румынских математиков. Указано, что одновременно с Вейерштрассом теория функций на базе рядов Тейлора строилась Мереем (Ch. Méray). А. А. Гольдберг

274. О радиусе сжатия кривых. Диамантопулос (Sur le rayon de contraction des courbes. Diamantopoulos Th.), Делтион тис эллиникис математикус этериас, Bull. Soc. Math. Gréce, 1954, **28**, № 1-3, 87—100 (греч.; рез. франц.)

Для характеристики изменения сжатия или растяжения плоской кривой в окрестности некоторой ее точки M автор рассматривает вдоль кривой масштаб, выражаемый через значение некоторого параметра t, и ищет предельное положение, к которому стремится точка пересечения касательной к кривой в точке M с прямой, которая проходит через концы двух дуг длины S_+, S_-, соответствующих приращениям $\pm\Delta t$ переменной t при $\Delta t\to 0$.

«Сжатием» кривой в точке M называется величина $-S_t''/S_t'^2$, «радиусом сжатия»—обратная величина и «центром сжатия» — конец вектора, расположенного на касательной, с началом в M и длиной, равной радиусу сжатия.

Если z_1 —точка регулярности функции комплексного переменного $w=\sigma(z)$, $\sigma'(z_1)\neq 0$, то доказывается, что если центры сжатия в точке z_1 кривых некоторого пучка расположены на одной и той же кривой второго порядка с фокусом в z_1, то центры сжатия преобразованных посредством отображения $w=\sigma(z)$ кривых также расположены на кривой второго порядка с фокусом в $w_1=\sigma(z_1)$.

Находится аналитическая зависимость между координатами двух векторов с началами z_1, w_1 и концами в основаниях перпендикуляров опущенных на прямые, проходящие через центры кривизны и сжатия исходной и преобразованной кривых, что позволяет указать метод одновременного построения радиусов сжатия и кривизны кривой в плоскости w, если известны те же радиусы исходной кривой.

Далее рассматривается семейство кривых $\Phi(x,y)=\alpha$, Φ предполагается однозначной и непрерывной вместе с частными производными до 2-го порядка. Доказывается, что центры сжатия в точке M всех изогональных траекторий, проходящих через эту точку, расположены на одной прямой, которая соединяет центр сжатия и центр кривизны ортогональной траектории семейства. Автор указывает, что эта теорема — аналог теоремы Чезаро о центрах кривизны.

В заключение устанавливаются характеристические свойства для гармонических и аналитических функций:

Для того чтобы функция $\Phi(x,y)$ была гармонической в области T, необходимо и достаточно, чтобы кривые семейства $\Phi(x,y)=\alpha$, которые соответствуют последовательности равноотстоящих величин α, сгущались по направлению, к которому обращены их вогнутости; так, что в каждой точке области T центр кривизны кривой $\Phi(x,y)=\alpha$ совпадал бы с центром сжатия ортогональной траектории.

Для того чтобы функция $\omega=\Phi+i\psi$ была аналитической в T, необходимо и достаточно: 1) чтобы предыдущее условие выполнялось в T, для кривых ортогональной сети $\Phi=\alpha$, $\psi=\beta$ и 2) чтобы по крайней мере в одной точке области T выполнялось одно из уравнений Коши-Римана с членами, отличными от нуля. Из резюме автора

275. Об одном классе обобщенных рядов Дирихле. **Лунц Г. Л.**, Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 173—179

Рассматривается вопрос об определении области абсолютной сходимости и области расходимости ряда Дирихле

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (1)$$

с комплексными показателями λ_n. Пусть $\lambda_n=r_n e^{i\varphi_n}$ и пусть r_k $(k=1,2,\ldots)$—те номера, для которых $\psi-\alpha\leqslant\varphi_{n_k}\leqslant\psi+\alpha$.

Положим $k(\psi,\alpha)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\dfrac{\ln|a_{n_k}|}{r_{n_k}}$, $k(\psi)=\lim\limits_{\alpha\to 0}k(\psi,\alpha)$,

$$m(\psi,\alpha)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln(k|a_{n_k}|)}{r_{n_k}},\quad m(\psi)=\lim_{\alpha\to 0}m(\psi,\alpha).$$

Показывается, что если при некотором φ $\sigma\cos\varphi-\tau\sin\varphi-k(\psi)<0$, то в точке $s=\sigma+i\tau$ ряд (1) расходится, а если при всех φ $\sigma\cos\varphi-\tau\sin\varphi-m(\varphi)>0$ и выполняется дополнительное условие $\overline{\lim_{n=\infty}}\dfrac{\ln n}{r_n}<\infty$, то в точке $s=\sigma+i\tau$ (множество таких точек обозначим G) ряд (1) абсолютно сходится.

Область G не является вообще точной областью абсолютной сходимости ряда. Приведены достаточные условия для того, чтобы область G была точной областью абсолютной сходимости. Отмеченные результаты обобщают результаты Е. Хилла (Hille E., Ann. Math., 1924, **25**, 261—278) и Юй Цзя-шуна (РЖМат, 1956, 7982).

А. Ф. Леонтьев

276. Аналитическое продолжение степенных рядов и многочлены Фабера. Хавин В. П., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 5, 879—881

Пусть G —односвязная область комплексной плоскости, содержащая точку $z=\infty$ внутри, K—замкнутое ограниченное множество, дополнительное к G и содержащее более одной точки. Пусть функция $w=\Phi(z)$, $\Phi(z)=z+\alpha_0+\alpha_1/z+\ldots$, осуществляет конформное отображение G на внешность окружности $|w|=\rho$ и $\Phi_k(z)=c_0^{(k)}+c_1^{(k)}z+\ldots+c_k^{(k)}z^k$ $(k=0,1,\ldots)$ — многочлены Фабера для K.

Доказывается следующее предложение. Для того чтобы функция $\varphi(z)=\dfrac{b_1}{z}+\dfrac{b_2}{z^2}+\ldots$, аналитическая в окрестности $z=\infty$, была аналитической в G, необходимо и достаточно выполнение условия $\overline{\lim_k}\left|c_0^{(k)}b_1+c_1^{(k)}b_2+\ldots+c_k^{(k)}b_{k+1}\right|^{1/k}\leqslant\rho$.

К. М. Фишман

277. Полные ортонормальные последовательности функций, равномерно малых на подмножестве. Хаммел (Complete orthonormal sequences of functions uniformly small on a subset. Hummel J. A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 492—495 (англ.)

Пусть $L^2(D)$ есть совокупность аналитических в конечной области D функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_D=\sqrt{\iint_D|f(z)|^2dxdy}<\infty.$$

Известно, что для всякой полной последовательности функций $\{\varphi_n(z)\}$ из $L^2(D)$, ортонормированной по площади области D, имеет место равенство

$$K_D(z,w)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)},\qquad z,w\in D, \qquad (1)$$

где $K_D(z,w)$ есть кернфункция Бергмана для области D, а ряд сходится равномерно внутри области D по z и по w. В работе ставится вопрос о равномерной сходимости ряда (1)относительно всевозможных ортонормированных систем $\{\varphi_n(z)\}$.

Теорема 1. Для всякого компактного подмножества K из D и для всякого $\varepsilon>0$ существует такая полная ортонормированная система $\{\varphi_n(z)\}$ в $L^2(D)$, для которой при всех n выполняются неравенства

$$\|\varphi_n\|_K<\varepsilon. \qquad (2)$$

Как следствие доказывается существование системы $\{\varphi_n(z)\}$, для которой вместо (2) имеют место неравенства $|\varphi_n(z)|<\varepsilon$ при $z\in K$.

В другом следствии теоремы устанавливается неравномерная относительно систем $\{\varphi_n(z)\}$ сходимость ряда (1), а именно: для $0<\varepsilon<\frac{1}{2}\max_z \Im K K_D(z,z)$ не существует номера N такого, чтобы для всех полных ортонормированных систем $\{\varphi_n(z)\}$ и всех $z,w\in K$ выполнялось неравенство

$$\left|K_D(z,w)-\sum_{n=1}^{N}\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(w)}\right|<\varepsilon.$$

В конце статьи приводится некоторое обобщение теоремы 1 с пространства $L^2(D)$ на произвольное полное сепарабельное гильбертово пространство. П. К. Суетин

278. **О звездных областях, обладающих некоторыми свойствами, связанными со свойствами выпуклости. Фальгас** (Sur les domaines étoilés vérifiant certaines propriétés liées à la propriété de convexité. Falgas Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, **224**, № 18, 2275—2278 (франц.)

Дано вещественное число ρ $(0<\rho<\infty)$ и вещественная строго положительная непрерывная функция $h(\varphi)$. Через $C[\rho,h(\varphi)]$ обозначается класс целых функций конечного порядка, не превосходящего ρ, причем если функция точно порядка ρ, то индикатриса роста $k(\varphi)<h(\varphi)$. Если $F(z)\in C[\rho,h(\varphi)]$, то преобразование Лапласа—Бореля ставит ей во взаимно однозначное соответствие функцию $f(z)$, голоморфную в определенной области D, обладающей некоторым свойством, которое автор называет свойством $\mathfrak{A}$. Указываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная звездная область D обладала свойством $\mathfrak{A}$. В. С. Виденский

279. **О рядах по базису, соответствующих некоторым классам целых функций. Фальгас** (Sur les séries de base relatives à certaines classes de fonctions entières. Falgas Maurice), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 15, 1208—1211 (франц.)

Обозначения те же, что в предыдущей заметке (реф. 278). Вводится в рассмотрение класс многочленов $Q_n(z)$, которые автор называет многочленами Фабера, ассоциированными классу целых функций $C[\rho,h(\varphi)]$. Утверждается, что всякая функция из класса $C[\rho,h(\varphi)]$ единственным образом разлагается на любом конечном множестве в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(z), \qquad (1)$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{1/n}<1. \qquad (2)$$

Всякий ряд (1), удовлетворяющий условию (2), сходится абсолютно и равномерно на любом конечном множестве к некоторой функции из $C[\rho,h(\varphi)]$.

Рассматриваются ряды по многочленам $\{P_m(z)\}$, образующим базис. Указываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы соответствующие ряды равномерно сходились к $F(z)\in C[\rho,h(\varphi)]$ на данном компакте K. В. С. Виденский

280. **Два примера матричного метода исследования квазистепенных базисов. Краплин М. А.**, Сб. научно-техн. работ. Азово-Черноморск. ин-т механиз. с. х., 1957, вып. 10, 313—322

Базис $\{f_n(z)\}$ называется квазистепенным в круге T $|z|<R$ с коэффициентами из A_{R_1}, если:

1) всякая $f(z)$, аналитическая в T, разлагается единственным способом в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n f_n(z)$, который сходится равномерно внутри T, причем $\overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|}\leqslant\frac{1}{R_1}$;

2) обратно, если $\overline{\lim}\sqrt[n]{|C_n|}\leqslant\frac{1}{R_1}$, то ряд $\sum C_n f_n(z)$ сходится равномерно внутри T.

Автор исследует матричным методом, при каких условиях системы $\{z^n f(a_n z)\}$ и $\{f_n(z)\}$ образуют квазистепенной базис.

Получены следующие результаты

1. Если функция $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ аналитическая в круге $|z|<1$, $q=\sup_n|a_n|$ и $M=\sup_n|C_n|$, то система функций $\{z^n f(a_n z)\}$ образует квазистепенной базис в круге радиуса $R=\frac{1}{q(1+M)}$.

1′. Если функция $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$ аналитическая в круге $|z|<r$, $q=\sup_n|a_n|$, то система функций $\{z^n f(a_n z)\}$ образует квазистепенной базис в круге радиуса $R=2^{p-1}$, где p определяется из равенства $q=\inf_n \frac{1}{2^p\sqrt[n]{|C_n|}}$.

2. Если функция $f(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty} C_k z^k$ аналитическая в круге $|z|<1$, то система функций $\{f_n(z)\}$, $n=0,1,2,\ldots$, где $f_0(z)=f(z)$; $f_n(z)=z^n+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{a_k z}\int_0^{z}\cdots\int_0^{z} a_k z^k\,dz^n$, $n=1,2\ldots$, а a_k лежат в круге радиуса $q\leqslant\frac{1}{2}$ и имеют предельную точку на границе этого круга, образует квазистепенной базис в круге радиуса $R=\frac{1}{2q}$ с коэффициентами разложения из A_{R_1}, где $R_1=\frac{1}{2q}$.

Э. З. Шувалова

281. **Необходимый и достаточный признак наличия квазистепенного характера у базиса. Коробейник Ю. Ф.**, Сб. студ. работ. Ростовск. ун-та, 1957, вып. 3, 65—68

Приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы базис $\{f_n(z)\}$ был квазистепенным в круге $|z|<R$ с коэффициентами из A_{R_1}. (По поводу определений см. реф 280).

Введя обозначения

$$M_n^r=\max_{|z|<r}|f_n(z)|,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{M_n^r}=A^r,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{M_n^r}=B^r,$$

$$\lim_{r\to R}A^r=A \qquad \lim_{r\to R}B^r=B,$$

автор формулирует в этих терминах следующую теорему.

Для того чтобы базис $\{f_n(z)\}$ был квазистепенным в круге $|z|<R$ с коэффициентами $\{c_n\}$ из A_{R_1}, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий: 1) $A=B=R_1$; 2) $A_r<A$ для любого $r<R$.

Доказанную теорему автор использует для изучения квазистепенного характера базисов $\{z^n k\}$, полученных из базиса $\{z^n\}$. Э. З. Шувалова

282. **О конформном отображении области с выпуклой или звездной границей. Комацу** (On conformal mapping of a domain with convex or star-like boundary. Komatu Yûsaku), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, **9**, № 3, 105—139 (англ.)

Устанавливаются интегральные представления (структурные формулы) для классов регулярных выпуклых и регулярных звездных в круге $|z|<1$ функций, а также для функций, однолистно отображающих кольцо $0<q<|z_1|<1$ на однолистную двусвязную область, граница которой состоит из двух простых замкнутых выпуклых или звездных относительно некоторой точки кривых. В каждом из двух последних случаев внутренняя кривая может вырождаться в прямолинейный отрезок. Используя полученные интегральные представления, автор получает из них различные оценки для функций указанных классов, не всегда реализуемые этими функциями. При выводе интегральных представлений автор пользуется методом полигональной аппроксимации в сочетании с известной теоремой Каратеодори о ядре последовательности областей. При этом ему также приходится использовать интегральные представления для отображающих функций в случае полигональных областей, установленные им раньше, а также другими авторами до него.

Примечание референта. Все интегральные представления, используемые в данной работе, получены в работах референта (Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 5, 833; 1952, **86**, № 3, 465; РЖМат, 1954, 69), а для функций, выпуклых в круге $|z|<1$, еще ранее в работе В. Паатеро (Paatero, Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1931, **A33**, № 9). Среди оценок, установленных в работе, существенно новых нет. Автор не дает ссылок на указанные работы. В. А. Зморович

283. **О некоторых граничных свойствах конформного отображения. У Сюэ-моу** (On some boundary properties of conformal mapping. Ou Soˊ-mo), Scientia sinica, 1958, **7**, № 2, 131—136

Перевод из журнала Шусюэ сюэбао (Acta Math. sinica), см. РЖМат, 1958, 4652

284. **Об однолистных функциях, параболически-выпуклых в круге. Дундученко** (Про унівалентні функції, параболічно-опуклі в крузі. Дундученко Л. О.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 2, 128—130 (укр.; рез. русск., англ.)

Вводятся в рассмотрение параболически-выпуклые однолистные функции. Функция $w=f(z)$, регулярная и однолистная в круге $|z|<1$, называется параболически-выпуклой в этом круге, если она отображает его на область, лежащую в плоскости $w=u+iv$, разрезанной по неотрицательной части вещественной оси, и такую, что вместе с точкой $a=\alpha+i\beta$, принадлежащей этой области, ей принадлежит точка $\bar{a}=\alpha-i\beta$, а также дуга параболы $v^2=4c^2u+4c^4$, $0<c<+\infty$, соединяющая эти две точки. Для подкласса параболически-выпуклых функций с разложением вида $f(z)=-1-2z+a_2z^2+\ldots$, $|z|<1$, получены структурная формула и точные оценки:

$$|f(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2},\quad |f'(z)|\leqslant\frac{2}{(1-|z|)^3},$$

$$|z|<1;\ |a_n|\leqslant n+1,\ n=2,3\ldots,$$

Для модуля функции и ее производной получены и точные оценки снизу, но они не имеют достаточно простого вида. В классе параболически-выпуклых функций, нормированных только условием $f(0)=-1$, приведены точные оценки модуля и аргумента функции (снизу и сверху), модуля производной (сверху) и модулей коэффициентов разложения. Указано, что доказательства (которые не приводятся) основаны на известных результатах В. А. Зморовича и Робертсона (Robertson M. S., Amer. J. Math., 1936, 58, 465).

Примечание референта. Оценки, приведенные в заметке для однолистных параболически-выпуклых функций, нормированных только условием $f(0)=-1$, верны для любых регулярных в круге $|z|<1$ функций $w=f(z)$, нормированных тем же условием и не принимающих в этом круге значений $w\geqslant 0$. Эти оценки для коэффициентов функции и для модуля ее производной непосредственно следуют из известных теорем о подчиненных функциях (Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952, 407—408), примененных к функции $-\frac{f(z)+1}{4}\prec\frac{z}{(1-z)^2}$, а остальные оценки — из известных результатов для регулярных функций с положительной вещественной частью (см. там же, стр. 372), примененных к функции $\varphi(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}}\sqrt{f(z)}$, $\varphi(0)=1$.

Ю. Е. Аленицын

285. **О единственности решения внешней обратной краевой задачи. Рогожин В. С.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 2, 38—41

Строится пример внешней обратной краевой задачи, имеющей несколько решений. Относительно искомой функции предполагается, что она имеет полюс первого порядка в незакрепленной точке. В статье много опечаток. С. Н. Андрианов

286. **Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружностей. Чибрикова Л. И.**, Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 2, 22—26

Пусть S^+ — верхняя половина симметричной относительно действительной оси фундаментальной области некоторой элементарной или фуксовой первого рода группы дробно-линейных подстановок; L — ее контур.

Рассматривается задача Гильберта об определении голоморфной в S^+ функции $F(z)=u+iv$, по краевому условию $au+bv=c$, где a, b, и c — заданные на контуре L действительные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, и $a^2+b^2\neq 0$ всюду на L. После введения по методу Н. И. Мусхелишвили (Сингулярные интегральные уравнения, М., Гостехиздат, 1946, гл. 2, § 38) вспомогательной функции $\Phi(z)$ и распространения ее автоморфно на всю область существования задача приводится к задаче Римана для автоморфной функции, рассмотренной автором ранее (РЖМат, 1957, 7828).

В качестве примеров получены формула Шварца, дающая решение задачи Дирихле для полосы, и формулы Вилля для кольца и прямоугольника. И. Г. Араманович

287. **Исключительный случай краевой задачи Римана. Мельник И. М.**, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1957, **24**, 149—162

В работе изучено поведение интеграла типа Коши $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{t-z}dt$ в окрестности точки c контура интегрирования L в случае, когда плотность $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t)=\varphi_*(t)(t-c)^\gamma\ln^p(t-c)$, где $\varphi_*(t)$, имея в c разрыв первого рода, удовлетворяет условию Гёльдера вблизи c на закрытых дугах с концами в c; комплекс-

ное число $\gamma = \alpha + i\beta$ таково, что $-1 < \alpha < 0$, а $p = 0, 1, 2, \ldots$ Следуя Н. И. Мусхелишвили, рассмотревшему случай $p = 0$ (Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946, стр 80), автор изучил случай произвольного натурального p. Этот результат применяется для решения граничной задачи

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t). \quad t \in L$$

(об этой задаче см. Н. И. Мусхелишвили, стр. 243, указанной выше книги) в том случае, когда L — конечная совокупность гладких непересекающихся разомкнутых линий, $G(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и отлична от нуля на любой закрытой дуге, принадлежащей L и не содержащей концов, а вблизи каждого конца c она имеет вид $G(t) = (t-c)^r G_*(t)$, где r — вещественное число, функция $G_*(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера и отлична от нуля всюду, включая c, $g(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Автор, поступая аналогично случаю, исследованному Н. И. Мусхелишвили, когда для всех концов $r = 0$ (см. там же, стр. 239), разбивает решения задачи на определенные классы и, когда функция $g(t)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям вблизи концов линии L, строит в квадратурах все решения задачи в соответствующим образом подобранном классе функций. Б. В. Хведелидзе

288. **Об одном неравенстве. Тиман А. Ф.**, Научн. зап. Днепропетр. ун-т, 1956, **45**, 221—224

Через A^1_p обозначается класс функций $f(x)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f(x)$ — вещественная аналитическая функция на вещественной оси; 2) существует точка x_0 и такое число $p > 0$, что при любом натуральном k $\left|f^{(2k+1)}(x_0)\right| \leqslant p^{2k}\left|f'(x_0)\right|$; 3) предыдущее неравенство может обратиться в равенство лишь для всех $k > 0$ одновременно, и в этом случае $f^{(2k+1)}(x_0) = (-1)^k p^{2k} f'(x_0)$.

Теорема I. Для всякой функции $f(x) \in A^1_p$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < h < \delta$ в точке x_0 выполняется неравенство

$$|f'(x_0)| \leqslant \frac{p}{2\sin p\,h}\,|f(x_0+h) - f(x_0-h)|. \qquad (1)$$

При достаточно малых h

$$\sup|f'(x)| \leqslant \frac{p}{2\sin ph}\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x+h) - f(x-h)|. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) являются обобщением неравенств С. Б. Стечкина (Докл. АН СССР, 1948, **60**) о тригонометрических полиномах и неравенств С. М. Никольского (Докл. АН СССР, 1948, **60**) и С. Н. Бернштейна (Докл. АН СССР, 1948, **60**; Сочинения, том II, статья № 95) о целых функциях конечной степени.

Теорема II. Если $f(x)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то при достаточно малых $h > 0$ в точке x_0 имеет место неравенство

$$|f'(x_0)| \geqslant \frac{p}{2\,\mathrm{sh}\,ph}\,|f(x_0+h) - f(x_0-h)|.$$

Кроме указанного класса функций A'_p, автор вводит другие классы функций, для которых рассматриваются аналогичные вопросы. В. С. Виденский

289. **О производных целых функций. Джайн** (On the derivatives of integral functions. Jain Mahendra Kumar), Ganita, 1953, **4**, № 2, 143—146 (англ.)

Теорема 1. Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ $\left(0 \leqslant \rho < \frac{1}{2}\right)$, а $A(r)$, $A^{(s)}(r)$ означают соответственно максимум вещественной части $f(z)$ и $f^{(s)}(z)$ при $|z| = r$, то $A(r) > A^{(1)}(r) > \ldots > A^{(s)}(r)$ при $r > r_0$.

Теорема 2. Если $f(z)$ — целая функция нижнего порядка $\lambda\,(\lambda > 1)$, то $A(r) < A^{(1)}(r) < \ldots < A^{(s)}(r)$ при $r > r_0$.

Теорема 3. Если $f(z)$ — целая функция порядка $\rho\,(\rho < 1)$, а $\mu(r)$ и $\mu^{(s)}(r)$ означают соответственно максимальный член $f(z)$ и $f^{(s)}(z)$, то $\mu(r) > \mu^{(1)}(r) > \ldots > \mu^{(s)}(r)$ при $r > r_0$. В. С. Виденский

290. **Замечание о производных целых функций. Рахман** (A note on the derivatives of integral functions. Rahman Qazi Ibadur), Math. Student, 1957, **25**, № 1—2, 21—24 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция, $\nu(r, f)$ и $\mu(r, f)$ — соответственно ее центральный индекс и максимальный член (РЖМат, 1957, 7120К). Доказано неравенство $\nu(r, f) \leqslant r\,\mu(r, f')/\mu(r, f) \leqslant \nu(r, f')$, из которого получено большое число следствий. Среди них следующее: Если порядок $f(z)$ $\rho < 1$, то для всех $r > r_0$

$$\mu(r, f) > \Phi(r)\,\mu(r, f') > \ldots > \{\Phi(r)\}^{(s)}\,\mu(r, f^{(s)}),$$

где $\Phi(r)$ — произвольная положительная неубывающая функция такая, что $\ln\Phi(r) = o(\ln r)$. Это следствие содержит в себе теорему Джайна (реф. 289).

А. А. Гольдберг

291. **Поведение случайной мероморфной функции в окрестности ее нулей. I, II. Михаил** (The behaviour of the random meromorphic function at its zeros. I, II. Mikhail M. N.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 1, 88—103; Indagationes math., 1957, **19**, № 1, 88—103 (англ.)

Изучаются значения, близкие к нулю, мероморфной функции

$$g(z,t) = b(z,t)/c(z,t)$$

конечного порядка ρ, где $b(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n}(t)\,b_n z^n$ и $c(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2n+1}(t)\,c_n z^n$ — целые функции конечных порядков ρ_b и ρ_c соответственно, $\rho = \max(\rho_b, \rho_c)$, а $r_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqslant t \leqslant 1$, — функции Радемахера, получающие значения $+1$ и -1 с одинаковой вероятностью, равной $1/2$, причем фиксированное значение t определяет функцию $g(z, t)$ однозначно. Излагаются две теоремы.

Как следствие из этих теорем выводятся несколько лемм, устанавливающих, что в плоскости z можно указать такую систему областей, в которых «почти все» функции семейства $g(z, t)$ принимают каждое достаточно малое по модулю значение одинаковое число раз. «Почти все» является выражением, имеющим вероятностный смысл (реф. 292).

Примечание референта. Доказательство теоремы 2 представляется референту малоубедительным. Оценка $|c(z, t)|$ снизу, по-видимому, не состоятельна. Таким образом, утверждения автора нуждаются в дополнительном обосновании. Ш. И. Стрелиц

292. **Поведение случайной мероморфной функции в окрестности ее полюсов. Михаил** (The behaviour of the random meromorphic function at its poles. Mikha-

il M. N.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 5, 590—597; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 590—597 (англ.)

Результаты, сформулированные в статье, сходны с результатами прежних статей автора, где рассматривались нули тех же функций (реф. 291).

Примечание референта. Сравнивая теоремы о нулях (реф. 291) и полюсах, нетрудно видеть, что теорема о полюсах должна быть тривиальным следствием теоремы о нулях. В статье приведена несколько иная оценка, чем это следует из сделанного замечания. Несовпадение объясняется, по-видимому, не уточнением результата, а следствием неправильной выкладки.

Ш. И. Стерлиц

293. О монотонности некоторых функционалов в теории аналитических функций. Бернацкий, Кшиж (On the monotonity of certain functionals in the theory of analytic functions. Biernacki Mieczyslaw, Krzyz Jan), Ann. Univ. M. Curie Sklodowska, 1955 (1957), **A9**, № 1-13, 135—147 (англ.; рез. русск., польск.)

Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в круге $|z|<R$; $C(r)$ — образ окружности $|z|=r$, $0<r<R$, при отображении $w=f(z)$; $L(r)$ — длина $C(r)$; $S(r)$ — площадь, ограниченная $C(r)$; $I_p(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta$ $(p>0)$.

Доказывается: $r^2 I_2(r,f'):I_2(r,f)$ строго возрастает вместе с r, если $f(z)\neq a_n z^n$ (Бернацкий);

$\int_{C(r)} |f(z)|^p\, d\Phi : I_p(r,f)$, где $\Phi=\operatorname{Arg} f(z)$, возрастает вместе с r (Кшиж).

В связи с выдвинутой Бернацким гипотезой, что $L^2(r):S(r)$ возрастает вместе с r, Кшиж доказывает, что $\delta(r)=L^2(r)-4\pi S(r)$ строго возрастает вместе с r, если $f(z)$ не есть дробно-линейная функция (в последнем случае $\delta(r)\equiv 0$).

А. И. Маркушевич

294 О характеристике T(f) функций, мероморфных в круге. Бернацкий (Sur la caractéristique $T(f)$ des fonctions méromorphes dans un cercle. Biernacki Mieczyslaw), Ann. Univ. M. Curie Skłodowska, 1955 (1957), **A9**, № 1-13, 99—125 (франц.; рез. русск., польск.)

Для функции $f(z)$, мероморфной в единичном круге, сравниваются осредненные значения $f(z)$ и $f'(z)$ преимущественно значения $T(f)$ и $T(f')$ характеристических функций Неванлинны. В случае, когда $f(z)$ голоморфна, получаются, например, следующие результаты.

IV. Если $\lim_{r\to 1}[\ln T(f):\ln\ln(1-r)^{-1}]=\infty$ или $\lim_{r\to 1}[\ln T(f'):\ln\ln(1-r)^{-1}]=\infty$, то

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,[\ln T(f):\ln T(f')]\leqslant 1.$$

VII. Если $\lim_{r\to 1}[(1-r)T'(r,f'):T(r,f')]=m>0$ и $\overline{\lim}_{r\to 1}[(1-r)T'(r,f'):T(r,f')]=M<\infty$, то

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,[T(r,f):T(r,f')]<2e\,\frac{M+1}{m}.$$

XI. Если $f(z)$ не обращается в 0 и $\lim_{r\to 1}T(r,f)=M$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|d\theta\leqslant\frac{2}{1-r^2}\left[2M-\ln|f(0)|\right]$$

и др.

А. И. Маркушевич

295. Заметка о подчинении. Абэ (A note on subordination. Abe Hitoshi), J. Gakugei, Tokushima Univ. Natur. Sci. Math., 1956, **7**, Dec., 47—51 (англ.)

С помощью принципа подчинения доказываются теоремы о покрытиях и об оценках сверху модулей функций, регулярных или мероморфных в единичном круге. Положим: $Q(z)=J\left(\frac{1}{\pi i}\ln z\right)=16z\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+z^{2n}}{1+z^{2n-1}}\right)^8$, $|z|<1$, где $J(z)$ есть эллиптическая модулярная функция.

Теорема 1. Пусть функция $w=f(z)=a_p z^p+\ldots$ регулярна в круге $|z|<1$ и $\neq 0$ для $0<|z|<1$. Тогда: 1) $f(z)$ принимает в $|z|<1$ не менее p раз каждое значение w с $|w|<|a_p|/16^p$; 2) образ единичного круга при отображении $w=f(z)$ покрывает круг $|w|<|a_p|/16$; 3) если $f(z)$ не принимает в $|z|<1$ значения α, то $|f(z)|\leqslant|\alpha|\,Q(-|z|^p)$, $|z|<1$. Эти оценки не могут быть улучшены.

При $p=1$ утверждения (1) и (2) дают известную теорему Гурвица.

Теорема 2. Если функция $w=f(z)=a_p z^p+\ldots$ регулярна в круге $|z|<1$, $\neq 0$ для $0<|z|<1$ и не принимает в $|z|<1$ значений $w\leqslant-\frac{1}{4}$, то имеем точные оценки: $|f(z)|\leqslant\frac{|z|^p}{(1-|z|^p)^2}$, $|z|<1$; $|a_p|\leqslant 1$.

Теорема 3. Если $f(z)=a_1 z+a_3 z^3+\ldots$ есть нечетная мероморфная функция в $|z|<1$, то образ единичного круга при отображении $w=f(z)$ покрывает круг $|w|\leqslant\frac{2|a_1|\pi^2}{\Gamma^4\left(\frac{1}{4}\right)}$, а при дополнительном условии $f(z)\neq 0$ для $0<|z|<1$ круг $|w|<\frac{|a_1|}{8}$. Эти результаты не могут быть улучшены.

Доказываются еще две теоремы о регулярных функциях рассмотренного выше вида. Одна из них касается функций, не принимающих в $|z|<1$ двух значений $\pm\alpha$, а другая — всех значений $w\leqslant-\beta$ и $w\geqslant\beta$ $(\beta>0)$.

Ю. Е. Аленицин

296. Постоянная Блоха для многосвязных областей. Гун-Шэнь (Kung Sun), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, **7**, № 4, 513—519 (кит.; рез. англ.)

D — ограниченная многосвязная область плоскости z. Пусть гауссова кривизна бергмановой метрики $ds^2=T|dz|^2$ (где $T=\partial^2\ln K_D/\partial z\,\partial\bar{z}$, K_D — бергманова кернфункция области D) достигает своего минимума τ_a в точке $a\in D$, $w=f(z)$ — функция, голоморфная в области D, удовлетворяющая условию $f'(b)=1$ (где точка $b\in D$) и переводящая область D в область D_f плоскости w. Доказывается, что тогда область D_f содержит круг радиуса $\sqrt{-3/8\tau_a T(b)}$. Если функция $w=f(z)$, сверх того, однолистна в D, то область D_f содержит круг радиуса $\sqrt{-1/2\tau_a T(b)}$.

Б. А. Фукс

297. Области, не содержащие нулей полиномов. Каулинг, Трон (Zero-free regions of polynomials. Cowling V. F., Thron W. J.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 10, 682—687 (англ.)

Для полиномов вида $P(z)=a_0+a_1 z^{\lambda_1}+\ldots+a_n z^{\lambda_n}$, $a_l\neq 0$, доказываются следующие теоремы:

I. Все корни полинома $P(z)$ лежат в области

$$|z| < \max\left[\left(\frac{1+r_{k-1}}{r_k}\left|\frac{a_{k-1}}{a_k}\right|\right)^{1/\alpha_k}\right], \alpha_k = \lambda_k - \lambda_{k-1} \geqslant 1, \quad (1)$$

где $r_0 = 0$, $r_n = 1$, а остальные r — произвольные положительные числа.

При $r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-1} = 1$ получается хорошо известный результат.

II. Все корни полинома $P(z)$ лежат в области

$$|z| \geqslant \min\left[\left(f_1\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\right)^{1/\alpha_n}, \ldots, \left(f_{n-2}\left|\frac{a_2}{a_1}\right|\right)^{1/\alpha_2}, \left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right|\frac{\sum_{\nu=0}^{n-1}\prod_{u=1}^{\nu} f_u}{\prod_{\nu=1}^{n-1} f_\nu}\right)^{1/\alpha_1}\right], \quad (2)$$

где $f_1, \ldots, f_{n-1}$ — произвольные положительные числа.

Н. Н. Мейман

Примечание редакции. В статье встречаются опечатки, например, приведенные в реферате неравенства (1) и (2) набраны в тексте статьи с ошибками

298. **О нулях многочленов. Бернацкий** (Sur les zéros des polynomes. Biernacki Mieczyslaw), Ann Univ. M. Curie Sklodowska, 1955 (1957), **A9**, № 1-13, 81—98 (франц.; рез. русск., польск.)

Устанавливается теорема, в известном смысле обратная классической теореме Гаусса—Люка, утверждающей, что выпуклая область, содержащая все нули многочлена, содержит также все нули его производной.

Теорема I. Если все нули многочлена $P(z)$ лежат в ограниченной выпуклой области. K и точка a лежит внутри K, то нули многочлена $\int_a^z P(z)\,dz$ лежат в замкнутой области $R(K, a)$, граница которой есть огибающая семейства окружностей, проходящих через точку a и центры которых описывают границу области K.

В частности, если все нули многочлена $P(z)$ лежат на отрезке $[b,c]$, содержащем точку a, то все нули многочлена $\int_a^z P(z)\,dz$ лежат в замкнутых кругах с центрами в точках b и c и соответственно с радиусами $|b-a|$ и $|c-a|$. Если же все нули многочлена $P(z)$ лежат в круге $|z-a| < R$, то все нули многочлена $\int_a^z P(z)\,dz$ лежат в круге $|z-a| \leqslant 2R$, если $P(z)$ нечетной степени, и в круге $|z-a| \leqslant 2R\cos\frac{\pi}{2(n+1)}$, если многочлен $P(z)$ четной степени. Причем этот результат не может быть улучшен.

Следующее предложение обобщает один результат Г. Cerë (Szegö G., Math. Z., 1922, **13**, 28—55).

Теорема III. Если многочлен $P(z) = a_0 + \ldots + a_n z^n$ не обращается в нуль в круге $|z| < R$, то многочлен $Q(z) = a_0 + \ldots + a_{n-p} z^{n-p}$ $(p < n)$ не обращается в нуль в круге $|z| < R/(p+1)$.

Эта граница достигается при $P(z) = (1+z)^n$, $p = n-1$.

Несколько усиливая один свой старый результат, автор получает следующую теорему: Если многочлен $P(z)$ принимает в круге $|z-a| < R$ точно p раз значение $P(a)$, то он будет p-листным в круге

$$|z-a| < \frac{(p-1)!\,R}{(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)(2n-2p+1)}.$$

В. С. Виденский

299. **О вещественности корней уравнения $\operatorname{tg} z = z$. Тулянская Т. С.**, Уч. зап. Чкаловского гос. пед. ин-та, 1957, вып. II, 239—242

Несостоятельный вариант доказательства известного факта (Пойа, Сеге, Задачи и теоремы из анализа, Гостехиздат, М., 1956, ч. II, стр. 76; РЖМат, 1957, 7120К)

Г. Н. Чеботарев.

300. **Об эрмитовых двоякопериодических функциях третьего рода. Ананда-Рау** (On Hermite's doubly periodic functions of the third kind. Ananda-Rau K.), J. Indian Math. Soc., 1957, 21, № 1-2, 67—72 (англ.)

Двоякопериодической функцией третьего рода называется произвольная мероморфная функция $\psi(u)$, удовлетворяющая системе уравнений:

$$\psi(u+2\omega) = \exp(au+b)\,\psi(u),\ \psi(u+2\omega') = \exp(cu+d)\,\psi(u),$$

где a, b, c, d, ω и ω' — комплексные числа и $\operatorname{Im}\frac{\omega}{\omega'} \neq 0$.

Доказана следующая теорема о построении двоякопериодической функции третьего рода: Пусть $q = e^{i\alpha}$, где $\alpha = \beta + i\gamma$, $\gamma > 0$, k — натуральное число и $\Phi(z)$ — мероморфная или целая функция, обладающая свойствами: 1) $\Phi(z)$ удовлетворяет уравнению $\Phi(z+\pi) = C\Phi(z)$, где C — постоянная; 2) существуют такие две постоянные $L > 0$, $A > 0$, что $\gamma A < k$ и $|\Phi(z)| < \exp A y^2$ при $|y| > L$, $y = \operatorname{Im} z$. Тогда при произвольном постоянном h ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{kn^2} e^{hn+2kniz}\,\Phi(z+n\alpha)$$

сходится для всех значений z, отличных от полюсов функций $\Phi(z+n\alpha)$, и его сумма $F(z)$ является двоякопериодической функцией третьего рода по отношению к периодам π и α. Далее, полюсы функции $F(z)$ находятся среди полюсов функций $\Phi(z+n\alpha)$ и главная часть функции $F(z)$ в окрестности полюса равна сумме главных частей членов ряда в окрестности того же полюса.

В конце статьи приведены корректуры к другой статье автора (РЖМат, 1957, 5479).

А. Г. Нафталевич

301. **Псевдолокально компактные пространства. Синклер** (Pseudo locally compact spaces. Sinclair Annette), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 2, 215—222 (англ.)

Пусть в множестве R введены две топологии $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$. Топологическое пространство $(R, \mathfrak{R})$ называется $\mathfrak{R}'$-псевдолокально компактным, если каждая окрестность $N_p(R, \mathfrak{R})$ произвольной точки $p \in R$ содержит окрестность этой точки $N_p'(R, \mathfrak{R})$, замыкание которой $\bar{N}_p'(R, \mathfrak{R})$ компактно в топологии $\mathfrak{R}'$. Две топологии $\mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}''$ множества R называются локально эквивалентными по отношению пространства $(R, \mathfrak{R})$, если каждая окрестность $N_p(R, \mathfrak{R})$ содержит окрестность $N_p'(R, \mathfrak{R})$, так что топологии, индуцированные $\mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}''$, в замыкании $\bar{N}'_p(R, \mathfrak{R})$ эквивалентны.

Теорема 2. Пусть $(R, \mathfrak{R})$ является $\mathfrak{R}'$-псевдолокально компактным топологическим пространством. Тогда каждая топология $\mathfrak{R}''$, определенная некоторой метрикой, которая сильнее топологии $\mathfrak{R}'$ и для кото

рой $(R, \mathfrak{R})$ будет $\mathfrak{R}''$-псевдолокально компактно, локально эквивалентна $\mathfrak{R}'$, если $\mathfrak{R}'$ является T_2-топологией (т. е. удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа); каждая T_2-топология $\mathfrak{R}''$, которая слабее $\mathfrak{R}'$, локально эквивалентна $\mathfrak{R}'$, если $(R, \mathfrak{R})$ метризуемое.

В качестве примера рассматривается множество S всех мероморфных функций в некоторой открытой области D комплексной плоскости. Пусть $\mathfrak{R}$ — топология, определенная метрикой $d(f,g) = \sup_{z \in D - I_{f,g}} |f(z) - g(z)|$, где $I_{f,g}$ — множество полюсов функций $f(z)$ и $g(z)$.

Топология $\mathfrak{R}'$ определяется метрикой

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,g)}{1 + d_n(f,g)},$$

где $d_n(f,g) = \sup_{z \in D_n - I_{f,g}} |f(z) - g(z)|$ и D_n — некоторая возрастающая последовательность областей с $\sum_n D_n = D$ и $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Топология $\mathfrak{R}$ сильнее топологии $\mathfrak{R}'$. Сходимость по топологии $\mathfrak{R}'$ эквивалентна равномерной сходимости в любом $\overline{D}_n$. Доказывается, что пространство $(S, \mathfrak{R})$ является $\mathfrak{R}'$-псевдолокально компактным. К. М. Фишман

302. Об одном свойстве линейных преобразований аналитических пространств. Краплин М. А., Сб. научно-техн. работ. Азово-Черноморск. ин-т механиз. с. х., 1957, вып. 10, 349—350

A_R и $\overline{A}_R$ — пространства точек $(a_0, a_1, \ldots)$, для которых соответственно $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R}$ и $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R}$.

Анализируя теорему М. Г. Хапланова о необходимых и достаточных условиях преобразования пространства A_1 в пространство $\overline{A}_1$ (Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 1) и свою теорему о преобразовании пространства A_∞ в пространство $\overline{A}_0$, автор устанавливает, что: 1) линейное преобразование не может переводить пространство A_1 во все пространство $\overline{A}_1$; 2) линейное преобразование не может переводить пространство A_∞ во все пространство $\overline{A}_0$. Э. З. Шувалова

303. Об областях Рунге первого рода. Макарова Л. Я., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьск. соц. революции. Вып. 2, Томск, Томский ун-т, 1957, 12—13

Рассматриваются области голоморфности $\{D\}$ пространства комплексных переменных w, z, определенные условиями вида $p_j(w, z) \in D_j$; $j = 1, \ldots, n$, где $p_j(w, z)$ — полиномы, D_j — область в плоскости p_j с границей L_j, состоящей из контуров $l_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \ldots$. Здесь $l_0^{(j)}$ — внешний контур, а остальные $l_k^{(j)}$ являются внутренними контурами.

В сообщении анонсируются теоремы, содержащие условия, при выполнении которых область D оказывается выпуклой относительно класса полиномов (т. е. оказывается областью Рунге 1-го рода). Одна из этих теорем утверждает, что последнее имеет место, если $p_j(\Gamma_j) \in l_0^{(j)}$, $j = 1, \ldots, h$. Здесь Γ_j — вся трехмерная часть границы области D, принадлежащая к гиперповерхности, определенной условием $p_j(w, z) \in L_j$.

Б. А. Фукс

304. Об одном аналитическом инварианте и его характеристических свойствах. Лу Ц и-ц з я н ь (An analytic invariant and its characteristic properties. Look K. H.), Sci. Rec., 1957, **1**, № 5, 307—310 (англ.)

Для области D пространства N комплексных переменных $z_1, \ldots, z_N$ рассматриваются инварианты

$$L(D) = \inf_{z \in D,\ |u^\alpha| \neq 0} \omega(z, u^\alpha) \quad \text{и}$$

$$V(D) = \sup_{z \in D,\ |u^\alpha| \neq 0} \omega(z, u^\alpha),$$

где $\omega(z, u^\alpha)$ — риманова кривизна бергмановой метрики области D по аналитическому направлению, определяемому вектором u^α (по поводу определений см., например, Фукс Б. А. Теория функций многих переменных, М., Гостехиздат, 1948, стр. 423 и след.). В случае, если D является одной из неприводимых классических областей R_{I}, R_{II}, R_{III}, R_{IV}, инвариант $V(D)$ выражается через $L(D)$ и $K_0(D)$. $V(D) = L(D)/K^2{}_0(D)$ (по поводу определения классических областей и инварианта $K_0(D)$ см., например, РЖМат, 1958, 3684).

В заметке указываются значения $L(D)$ для областей R_{I}, R_{II}, R_{III}, R_{IV} и устанавливается, что значения инвариантов $L(D)$ и $K_0(D)$ единственным образом определяют подобную область. Это дает затем автору возможность указать голоморфно неэквивалентные классические области. Б. А. Фукс

305. Точки неопределенности функции, гармонической внутри сферы. Багемил (Ambiguous points of a function harmonic inside a sphere. Bagemihl F.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 153—154 (англ.)

Пусть S — единичный шар (открытый) и T — его поверхность. Доказывается, что существует гармоническая функция $h(P)$ $(P \in S)$ такая, что для каждой точки $Q \in T$ и для каждого действительного числа r $(-\infty \leqslant r \leqslant +\infty)$ существует жорданова дуга J_r^Q, принадлежащая S, за исключением ее конечной точки Q, и удовлетворяющая условию:

$$\lim_{P \to Q,\ P \in J_r^Q} h(P) = r.$$

Доказательство опирается на существование непрерывной функции $f(P)$, обладающей теми же свойствами, установленное Пираняном (РЖМат, 1958, 6564).

А. И. Маркушевич

306. О проекционном операторе для гармонических отображений. Тайтус (A projection operator on harmonic mappings. Titus C. J.), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 1, 91—94 (англ.)

Рассматриваются отображения $w = u + iv$, где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ — гармонические функции плоской области. Через J обозначается матрица Якоби этого отображения, а через P — оператор, называемый оператором проектирования и определяемый на множестве матриц $\{A\}$ второго порядка формулой

$$P(A) = \frac{1}{2}(A + KAK^{-1}), \qquad \text{где } K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показывается: 1) оператор P инвариантен на множестве матриц Якоби аналитических функций, 2) $P(P(J)) = P(J)$, 3) $\det P(J) \geqslant \det J$ и 4) существует аналитическая функция $w = u + iv$, для которой $P(J)$ является матрицей Якоби.

С помощью свойств проективного оператора доказывается теорема: Если $w = u + iv$ — гармоническое отображение такое, что $\det J \geqslant 0$ на область D, то W является квазиоткрытым.

Примечание референта. Как утверждение этой теоремы, так и справедливость других топологических свойств гармонических отображений, а также ответы на задачи, поставленные автором, являются следствием результатов референта (по-видимому, неизвестных автору) по изучению структуры гармонических отображений (РЖМат, 1954, 4408; 1957, 7825, 8535), ибо если на области D имеет место $\det J \geqslant 0$ и $\det J \not\equiv 0$, то это влечет за собой, что область D принадлежит канонической компоненте (в терминах референта) и значит $\det J$ обращается в нуль только в изолированных точках. Отсюда следует, в частности, открытость гармонического отображения в D.

Л. Д. Кудрявцев

307. Одна теорема из круга идей, относящихся к лемме Шварца из теории функций для комплексного банахова пространства. Шифердеккер (Einige Sätze aus dem Ideenkreis des Schwarzschen Lemmas der Funktionentheorie in komplexen Banach—Räumen. Schieferdecker Eberhard), Math. Ann., 1957, 132, № 5, 430—441 (нем.)

Рассматриваются два полных банаховых комплексных пространства X и Y и функция $f(x)$, определенная в некоторой области G пространства X, значения которой принадлежат пространству Y. Функция $f(x)$ называется F-голоморфной в G, если она в каждой точке $x \in G$ имеет в смысле Фреше оператор-производную (являющуюся элементом банахова пространства $[X, Y]$ всех ограниченных линейных операторов, отображающих X в Y). Доказывается, что если функция $f(x)$ при $\|x\| < R$ является F-голоморфной и удовлетворяет неравенству $\|f(x)\| \leqslant M$, то при $\|x\| < R$ имеют место неравенства

$$\|f(x)\| < M \frac{M\|x\| + R\|f(0)\|}{MR + \|f(0)\|\|x\|}, \qquad (1)$$

$$\|f'(x)\| < \frac{2MR}{R^2 - \|x\|^2}, \qquad (2)$$

если же, кроме того, $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, $n \geqslant 1$, то

$$\|f(x)\| \leqslant \frac{M}{R^n}\|x\|^n. \qquad (3)$$

Попутно с доказательством неравенств (1) — (3) изучаются некоторые другие свойства F-голоморфных функций. Отмечается, что неравенство (1) в частном случае $f(0) = 0$, а значит и неравенство (3) при $n = 1$, являющиеся, очевидно, аналогом классической леммы Шварца, были получены ранее в одной работе Симода (РЖМат, 1954, 4850).

Л. Д. Кудрявцев

308. Преобразованная форма неравенства Коши. Ли Го-пин (Lee K. P.), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1957, 7, № 3, 340—345 (кит.)

Дается значительно более простое доказательство (при несколько более общих условиях) основной теоремы Мандельбройта (выражающей собой принцип «примыкающих» рядов), содержащейся в книге Мандельбройта «Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения» (РЖМат, 1956, 6553).

А. Ф. Леонтьев

309. Квазианалитические функции. Данжуа (Les fonctions quasi analytiques. Denjoy Arnaud), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 5, 581—586 (франц.)

Доказываются два утверждения, анонсированные автором в 1921 г. (C. r. Acad. sci, 1921, 173, 1320). Пусть $f(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция на $[0, 1]$ и M_n — максимум модуля $f^n(x)$ на этом интервале. Первое утверждение состоит в том, что если $f(x)$ вместе со всеми своими производными обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 1$ и если $\sqrt[n]{M_n} < \frac{1}{\Psi'(n)}$, где $\Psi(x) = \ln \lambda(x)$, $\lambda(x)$ — обратная функция к целой функции $E(x) = \sum e^{-A_p} x^p$, то при определенных условиях, наложенных на величины A_p, $f(x) \equiv 0$. Второе утверждение состоит в том, что для функций, обращающихся вместе со всеми своими производными в нуль в точке $x = 0$, ряд $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}}$ может сходиться как угодно медленно.

А. Ф. Леонтьев

310. Об обобщенных аналитических функциях. Зморович В. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, 19, 3—65

Излагаются основы алгорифмической теории функций $f(z) = u + iv$ $(z = x + iy)$, определенных эллиптической системой уравнений

$$u_x = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y,$$
$$u_y = c(x, y)v_x + d(x, y)v_y$$

строится дифференцирование и интегрирование в классе этих функций (более подробно см. РЖМат, 1957, 1367).

Г. Н. Положий

311. Дифференцируемые аппроксимации внутренних функций. Джуэтт (Differentiable approximations to interior functions. Jewett John), Duke Math. J., 1957, 24, № 2, 227—232 (англ.)

Статья является продолжением предыдущей (РЖМат, 1957, 3070) и содержит некоторые дополнения к ней. Кроме того, доказываются теоремы.

1. Пусть G—ограниченное открытое плоское множество и f—непрерывное отображение G в метрическое пространство, причем f не является постоянным ни на каком открытом подмножестве множества G. Тогда существует гомеоморфное отображение h замыкания открытого множества G на себя такое, что $h(x) = x$ для всех точек x границы G, а fh не постоянно ни на каком прямолинейном сегменте, лежащем в G.

2. Пусть D—плоская область и пусть f — вещественная непрерывная на $\overline{D}$ функция, осуществляющая открытое отображение D в прямую R^1. Тогда для любого целого положительного числа n и произвольного $\varepsilon > 0$ существует вещественная функция g, определенная на $\overline{D}$ и такая, что: 1) $|f(z) - g(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in \overline{D}$; 2) функция g непрерывна на $\overline{D}$ и открыто отображает D в R^1; 3) функция g непрерывно дифференцируема в D до порядка n включительно; 4) $g = f$ на границе области D.

Л. Д. Кудрявцев

312. Аппроксимация с помощью трансляции одной функции. Куигли (Approximation by the translates of a single function. Quigley Frank), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1021—1023 (англ.)

Рассматривается локально компактное хаусдорфово пространство, в котором существует последовательность попарно непересекающихся компактов C_n и гомеоморфизмов σ_n пространства X на себя, $n = 1, 2, \ldots$ таких, что, каков бы ни был компакт $K \subset X$ для почти всех n, пересечение K с C_n пусто и почти для всех n $K \subset \sigma_n(C_n)$.

Доказывается, что для всякого счетного семейства действительных (или комплексных) функций f, определенных на X, существует действительная, соответствен-

но комплексная, функция F такая, что для всякой последовательности $\{f_i\}$ функций из семейства f, равномерно сходящейся на компактных подмножествах пространства X для некоторой подпоследовательности индексов n_i, имеет место

$$\lim_{i\to\infty} f_i = \lim_{i\to\infty} F\sigma_{n_i}^{-1}.$$

Л. Д. Кудрявцев

313. Смешанная граничная задача теории упругости для ортотропного массива с круговым вырезом. Грилицкий (Змішана гранична задача теорії пружності для ортотропного масиву з круговим вирізом. Грилицький Д. В.). Прикл. механіка, 1957, **3**, № 4, 378—386 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается смешанная задача теории упругости для плоской деформации ортотропного тела с круговым вырезом, когда на части контура L_1 заданы компоненты смещения, а на остальной части контура — компоненты напряжения, которые полагаются равными нулю. Задается также главный вектор внешних усилий, приложенных к L_1.

Пользуясь известным представлением комплексных потенциалов для анизотропной среды, автор сводит задачу к системе двух сингулярных интегральных уравнений, решаемых в замкнутом виде при помощи интегралов типа Коши. В качестве примера приводится задача о давлении штампа, жестко связанного с упругим телом по дуге L_1. И. Г. Араманович

314. Распределение напряжений в растягиваемой изотропной прямоугольной пластинке, ослабленной круговым отверстием. Гурьев (Розподіл напружень у розтягуваній ізотропній скінченній прямокутній пластинці, послабленій круговим отвором. Гур'єв М. Ф.), Наук. зап. Полтавськ. держ. пед. ін-т, 1955, 8, 3—26 (укр.)

Рассмотрена задача о распределении напряжений в эллиптической пластинке (аппроксимирующей прямоугольную) с круглым отверстием в ее центре под действием растягивающих усилий.

Комплексные потенциалы отыскиваются методом Д. И. Шермана (см., например, Шерман Д. И., Прикл. матем. и механ., 1951, **15**, № 3, 297—316). Приведены конкретные примеры вычисления напряжений.

И. Г. Араманович

315. Об определении напряжений в скручиваемом круглом брусе, ослабленном призматической полостью. Исмаилов М. У., Элми эсэрлэр. Азерб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 11, 39—48 (рез. азерб.)

В работе Д. И. Шермана (Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1951, № 7) дано решение задачи о кручении круглого бруса с квадратным отверстием, закругленным по углам, центр которого совпадает с центром круга. В реферируемой статье рассматривается та же задача, однако функция, конформно отображающая внешность квадрата в сечении бруса на внешность единичного круга, берется в четырехчленном виде, а не в двучленном, как в названной работе. При этом радиусы закруглений в углах квадрата значительно уменьшаются, что позволяет уточнить величины концентрации напряжений в углах. Приведены примеры. И. Г. Араманович

См. также: 38, 245, 253, 496, 518, 522, 528, 543, 544, 579, 804

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

316. О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. Курцвейль Ярослав, Ворел Зденек, Чехосл. матем. ж., 1957, **7**, № 4, 568—583 (рез. англ.)

Вначале авторы сообщают теорему М. А. Красносельского и С. Г. Крейна (РЖМат, 1956, 4493; опечатка в реферате: вместо η_0 должно быть λ_0) о непрерывном изменении решения начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при интегрально непрерывном изменении правых частей системы. На правые части накладываются требования, аналогичные условиям Каратеодори; обобщение в основном состоит в том, что, наряду с правыми частями, варьируется и начальное условие, а область изменения искомых функций не предполагается ограниченной. Далее доказана аналогичная теорема для системы, записанной в векторном виде $d^n x/dt^n = X(t, x, \lambda)$; при этом предполагается, что для любых $\lambda\in\Delta$, $x\in D$ существуют векторы $\alpha_0(\lambda), \ldots, \alpha_{n-1}(\lambda)$, для которых равномерно по $x\in D$, $t\in[0, T]$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left\{\int_0^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda)\, d\sigma - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\alpha_i(\lambda)}{i!} t^i\right\} =$$

$$= \int_0^t \frac{(t-\sigma)^{n-1}}{(n-1)!} X(\sigma, x, \lambda_0)\, d\sigma$$

(прочие ограничения естественны и аналогичны поставленным в предыдущей теореме). Утверждается, что при достаточно малых $\lambda - \lambda_0$ и $x^{(i)}(0, \lambda) - x^{(i)}(0, \lambda_0) + \alpha_i(\lambda)$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ решение $x(t, \lambda)$ существует на всем отрезке $[0, T]$, причем разность $x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)$ равномерно как угодно мала. Приведен пример. А. Д. Мышкис

317. Теорема о непрерывной дифференцируемости решений $F(x, y, y') = 0$. Пахале (Ein Satz über die stetige Differenzierbarkeit der Lösungen von $F(x, y, y') = 0$. Pachale Helmut), Elem. Math., 1958, **13**, № 2, 38—39 (нем.)

318. О некоторых свойствах последовательностей Пикара. Густый (O některých vlastnostech Picardových posloupností. Hustý Zdeněk), Mat.-fys. časop., 1958, **8**, № 1, 7—19 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор рассматривает последовательности Пикара, относящиеся к уравнению $y' = f(x, y)$, к точке $(0, 0)$ и к начальной функции $y_0(x)$. Он предполагает, что для некоторого натурального числа n справедливо неравенство $y_0 \geqslant f(x, y_{n-1}(x))$ или $y_0' \leqslant f(x, y_{n-1}(x))$ и что функция $f(x, y)$ монотонна по y. Доказано, что при этих условиях последовательность $\{y_{\nu\mu+s}\}_{\nu=1}^{\infty}$, $s = 0, 1, \ldots, n-1$, равномерно сходится к некоторой функции Y_s и что система этих функций удовлетворяет дифференциальной системе $Y_s' = f(x, Y_{s-1})$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$, $Y_0' = f(x, Y_{n-1})$. Автор главным образом занимается случаем $n = 2$ и связью функции Y_s с решением $y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$. M. Švec

319. Решение линейных дифференциальных уравнений. **Сиокос Х.**, Техника хроника. Диминеа эпистимоники эксдосис, 1957, **34**, № 398, 250—254 (греч.)

Рассматривается применение операционного метода к решению уравнений с постоянными коэффициентами.

В. В. Немыцкий

320. Заметка об общем решении вырожденного гипергеометрического уравнения. Миллер (Note on the general solution of the confluent hypergeometric equation. Miller J. C. P.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1957, **11**, № 58, 97—99 (англ.)

Автор обращает внимание на то, что приведенное в заметке Коррингтона (Math. Tables and Other Aids Comput, 1947, **2**, 352—353) общее решение вырожденного гипергеометрического уравнения $xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0$ не охватывает всех возможностей, к нему относящихся. В связи с этим он записывает общее решение этого уравнения для любых значений α и γ.

М. Н. Олевский

321. Уравнения, приводящиеся к линейному виду. Нордхаус (Equations reducible to linear form. Nordhaus E. A.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 3, 177 (англ.)

322. Аналитическая теория нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Еругин Н. П., Тр. Ин-та физ. и матем. АН БССР, 1957, вып. 2, 235—248

Обзор проблем и методов аналитической теории дифференциальных уравнений, относящихся к вопросу существования у решений дифференциальных уравнений подвижных особых точек. Сначала приводится перечень вопросов, исследованных Пенлеве. Излагаются в общих чертах методы Пенлеве, позволившие ему выделить уравнения 2-го порядка, не имеющие подвижных многозначных и существенно особых точек. Затем намечаются некоторые новые проблемы и пути их решения. В частности, излагаются методы автора, позволяющие: 1) выделить класс систем двух уравнений 1-го порядка, решения которых не имеют подвижных существенно особых точек (как одно-, так и неоднозначных), 2) построить решения таких систем в окрестности подвижных особых точек.

А. Ф. Андреев

323. Связь между сходящимися и асимптотическими разложениями при решении линейных дифференциальных уравнений первого ранга. Кноблох (Zusammenhänge zwischen konvergenten und asymptotischen Entwicklungen bei Lösungen linearer Differentialsysteme vom Range Eins. Knobloch Hans-Wilhelm), Math. Ann., 1958, **134**, № 3, 260—288 (нем.)

Рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений $y'=yM$, (1)

где при $|x|>k$ $M=\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^{-\nu}$.

Каждому нормальному ряду

$$\mathfrak{v}(x)=e^{\alpha x}x^{-\sigma}\sum_{l=0}^{m}\log^l\left(\frac{1}{x}\right)\sum_{\mu=0}^{\infty}a_{e\mu}x^{-\mu}, \qquad (2)$$

формально удовлетворяющему системе (1), сопоставляется функция

$$v(t)=\sum_{k=0}^{m}\log^k t\sum_{\mu=0}^{\infty}\bar{a}_{k\mu}\frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\sigma+\mu)}t^{\sigma+\mu-1} \qquad (3)$$

такая, что асимптотическое разложение интеграла Лапласа

$$l_\nu(x)=\int_0^1 e^{(1-t)\alpha x}v(t)\,dt \qquad (4)$$

в полуплоскости $\mathrm{Re}(\alpha x)>0$ совпадает с $\mathfrak{v}$.

Устанавливается, что коэффициенты $\bar{a}_{k\mu}$ однозначно выражаются через $a_{k\mu}$ и наоборот. Доказывается, что для целых функций (4) имеет место равенство

$$l'_\nu-l_\nu\mu\equiv 0 \bmod x^{-1}.$$

Далее рассматриваются формальные ряды Лорана, у которых сумма членов с положительными степенями x определяет некоторую целую функцию, в то время как оставшаяся часть представляет собой, вообще говоря, расходящийся ряд. Ставится задача: построить решения системы (1) в виде таких рядов. Доказывается, что всякая матрица решений в виде рядов указанного типа Y может быть представлена в виде $Y=CX$, где C — постоянная матрица, $X=L+\sum_{\nu=1}^{\infty}x^{-\nu}\Delta(\alpha)V^{(\nu-1)}$, (1)

здесь L — матрица функции (+), $V(t)$ — матрица функций (3), $\Delta(\alpha)$ — диагональная матрица, состоящая из характеристических чисел матрицы A_0, взятых в том же порядке, в котором они входят в выражения (2) и (3).

В заключение анализируется случай, когда в выражениях (2), а следовательно, и в функциях (3) отсутствуют логарифмические члены. В этом случае

$$X=\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}x^\nu X_\nu, \quad \text{причем}$$

$$X_\nu=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|x|=k}\frac{\mathfrak{V}(t)\,dt}{t^{\nu+1}}, \qquad (5)$$

где $\mathfrak{V}(x)$ — матрица нормальных рядов (2). Выражение, стоящее справа, понимается следующим образом: вместо $\mathfrak{V}(x)$ следует подставить выражения (2), почленно проинтегрировать, совершить почленно предельный переход и потом просуммировать. Формула (5) аналогична обычной формуле для коэффициентов ряда Лорана.

Д. И. Костомаров

324. Изложение в школе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Лирман (Zur Behandlung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten in der Schule. Liermann H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 3, 133—134 (нем.)

325. Несколько замечаний о символическом методе. Коничек (Několik poznámek k symbolické methodě. Koníček Oldřich), Slaboproudý obzor, 1958, **19**, № 2, 98—101 (чешск.; рез. русск., нем., англ., франц.)

326. Обобщение функциональной зависимости $Y(t+s)=Y(t)\cdot Y(s)$ на кусочно-линейные дифференциально-разностные уравнения. Басс (A generalization of the functional relation $Y(t+s)=Y(t)\cdot Y(s)$ to piecewise-linear difference-differential equations. Bass Robert W.), Quart. Appl. Math., 1957, **14**, № 4, 415—417 (англ.)

Рассматривается уравнение $y'(t)=Ay(t)+f\left[\sum(t-t_d)\right]$, где A — квадратная матрица с постоянными коэффициентами, y и f — вектор-функции, t_d — постоянное неотрицательное запаздывание, f — кусочно-постоянная функция с постоянным значением на интервалах, длина которых равна $4t_d$, $\sum(t)=b\cdot By(t)$, b — постоянный вектор, B — постоянная матрица.

Рассматривается также некоторое обобщение этого уравнения. На эти уравнения обобщается в несколько измененном виде известная для уравнений

$$y'(t)=Ay(t) \qquad (2)$$

зависимость $Y(t+s)=Y(t)\cdot Y(s)$, где $Y(t)$ — матрица фундаментальной системы решений уравнения (2). С помощью этого обобщения удается свести рассматриваемые уравнения с запаздыванием на некотором интервале к уравнениям без запаздывания.

Л. Э. Эльсгольц

327. Замечания к работе относительно дифференциально-разностных уравнений. Хан (Bemerkungen zu der Arbeit über Differential-Differenzengleichungen. Hahn Wolfgang), Math. Ann., 1956, **132**, № 1, 94 (нем.)
Указывается исправление к работе автора, РЖМат, 1958, 5674.

328. О канонической форме дифференциальных операторов второго порядка. Феллер (On the intrinsic form for second order differential operators. Feller William), Illinois J. Math., 1958, 2, № 1, 1—18 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — одномерный дифференциальный оператор второго порядка, обладающий следующими свойствами: 1) если $f(s)=0$ для всех s в некоторой окрестности точки s_0, то $f\in D(\mathfrak{A}, s_0)$ и $\mathfrak{A}f(s_0)=0$ ($D(\mathfrak{A}, s_0)$ — совокупность функций $f(s)$ таких, что f и $\mathfrak{A}f$ определены и непрерывны в некоторой окрестности точки s_0); 2) для каждой точки s из интервала I, на котором задан оператор $\mathfrak{A}$, существует функция f, $f(s)\neq 0$, $\mathfrak{A}f(s)\neq 0$; 3) если $f\in D(\mathfrak{A}, s)$, $f(s)=0$ и $f\geqslant 0$ в некоторой окрестности точки s, то $\mathfrak{A}f(s)\geqslant 0$, или 3′) если функция $f\in D(\mathfrak{A}, s)$ имеет относительный минимум в s, то $\mathfrak{A}f(s)\geqslant 0$.

В первой части статьи рассматриваются операторы, обладающие свойствами 1), 2), 3′) (например, $\mathfrak{A}=aD_s^2+bD_s$, $a>0$, $D_s=d/ds$). Для такого оператора точка x_0 определяется как регулярная, если $D(\mathfrak{A}, x_0)$ содержит как возрастающую, так и убывающую функцию $f(x)$, для которых $\mathfrak{A}f(x_0)>0$. Нерегулярные точки названы точками первого порядка. Это определение оправдывается следующими обстоятельствами. Если все точки интервала I регулярны, то существует такая строго возрастающая непрерывная функция $x(s)$ и строго возрастающая непрерывная справа функция $m(s)$, что $\mathfrak{A}f=D_mD_xf$ для всех $f\in D(\mathfrak{A}, s)$, $s\in I$ (при этом правая производная от некоторой функции $g(s)$ по функции $m(s)$ определяется как

$$D_m^+g(s)=\lim_{s_2\downarrow s_1}\frac{g(s_2^+)-g(s_1^-)}{m(s_2^+)-m(s_1^-)},$$

левая производная определяется симметрично и $D_m=D_m^+=D_m^-$, когда второе из этих равенств имеет место). Функция $x(s)$ определяется с точностью до линейного преобразования $x\to px+\text{const}$. При выбранном x „каноническая мера“ m определена с точностью до произвольной постоянной. Требование регулярности всех точек можно заменить требованием, чтобы каждому $s\in I$ отвечала такая окрестность N_ε, что в N_ε существуют два линейно независимых решения уравнения $\mathfrak{A}u=0$. Далее, существует в I строго возрастающая непрерывная функция $x(s)$ такая, что в каждой точке первого порядка либо $\mathfrak{A}f(s)=D_x^+f(s)$, либо $\mathfrak{A}f(s)=-D_x^+f(s)$ для всех $f\in D(\mathfrak{A}, s)$. Дана классификация точек первого рода и в каждом из представляющихся в силу этой классификации случаев последнее утверждение уточняется.

Во второй части статьи рассмотрены операторы $\mathfrak{A}$, обладающие свойствами 1), 2), 3) (например, $\mathfrak{A}=aD_s^2+bD_s+c$, $a>0$). В этом случае точка $s_0\in I$ названа точкой нулевого порядка, если $\mathfrak{A}f(s_0)=kf(s_0)$ для всех $f\in D(\mathfrak{A}, s_0)$; точкой первого порядка, если существуют в окрестности N точки s_0 строго возрастающая непрерывная функция V и непрерывная функция λ такие, что $\mathfrak{A}f(s_0)=\pm D_y^+(f\lambda)(s_0)$ для всех $f\in D(\mathfrak{A}, s_0)$. Все остальные точки названы регулярными. Доказано, что если все точки $s\in I$ регулярны, то существует такая параметризация x и „каноническая мера“ m, что

$$\mathfrak{A}f=\frac{1}{\varphi}D_m\left(\varphi^2D_x\frac{f}{\varphi}\right)=\frac{1}{\psi}D_m\left(\psi^2D_x\frac{f}{\psi}\right),$$

где φ, ψ — решения уравнения $\mathfrak{A}u=0$ такие, что $\varphi^2(\psi/\varphi)'=\text{const}$. Показано, что уравнение $\mathfrak{A}u=0$ имеет не более двух линейно независимых решений. В заключение приводятся примеры. И. В. Гельман

329. О неотрицательности функций Грина. Белман (On the non-negativity of Green's functions. Bellman Richard), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 3, 411—413 (англ.; рез. итал.)
Решение задачи

$$u''+q(x)u=f(x), \qquad u(0)=u(1)=0$$

можно представить в виде

$$u=\int_0^1K(x, y)f(y)\,dy,$$

где $K(x, y)$ — функция Грина. Пусть λ_1 — наименьшее собственное значение однородной краевой задачи

$$u''+\lambda u=0, \qquad u(0)=u(1)=0$$

(в рассматриваемом случае $\lambda_1=\pi^2$). В заметке дано простое доказательство теоремы Ароншайна и Смита (РЖМат 1958, 7733): если $q(x)\leqslant\lambda_1-d$, $d>0$, то $K(x, y)\leqslant 0$ при $0\leqslant x, y\leqslant 1$.
И метод доказательства, и результат переносятся на уравнения в частных производных, например

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+q(x, y, z)u=f \\ u=0 \qquad \text{на границе конечной области.}\end{cases}$$

Опечатка: в уравнении (3,2) пропущено λ.
И. М. Соболь

330. Восстановление тензорных сил по данным рассеяния. Агранович З. А., Марченко В. А., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 6, 1055—1058
Рассматривается система двух уравнений, эквивалентная матричному уравнению

$$Y''-[V(x)+6x^{-2}P]Y+\lambda^2Y=0 \qquad (0<x<\infty), \quad (A)$$

где $V(x)$ — эрмитова матрица, удовлетворяющая при некотором $\varepsilon>0$ условию:

$$\int_0^\infty t^{1+\theta}|V(t)|dt<\infty \qquad (-\varepsilon<\theta<\varepsilon),$$

$$|V|=\max\{|v_{11}|+|v_{12}|, |v_{21}|+|v_{22}|\}.$$

$P=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. Опираясь на результаты своей работы, посвященной исследованию обратной задачи для системы уравнений, коэффициенты которой имеют первый абсолютный момент на полуоси (РЖМат, 1958, 1182), авторы получают характеристические свойства так называемых «данных рассеяния» (т. е. совокупности S-матрицы и матричных множителей, определяющих асимптотику нормированных решений, принадлежащих дискретному спектру) и приводят метод для восстановления матрицы $V(x)$ по данным рассеяния. Имеется несколько примеров, иллюстрирующих полученные результаты.
Л. А. Чудов

331. Асимптотическое поведение производных спектральной функции оператора Штурма—Лиувилля. Саргсян И. С., Изв. АН АрмССР, Сер. физ.-матем. н., 1957, **10**, № 3, 3—16 (рез. арм.)

Уточняя один из результатов своей предыдущей работы (РЖМат, 1958, 1181), автор находит асимптотическую формулу для средних по М. Риссу от производных спектральной функции $\Theta(x, s, \nu)$ задачи Штурма-Лиувилля $y''(x)-q(x)y(x)=0$ $(0\leqslant x<\infty)$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$, с ограниченным снизу спектром.

Если $q(x)$ имеет $k-1$-ю производную, суммируемую в любом конечном промежутке, то

$$\lim_{\mu\to\infty}\left\{\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d\nu\left[\frac{\partial^\kappa\Theta(x,s,\nu)}{\partial x^i\partial s^j}-\frac{\partial^k\Theta^*(x,s,\nu)}{\partial x^i\partial s^j}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(k+1)}{\sqrt{2}}\mu\int_{|x-s|}^1\frac{\partial^k w(x,t,s)}{\partial x^i\partial s^j}\frac{I_{k+1/2}(\mu t)}{(\mu t)^{k+1/2}}dt\right\}=0$$

$$(i+j=k).$$

Здесь $\Theta^*(x,s,\nu)$ — спектральная функция задачи, соответствующей $q(x)=0$, $w(x,t,s)$ — функция, связанная с функцией Римана уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u$

(Левитан Б. М., Успехи матем. наук, 1949, 4,3 — 112).

При доказательстве используются метод Б. М. Левитана (РЖМат, 1956, 2207) и одна тауберова теорема В. А. Марченко (РЖМат, 1956, 8048). Имеются опечатки. Ю. Л. Далецкий

332. О явлении Гиббса при разложении по некоторым собственным функциям. Мишу (On the Gibbs' phenomenon in a certain eigenfunction series. Mishoe Luna I.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 1—5 (англ.)

Изучаются разложения по собственным функциям краевой задачи

$$u''+q(\lambda)u+\lambda[p(x)u-u']=0,\ u(0)=u(1)=0. \qquad (1)$$

В работе Фридмана и Мишу (РЖМат, 1957, 4802) было показано, что ряд $\sum a_n u_n(x)$, где

$$a_n=\left(\int_0^1 u_n(\xi)B^*v_n(\xi)d\xi\right)^{-1}\int_0^1 f(\xi)B^*v_n(\xi)d\xi,$$

$v_n(x)$ — собственные функции сопряженной краевой задачи, $B^*=d/dx+p(x)$, сходится к функции

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]+c\exp\int_0^x p(t)dt,$$

если $f(x)$ — функция ограниченной вариации, $p(x)$ имеет непрерывную вторую производную и $q(x)$ непрерывна на $(0,1)$; c — некоторая постоянная.

В настоящей статье показывается, что ряд по собственным функциям задачи (1) обнаруживает явление Гиббса для функции $q(x)=f(x)+c\exp\int_0^x pdt$, если имеется явление Гиббса при разложении в обычный ряд Фурье функции $f(x)$. Доказательство основано на асимптотических оценках собственных функций и собственных значений задачи (1), полученных в цитированной работе Фридмана и Мишу. Л. А. Чудов

333. Осцилляционные теоремы для дифференциальных уравнений высших порядков и спектр соответствующих дифференциальных операторов. Глазман И. М., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 3, 423—426

Известная связь между осцилляционными свойствами решений линейного уравнения второго порядка и спектром любого самосопряженного оператора, порождаемого этим уравнением, распространена на уравнения высших порядков вида

$$\sum_{\kappa=0}^{n}(-1)^{n-\kappa}[p_k(x)y^{(n-k)}]^{(n-k)}=\lambda y \qquad (1)$$

$$(p_0(x)=1,\quad 0\leqslant x<\infty),$$

$$(-1)^n y^{(2n)}+q(x)y=\lambda y\quad (0\leqslant x<\infty). \qquad (2)$$

Уравнение (1) автор называет осцилляторным, если при любом α найдется решение этого уравнения, имеющее правее α более одного n-кратного нуля.

При этом определении сохраняется упомянутая выше связь со свойствами спектра: для того чтобы уравнение (1) было осцилляторным при $\lambda=\lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы часть спектра оператора, лежащая левее точки $\lambda=\lambda_0$, была бесконечным множеством (теорема 1) (в тексте теоремы 1 имеется опечатка, придающая утверждению теоремы обратный смысл). Анализируя спектр оператора с помощью метода расщепления, автор получает ряд достаточных признаков осцилляторности и неосцилляторности уравнений (1) и (2). Для уравнения (2) получено обобщение классического признака Кнезера. Л. А. Чудов

334. Об отрицательной части спектра одномерных и многомерных дифференциальных операторов над вектор-функциями. Глазман И. М., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 3, 421—424

Рассматриваются самосопряженные расширения оператора

$$l[y]=(-1)^n y^{(2n)}+Q(x)y\quad 0\leqslant x<\infty) \qquad (1)$$

с минимальной областью определения. Приводятся различные достаточные условия, обеспечивающие дискретность, ограниченность и неограниченность, а также конечность отрицательной части спектра. Отмечается связь с осцилляционными свойствами системы (1).

Эти результаты, обобщающие теоремы предыдущей заметки (реф. 333), частично распространяются и на многомерные операторы вида

$$l[u]=-\Delta u+Q(P)u,$$

где $Q(P)$ — эрмитова матрица-функция, определенная во всем n-мерном пространстве. Для одного частного случая (скалярное уравнение при двух независимых переменных) приводится (с доказательством) достаточное условие самосопряженности оператора с минимальной областью определения, полуограниченности снизу и дискретности отрицательной части спектра. Л. А. Чудов

335. Об одном обобщении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Стампаккья (Sopra una generalizzazione dei problemi ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Stampacchia Guido), Ricerche mat., 1954, 3, № 1, 76—94 (итал.)

Пусть $i,j,k=1,\ldots,n$, C—слой $a\leqslant x\leqslant b$, $|y_i|<\infty$ и пусть $V_i-(n-1)$-мерное многообразие в C. Проблема (P) состоит в нахождении в C решений уравнения $(E_1)y_i'=f_i(x,y_k)$, пересекающих многообразие V_i; функции f_i предполагаются непрерывными по y_k и измеримыми по x. Предполагается, что существуют суммируемые $\varphi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ такие, что в C удовлетворяется неравенство $|f_i-\sum\psi_{ij}y_j|\leqslant\varphi_i$. Сначала решения уравнения

$$y_i'=\lambda f_i+(1-\lambda)\sum\psi_{ij}y_j \qquad (E_\lambda)$$

используются для проектирования V_k на гиперплоскость $x=c$, при этом получаются многообразия $u_{k\lambda}$. Предполагая, что u_{k0} имеют общую точку, и при дополнительных предположениях топологическими методами показывается, что $u_{k\lambda}$ имеют общую точку для $0\leqslant\lambda\leqslant1$; случай $\lambda=1$ дает решение для (P).

Далее показывается, что проблема (E_1B) с линейными граничными условиями (B) $\sum_j\gamma_{ij}y_j(x_i^0)=\beta_i$ имеет решение, если линейная однородная задача (E_0,B) имеет нетривиальные решения.

Наконец, если многообразие V_i мало отличается от линейных многообразий (мало расстояние по Фреше), то P имеет решение, если (E_0,B) не имеет нетривиальных решений.

В качестве применения рассмотрена проблема Николетти (Nicoletti's) и нелинейная задача о собственных значениях. F. A. Ficken

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, №4, 363.

336. Поведение интегральных кривых однородного дифференциального уравнения первого порядка. По т-

лов В. В., Уч. зап. Рязанск. гос. пед. ин-та, 1957, **15**, 67—76

Применяется метод Шилова (Успехи матем. наук, 1950, **5**, вып. 5 (39)) к качественному изучению расположения интегральных кривых в окрестности особой точки начала координат для уравнения

$$y' = f(k), \qquad (1)$$

где $k = y/x$. при условиях: 1) $f(k)$ определяет непрерывное поле направлений на всей плоскости, кроме начала координат; 2) множество L точек, в которых $f(k)$ имеет неограниченные производные, является приводимым множеством (т. е. не более чем счетное множество, из которого путем последовательного исключения изолированных точек можно получить пустое множество).

Кроме того, в некоторых теоремах предполагается:

1. Если $f(k) = \frac{P(k)}{Q(k)}$, где P и Q — непрерывные функции, то $Q(k)$ и $kQ(k) - P(k)$ имеют конечное число положительных корней, а действительные их корни не имеют предельных точек.

2. $P(k)$ и $Q(k)$ не имеют общих действительных корней.

Даются условия существования инвариантных прямых: гиперболических, параболических I или II рода.

Даны, кроме того, условия определения топологической структуры интегральных кривых уравнения (1), а также их асимптотического поведения.

М. И. Альмухамедов

337. Особенности дифференциального уравнения. I, II. Гайек (Singularity diferenciální rovnice I, II. Hájek Otomar), Pokroky mat., fys. a astron., 1956, **1**, № 5-6, 551—559; 1957, **2**, № 2, 137—144 (чешск.)

Особой точкой уравнения

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad (1)$$

(x, y — действительные числа, F — непрерывная функция) автор называет такую точку, в которой не соблюдается однозначность. Из доказанных результатов приведем для примера следующее утверждение: пусть S — множество особых точек, S^+ (S^-) — множество точек, в которых не соблюдается однозначность при возрастании (убывании) x, U^α — производная множества U. Если $S \cap S^{+\alpha} \cap S^{-\alpha}$ — счетное множество, то множество S имеет меру 0.

Дается характеристика множества функций $\{f_\alpha\}$, обладающих тем свойством, что существует уравнение (1) такое, что каждая f_α является решением уравнения (1); построен такой пример, что замыканием множества S является ось Y. Доказан еще целый ряд результатов, которые большей частью известны или очевидны.

J. Kurzweil

338. О нелинейных почти периодических дифференциальных уравнениях. Шеффер (Sobre ecuaciones diferenciales no-lineales casi-periódicas. Schäffer Juan Jorge), Bol. Fac. ingr. y agrimensura Montevideo, 1957, **6**, № 2-3, 25—58 (исп.)

Автор доказывает некоторые общие теоремы о равномерной асимптотической ограниченности и равномерном асимптотическом экспоненциальном сближении решений системы $\dot{x} + g[f(x), p(t)] = 0$.

Используя основные теоремы об асимптотически почти периодических функциях, он получает отсюда теоремы о существовании и единственности почти периодического решения, к которому приближаются экспоненциально все другие решения. Приведем наиболее эффективную из этих теорем:

Система $A\dot{y} + g[y, p(t)] = 0$ имеет единственное почти периодическое решение, к которому асимптотически приближаются все другие решения, если выполнены следующие условия: A — симметрическая положительно определенная матрица порядка n, $g(u, v)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая по u в $R^n \times R^{n_1}$ со значениями в R^n, $B(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u, v)$ — непрерывная, симметрическая и положительно определенная, $\lim_{\|u\| \to \infty} \|g(u, v)\| = \infty$ для всех $v \in R^{n_1}$, $p(t)$ — почти периодическая функция со значениями в R^{n_1}.

Дается применение общих теорем к системам вида $M\ddot{x} + N\dot{x} + h(x) + p(t) = 0$.

A. Halanay

339. Условия симметрии поля направлений некоторого дифференциального уравнения. Сибирский К. С., Плешкан И. И., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1957, **29**, 11—14

Авторы рассматривают дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + P(x, y)}{y + Q(x, y)}, \qquad (1$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — полиномы третьей степени, не содержащие постоянных и линейных членов. Как известно, начало координат для уравнения (1) является особой точкой типа фокуса, или центра, причем исчерпывающего перечня всех случаев центра для этого уравнения в настоящее время еще нет. Авторы ставят задачу об определении всех случаев центра для уравнения (1), при которых характеристики этого уравнения симметричны относительно какой-либо оси, проходящей через начало, и решают эту задачу до конца.

Случай центра, при котором характеристики не имеют осей симметрии, авторы не рассматривают.

И. С. Куклес

340. Оценка критического значения параметра α для дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + f(x) = 0.$$

Табуева В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 2, 227—237

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + f(x) = 0, \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$ постоянная, $f(x)$ — непрерывно-дифференцируемая и $f(0) = 0$, $xf(x) > 0$ при $x_2 \leqslant x \leqslant x_1$, $f(x + 2\pi) = f(x)$ (2π — период),

$$f(x_1) = f(x_2) = 0, \qquad (2)$$

где $x_1 - x_2 = 2\pi$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ — ближайшие к $x = 0$ нули функции $f(x)$, кроме того,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \geqslant 0. \qquad (3)$$

Рассматривается также эквивалентная система

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\alpha y - f(x) \qquad (4)$$

и уравнение в фазовой плоскости

$$y\frac{dy}{dx} + \alpha y + f(x) = 0. \qquad (5)$$

Значение параметра α называется „критическим" и обозначается $\alpha_{кр}$, если: при $\alpha < \alpha_{кр}$ уравнение (5) имеет единственное периодическое, с периодом 2π, решение $y = \bar{y}(x)$, удовлетворяющее для всех x условиям

$$\bar{y}(x) > 0, \int_x^{x+2\pi} \bar{y}(x)\,dx = \frac{1}{\alpha_{кр}} \int_{x+2\pi}^{x} f(x)\,dx; \qquad (6)$$

при $\alpha = \alpha_{кр}$ уравнение (5) имеет единственное периодическое решение $y = Y(x)$ (с периодом 2π) такое, что

$Y(x) > 0$ для $x_2 < x < x_1$; $Y(x_1) = Y(x_2) = 0$;

$$\int_{x+2\pi}^{x} Y(x)\,dx - \frac{1}{\alpha_{кр}} \int_{x-2\pi}^{x} f(x)\,dx, \qquad (7)$$

при $\alpha > \alpha_{кр}$ уравнение (5) не имеет периодических решений.

Система (4) имеет особые точки: $(\pm 2n\pi; 0)$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$ типа фокуса или узла, $(x_1 \pm 2n\pi, 0)$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ типа седла. Сепаратриса, примыкающая к точке $(x_1, 0)$ при $t \to +\infty$ во втором ее квадранте, обозначается $y = s_1(x)$; сепаратриса, примыкающая при $t \to -\infty$ к точке $(x_2, 0)$ в ее первом квадранте, обозначается $y = s_2(x)$. Ссылаясь на работу Америо (Amerio L., Ann. Scuola norms. uper. Pisa, 1950, **3**,19 — —57), автор дает следующие предложения:

Для того чтобы уравнение (5) не имело периодического решения, необходимо и достаточно выполнение неравенства $s_2(0) < s_1(0)$.

Для того чтобы уравнение (5) имело периодическое решение $y = Y(x)$, обладающее свойствами (7), необходимо и достаточно выполнение соотношения $s_2(0) = s_1(0)$.

Для того чтобы уравнение (5) имело периодическое решение $y = \bar{y}(x)$, обладающее свойствами (6), необходимо и достаточно выполнение неравенства $s_2(0) > s_1(0)$.

После этого автор при помощи теоремы Чаплыгина и теорем сравнения Ельшина доказывает две леммы, касающиеся оценок сверху и снизу значений $s_1(0)$ и $s_2(0)$.

Далее доказываются семь теорем, первая из которых дает условия отсутствия периодического решения для системы (4) при соблюдении условий (2) и (3). Остальные теоремы дают оценки сверху и снизу $\alpha_{кр}$ для уравнения (5) или системы (4) при соблюдении условий (2) и (3) и еще дополнительных неравенств.

Например, теорема 7 читается так:

Если уравнение (5), удовлетворяющее условиям (2), (3), имеет периодическое решение $y = Y(x)$, обладающее свойствами (7), то

$$\alpha_{кр}^2 > \frac{\left[\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right]^2}{2\pi^2\left[2\pi^2 p + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right]},$$

где $p > 0$ — угловой коэффициент прямой $y = p(x_1 - x)$, удовлетворяющей условию $f(x) < p(x_1 - x)$.

Разбирается в качестве примера уравнение $\frac{d_2\Theta}{dx_2} + \alpha\frac{d\Theta}{dt} + \sin\Theta = \sin\Theta_0$. Автор отмечает, что разные частные случаи уравнения (1) рассматривались многими математиками. Библ 10 назв. А. Н. Черкасов

341. Топологическая структура интегральных кривых дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax^2 + bxy + cy^2 + \varphi(x, y)}{ex + fy + \psi(x, y)}$$

(дробь несократима при $\varphi = \psi = 0$) **в окрестности начала координат. Чжан Ли-нин** (Chang Li-ning), Шусюэ цзиньчжань, 1957, **3**, №4, 650—654 (кит.)

342. Симметрический способ составления условий центра. Сибирский К. С., Уч. зап. Кишиневск. гос. пед. ин-та, 1957, **9**, 3—10

Изучается уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + \sum_{i=1}^{\infty} Q_i(x, y)}{y + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(x, y)}, \qquad (1)$$

где P_i и Q_i — однородные многочлены степени $i+1$. Исходя из известной теоремы Ляпунова о том, что необходимым и достаточным условием наличия центра для уравнения (1) является существование действительного голоморфного интеграла

$$F(x, y) = G, \qquad (2)$$

автор дает несколько упрощенные (симметрические) способы построения условий существования интеграла (2).

М. И. Альмухамедов

343. Дальнейшее сокращение длины нелинейных колебаний. Манарези (Ulteriori limitazioni per l'ampiezza di oscillazioni non-lineari. Manaresi Gabriella), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 4, 537—540 (итал.)

Результаты предыдущей статьи автора относительно существования периодического решения $x_p(t)$ дифференциального уравнения $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + \omega^2 x = 0$ распространены на случай несимметричной $f(x)$. Пусть $f(x) < 0$ для $-\delta_1 < x < \delta_2$ ($\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$) и $f(x) = \beta$ для $x < -\delta_1$, $f(x) = \alpha$ для $x > \delta_2$, где α, β — постоянные, большие чем ω. Тогда функция $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ обращается в нуль для точек $x = -h_1$, $x = h_2$.

Пусть $M = \max(F(-\delta_1), |F(\delta_2)|)$. Автор строит некоторую область R в интервале изменения переменных x, $y = \dot{x} + F(x)$ такую, что $x_p(t)$ остается в R для всех „t". Это позволяет установить следующее неравенство:

$$-\frac{2\omega\alpha(h_1 + h_2)}{\beta(\alpha - \omega)} - \frac{M}{\beta} - h_1 \leqslant x_p(t) \leqslant \frac{2\omega\beta(h_1 + h_2)}{\alpha(\beta - \omega)} + \frac{M}{\alpha} + h_2.$$

Если $h_1 < h_2$ и $\alpha > \omega\sqrt{2}$, то оно заменится на

$$-\frac{\alpha}{\beta}\frac{2\sqrt{(2)}\,\omega h_2}{\alpha - \omega\sqrt{2}} - \frac{M}{\beta} - h_1 \leqslant x_p(t) \leqslant \frac{3\sqrt{2}\,\omega h_2}{\alpha - \omega\sqrt{2}} + \frac{M}{\alpha} + h_2.$$

W. R. Wasow

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 970

344. Некоторые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром. Кодуняну (Cîteva probleme referitoare la ecuatiile diferentiale de ordinul al doilea cu parametru mic. Corduneanu C.), Bul. stiint. Acad. R.P.R. Ses. mat. si fiz., 1956, 8, № 4, 703—707 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается уравнение $y'' = f(x, y) + \alpha h(x, y, \alpha)$ где $f(x, y)$ и $h(x, y, \alpha)$ — непрерывные в полуплоскости $x \geqslant 0$, $0 < m \leqslant f'_y \leqslant M$, $|f(x, 0)| \leqslant K_1$, $|h(x, y_1, \alpha) - h(x, y_2, \alpha)| \leqslant L|y_1 - y_2|$ равномерно относительно $x \geqslant 0$, $|\alpha| < \alpha_0$, $|h(x, 0, \alpha)| \leqslant K_1(\alpha)$. Тогда, если $|\alpha| < \min(\alpha_0, m/L)$, то для любого y_0 существует единственное ограниченное при $x \geqslant 0$ решение $y(x, \alpha)$, удовлетворяющее условию $y(0, \alpha) = y_0$. Остальные решения определены на всей полуоси и стремятся к $\pm\infty$ при $x \to \infty$. Если f и h — почти периодические, то ограниченные значения также почти периодические. Если $K_1(\alpha) < K_1$ при $|\alpha| < \alpha_0$, то $\lim_{\alpha \to 0} y(x, \alpha) = y(x)$, где $y(x)$ — ограниченное решение уравнения $y' = f(x, y)$.

A. Halanay

345. Дифференциальное выражение Шварца и приближенный метод Бриллуэна. Винтнер (The Schwarzian derivative and the approximation method of Brillouin. Wintner Aurel), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 1, 82—86 (англ.)

Используя наводящие рассуждения в духе Бриллуэна и свою теорему сравнения (РЖМат, 1958, 8803), автор доказывает, что если

$$\int^{\infty} |f'' f^{-2} - \tfrac{3}{2} f'^2 f^{-3}|\, dt < \infty,$$

то решения уравнения

$$x'' + f^2(t)\, x = 0$$

асимптотически эквивалентны действительной и мнимой частям функции

$$f^{-1/2}(t) \exp\left[i \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds\right].$$

Эта теорема была ранее доказана автором (Phys. Rev., 1947, 72, 516—517) с дополнительным ограничением $\int^{\infty} f(s)\, ds = \infty$ и перекрывалась теоремой референта (Матем. сб., 1951, 28, № 3, 710). При новой формулировке эти теоремы пересекаются. И. М. Соболь

346. О теореме сравнения Кнезера—Хилле. Винтнер (On the comparison theorem of Kneser-Hille. Wintner Aurel), Math. scand., 1957, 5, № 2, 255—260 (англ.)

На полуоси $t_0 < t < \infty$ даны два уравнения:

$$x'' + f(t)\, x = 0 \tag{1}$$

и

$$y'' + g(t)\, y = 0. \tag{2}$$

Допустим, что сходятся интегралы $\int_t^{\infty} f(s)\, ds = F(t)$ и $\int_t^{\infty} g(s)\, ds = G(t)$. Автор уточняет теорему сравнения Хилле: Если $0 \leqslant G(t) \leqslant F(t)$ и решения уравнения (1) не колеблются на (t_0, ∞), то решения уравнения (2) также не колеблются на (t_0, ∞).

У Хилле предполагалось также, что $g(t) \geqslant 0$, $f(t) \geqslant 0$. И. М. Соболь

347. О некоторых решениях функционального уравнения $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$. Лайтох (O jistých řešeních funkční rovnice $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$. Laitoch Miroslav), Časop. pěstov. mat., 1956, 81, № 4, 420—425 (чешск.; рез. русск., нем.)

Рассуждения авторов касаются дифференциального линейного уравнения 2-го порядка

$$y'' = q(x)\, y \tag{1}$$

при условии, что функция q непрерывна в открытом интервале j и что (нетривиальные) решения уравнения колеблются, т. е. имеют в одном и другом направлении к крайним точкам интервала j бесконечно много нулей. Основной центральной дисперсией 1-го рода дифференциального уравнения (1) называется функция φ, которая определена в интервале j и значение которой в каждой точке $x \in j$ равно наименьшему значению $\varphi(x)$, лежащему вправо от x, и $\varphi(x) > x$ (1-го рода). Пусть u, v — упорядоченная пара интегралов дифференциального уравнения (1), пусть $w = uv' - u'v$ и пусть, наконец, α — соответствующая первая фаза, так что $\operatorname{tg} \alpha(x) = u(x)/v(x)$. В таком случае, как показывает автор, функция $F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sgn} w \cdot \alpha(x)/\pi$ является решением фукционального уравнения $F[\varphi(x)] - F(x) = 1$ и в то же время это решение нелинейного дифференциального уравнения 3-го порядка —

$$\{F, x\} - \pi^2 F^2(x) = q(x). \tag{2}$$

Главным результатом работы является обращение следующего утверждения: функция $q(x)$, определенная по формуле (2) при помощи произвольного решения F данного выше функционального уравнения с произвольной функцией φ, обладает тем свойством, что интегралы соответствующего дифференциального уравнения (1) колеблются, и функция φ является основной центральной дисперсией 1-го рода этого дифференциального уравнения. O. Borůvka

348. О дисконъюктности линейных дифференциальных уравнений. Винтнер (On disconjugate linear differential equations. Wintner Aurel), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 290—293 (англ.)

Как обобщение известного критерия Ляпунова получен следующий результат: Если функция $f(t)$ непрерывна на $[0,1]$ и

$$0 \leqslant \int_c^1 f(u)\, du \leqslant 4 \qquad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1$$

то дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + f(t)x = 0 \tag{1}$$

дисконъюктно на $[0,1]$, т. е. каждое нетривиальное решение уравнения (1) имеет на отрезке $[0,1]$ не более одного нуля. Б. П. Демидович

349. Об уравнении затухающих колебаний с переменными коэффициентами. Лейтон (On the damped oscillations equation with variable coefficients. Laitone E. V.), Quart. Appl. Math., 1958, 16, № 1, 90—93 (англ.)

Оценивается модуль решения $u(t)$ уравнения

$$u'' + p(t)\, u' + q(t)\, u = 0$$

в предположении монотонности инварианта

$$\varphi(t) = (q - p^2/4 - p'/2) \geqslant m^2 > 0.$$

Оценка не новая и для случая возрастания $\varphi(t)$ легко уточняется. Указано, что к такой задаче сводится исследование устойчивости угла атаки при вертикальном входе ракеты в атмосферу Земли. И. М. Соболь

350. Об асимптотических формулах для решений уравнения $y'' + \lambda y = q(x)\, y$. Кучук (Asupra formulelor asimptotice pentru solutiile ecuatiei $y'' + \lambda y = q(x)y$. Cuciuc M.), Lucrarile inst. petrol. si gaze Bucuresti, 1957, 2, № 2, 201—212 (рум.; рез. русск., англ.)

Доказывается, что если $q(x) \in L^1(a, \infty)$, то уравнение $y'' + s^2 y = q(x)y$ имеет решения $y_1(x,s)$, $y_2(x,s)$, удовлетворяющие условиям: $y_1(x,s) = e^{isx}(1 + O(1))$, $y_2(x,s) = e^{-isx}(1 + O(1))$ при $x \to \infty$, $\operatorname{Im} s > 0$, и $y_1(x,s) = e^{isx}\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)$, $y_2(x,s) = e^{-isx}\left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)$ при $s \to \infty$ и $\operatorname{Im} s > 0$. Этот результат не является новым (РЖМат, 1953, 243; 1955, 3752). М. А. Наймарк

351. Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Клоков Ю. А., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 189—194

Для уравнения

$$\ddot{x} + a(t) f(x) = 0 \tag{1}$$

автор доказывает следующие предложения:

Теорема 1. Если $a(t)$ — непрерывная, положительная и монотонно возрастающая функция и $F(x) = \int_0^x f(z)\, dz \to +\infty$ при $|x| \to \infty$, то все решения уравнения (1) ограничены.

Теорема 2. Все правильные решения уравнения (1) при $a(t) = 1 + \varphi(t)$ ограничены, если

$$\int_0^\infty |\varphi'(t)|\,dt < \infty, \quad \varphi(t) \to 0 \qquad \text{при } t \to +\infty$$

и

$$F(x) = \int_0^x f(z)dz \to +\infty \qquad \text{при } |x| \to \infty.$$

Под правильным автор понимает решение, определенное и непрерывное вместе со своими производными первого и второго порядков при $0 \leqslant t_0 \leqslant t < +\infty$.

Эти предложения обобщены на случай системы уравнений вида $\frac{d^2x_i}{dt^2} + a_i(t)\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n)$. (2)

Теорема 3. Если непрерывная и дважды дифференцируемая функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяет условию

$$\min_{x_1^2 + ... + x_n^2 \leqslant r^2} F(x_1, x_2, ..., x_n) = m(r) \to +\infty \text{ при } r \to +\infty,$$

а $a_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$—непрерывные положительные и монотонно возрастающие функции, то все решения системы (2) ограничены.

Теорема 4. Если $a_i(t) = 1 + \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ и

$$\int_0^\infty |\varphi'_i(t)|\,dt < \infty, \varphi_i(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty (i = 1, 2, ..., n),$$

а дважды дифференцируемая функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ удовлетворяет условию

$$\min_{x_1^2 + ... + x_n^2 \leqslant r^2} F(x_1, x_2, ..., x_n) = m(r) \to +\infty \text{ при } r \to +\infty,$$

то все правильные решения системы (2) ограничены.

Н. Я. Лященко

352. Прюферово преобразование матричных дифференциальных уравнений. Баретт (A Prüfer transformation for matrix differential equations. Barrett John H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 510—518 (англ.)

В системе уравнений

$$Y' = Q(x)Z, \qquad Z' = -Q(x)Y \qquad (1)$$

$Q(x)$ — непрерывная симметрическая вещественная $n \times n$ матрица-функция, Y, Z— матрицы-решения Матричным синусом и косинусом $S = S[a, x, Q]$, $C = C[a, x, Q]$ называются решения $Y = S$, $Z = C$ системы (1), определенные начальными условиями $Y(a) = 0$, $Z(a) = E$ (E— единичная матрица). В скалярном случае $n = 1$, $S = \sin\int_a^x Q dx$, $C = \cos\int_a^x Q dx$. Матричные синус и косинус удовлетворяют условиям:

$CC^* + SS^* = C^*C + S^*S = E$, $C^*S = S^*C$, $CS^* = SC^*$, $\|S\|^2 + \|C\|^2 \equiv n$. Под нормой матрицы понимается корень из суммы квадратов элементов.

Если $\int_a^\infty \mathrm{Sp}Q dx < \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$, то при $x \geqslant a$ $\det S[a, x, Q] \neq 0$, $\det C[a, x, Q] \neq 0$. Пусть $Y(x)$ — матрица-решение уравнения

$$[P(x)Y']' + F(x)Y = 0, \qquad (2)$$

где $P(x) = P(x)^* > 0$, $F(x) = F(x)^*$ —непрерывные вещественные матрицы-функции, $Y(a) = 0$. Существуют вещественные непрерывно-дифференцируемая неособая матрица $R(x)$ и непрерывная симметрическая матрица $Q(x)$ такие, что справедливо представление $Y(x) = S[a, x, Q]^* \times R(x)$. $P(x)Y'(x) = C[a, x, Q]^* R(x)$, которое в скалярном случае $n = 1$ совпадает с часто употребляемым прюферовым преобразованием к полярным координатам.

Если уравнение (2) неколебательно, т. е. если существует $x_0 > 0$ и матрица-решение $Y(x)$ такие, что $W[Y, Y] \equiv Y^*PY' - Y'^*PY \equiv 0$, $\det Y(x) \neq 0$ при $x \geqslant x_0$, то существует решение $Z(x)$, обладающее теми же свойствами, что и $Y(x)$, и, кроме того, $\int_0^\infty \|(Z^*PZ)^{-1}\|dx < \infty$.

Если уравнение (2) неколебательно и все его решения ограничены при $x \to \infty$, то $\int_a^\infty (\mathrm{Sp}P)^{-1}\,dx < \infty$.

Если в уравнении (2) $F(x) > 0$ и $\int_a^\infty \max\{\mathrm{Sp}P^{-1}, \mathrm{Sp}F\}dx < \pi/2\sqrt{n}$ и Y — решение уравнения (2), $Y(a) = 0$, то $\det Y \neq 0$, $\det Y' \neq 0$ при $x \geqslant a$.

В. А. Якубович

353. О квазиравномерно непрерывных множествах — множествах решений дифференциального уравнения. Хаяси (On quasi-equicontinuous sets — sets of solutions of a differential equation. Hayashi Kyuzo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, **A 31**, № 1, 9—23 (англ.)

Вводится понятие равномерно непрерывного и квазиравномерно непрерывного множества функций, определенных на некотором топологическом пространстве E со значениями, принадлежащими другому пространству F. Высказываются необходимые и достаточные условия квазиравномерной непрерывности. Понятие квазиравномерной непрерывности привлекается к изучению структуры множества решений системы дифференциальных уравнений $dy/dx = f(x, y)$, где y — n-мерный вектор, а функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Каратеодори.

Е. А. Барбашин

354. Матричные системы дифференциальных уравнений второго порядка. Баретт (Matrix systems of second order differential equations. Barrett John H.), Portugaliae math., 1955, **14**, № 3-4, 79—89 (англ.)

В матричном уравнении $[P(x)Y']' + Q(x)Y = 0$ (1) $P(x)$ и $Q(x)$ — непрерывные симметрические вещественные матрицы-функции, $P(x) > 0$, $x \geqslant a$.

Вронскианом двух решений Y_1, Y_2 называется постоянная матрица $W[Y_1, Y_2] = Y_1^* PY'_2 - Y_1'^* PY_2$. Выводятся некоторые простые свойства вронскиана. На уравнение (1) переносятся некоторые результаты, известные для скалярного уравнения:

1) если $P \equiv E$ — единичная матрица и $\int_a^\infty t\|Q(t)\|dt < \infty$, то существует решение такое, что

$$\|U - E\| \leqslant \exp\int_x^\infty t\|Q(t)\|\,dt - 1;$$

2) если $\lim_{x \to \infty} P(x) = C > 0$ и уравнение (1) имеет решение $U \to E$, $W(U, U) = 0$, то любое решение уравнения (1) имеет вид $Y = [E + Z_1(x)]A + x[E + Z_2(x)]B$, где A, B — постоянные матрицы и $Z_j(x) \to 0$ при $x \to \infty$, $j = 1, 2$;

3) пусть $P(x) = \|p_{jh}\|$, $Q(x) = \|q_{jh}\|$, $P(x)^{-1} = \|\bar{p}_{jh}\|$, P_k—матрица, полученная из матрицы $P(x)^{-1}$ заменой элементов $\bar{p}_{kk}$ на нуль. Если скалярное уравнение $(y'/\bar{p}_{kk})' +$

$+q_{kk}y=0$ колебательно при $x\to\infty$ и $\overline{P}_k\geqslant 0$, то и уравнение (1) колебательно. В частности, если P—диагональная матрица, то уравнение (1) колебательно, если колебательно для некоторого k уравнение $(p_{kk}y')'+q_{kk}y=0$. Колебательность уравнения (1) понимается здесь в смысле определения, введенного Штернбергом (Sternberg R. L. Duke Math. J., 1952, 19, 311—322) в связи с работами Блисса и Рейда по вариационному исчислению;

4) если $PQ=QP>0$, существует производная $(PQ)'\geqslant 0$, то все решения уравнения (1) ограничены при $x\to\infty$.

Получены и другие аналогичные результаты.

В. А. Якубович

355. О нормальной форме дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. Нагумо, Исэ (On the normal forms of differential equations in the neighborhood of an equilibrium point. Nagumo Mitio, Ise Kusuo), Osaka Math. J., 1957, 9, № 2, 221—234 (англ.)

Пусть x, y, f — векторы, $x=\{x_1, x_2,..., x_n\}$ и т. д. A— матрица. Рассматривается восходящая к Пуанкаре задача о существовании преобразования координат, переводящего систему

$$dx/dt=Ax+f(x)$$

в систему

$$dy/dt=Ay,$$

при вещественных A и f.

Результат: если $A=\text{const}$, λ_i — ее собственные числа, причем $\operatorname{Re}\lambda_i\neq 0$, $\lambda_i\neq\sum_{j=1}^{n}m_j\lambda_j$, при целых $m_j\geqslant 0$, таких, что $1<\sum m_j<h$, и если $f_i(x)=p_i(x)+q_i(x)$, где p_i — полиномы, $p_i(0)=\dfrac{\partial p_i(0)}{\partial x_j}=0$, а $q_i(x)\in C^1$, $q_i(0)=0$ и $\left|\dfrac{\partial q_i(x)}{\partial x_j}\right|\leqslant Q|x|^h$, то при достаточно большом $h>h_0$ $(\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n)$ искомое преобразование существует в виде

$$y=x+u(x),$$

$u\in C^1$, $u(0)=0$ и $\left|\dfrac{\partial u_i(x)}{\partial x_j}\right|\leqslant L|x|$.

По этому поводу см. также РЖМат, 1958, 8799.

Р. Э. Виноград

356. Исследование ограниченности и устойчивости решений нелинейных дифференциальных уравнений. Бихари (Researches of the boundedness and stability of the solutions of non-linear differential equations. Bihari I.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 3-4, 261—278 (англ.)

Для векторно-матричного уравнения

$$dz/dt=Az+B(t)\varphi(z)$$

доказывается ряд теорем об ограниченности и устойчивости решений, например:

Если: 1) корни A имеют вещественные части $\leqslant 0$, причем элементарные делители нулевых корней — простые;

2) $\int_0^\infty|B(t)|\,dt\leqslant C^{-1}\int_0^\infty dt/\omega(t)$, где $C=\sup_{t\geqslant 0}|e^{At}|$, $\omega(t)\geqslant\max_{|z|<t}|\varphi(z)|$; 3) $\varphi(z)$ непрерывно,—то все решения с достаточно малыми начальными векторами ограничены.

Методы доказательств обычные. Даются приложения к некоторым скалярным уравнениям 2-го порядка, в частности $y''+\varphi(t)f(y)h(y')=0$.

Р. Э. Виноград

357. О методе регуляризации обыкновенных дифференциальных уравнений, интегралы которых не удовлетворяют условиям однозначности. Белецкий (Sur une méthode de régularisation des équations différentielles ordinaires dont les intégrales ne remplissent pas la condition d'unicité. Bielecki A.), Bull. Acad. polon. sci., 1956, C1.3, 4, № 8, 497—501 (франц.); Бюл. Польской АН, 1956, отд. 3, 4, № 8, 485—489

Предположим, что функции $f_\nu(t, x_1,..., x_n)$ $(\nu=1,..., n)$ непрерывны в открытом множестве $\Omega\in E_{n+1}$, содержащем открытое множество ω. Обозначим через Φ границу ω относительно Ω и через S множество точек выхода относительно множеств ω и Ω и системы дифференциальных уравнений

$$dx_\nu/dt=f_\nu(t, x_1,..., xn)\quad(\nu=1,..., n).\qquad(1)$$

Топологический метод изучения асимптотического поведения решения системы (1), предложенный Важевским, непосредственно применяется лишь к системам, удовлетворяющим условиям единственности. Если это условие не соблюдается, то метод Важевского тоже может быть применен, если предположить, что существует система уравнений с аналитическими в ω правыми частями, которая совпадает с системой (1) вне ω и обладает на Φ некоторыми свойствами, существенными для применения метода Важевского. Автор в некоторых предположениях относительно системы (1) доказывает существование системы уравнений упомянутой выше. Опираясь на эту теорему, автор устанавливает, не предполагая однозначности решений, предложения, аналогичные доказанным Важевским (Ann. Soc. polon. math., 1947, 20, 279—313) и Плисем (см. РЖМат, 1956, 2972).

Вот одно из них: Предположим, что множество $\Phi-S$ есть F_σ, множество $S''\subset S$ состоит из точек сильного выхода (РЖМат, 1958, 2921) и множество $S''=S-S'$ является замкнутым относительно S. Пусть, далее, $V\in\omega+S'$ и пусть $V\cdot S'$ является ретрактом множества S', но не является ретрактом множества V. При этих предположениях существует положительный полуинтеграл, исходящий из некоторой точки множества $\cdot$, пересекающий S'' или содержащийся в ω для $t\geqslant t_0$.

J. Szarski

358. Сопряженные нормы Ляпунова. Виноград Р. Э., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 3, 415—417

Вещественные нормы Ляпунова (РЖМат, 1958, 1184) ω и γ, определенные соответственно на сопряженных конечномерных векторных пространствах E и $\bar{E}$, названы сопряженными, если для всех пар сопряженных базисов суммы ω-нормы любого вектора из базиса E и γ-нормы одноименного вектора из базиса $\bar{E}$ неотрицательны. В терминах сопряженных норм определены дефект сопряженной пары базисов, коэффициент неправильности и число Перрона данной пары норм, выделены правильные пары норм. Анонсированы результаты, относящиеся к связи между дефектом пары базисов и коэффициентом неправильности исходных норм, к существованию и структуре бинормальной пары базисов (сопряженной пары базисов, соответственно ω- и γ -нормальных), к совпадению дефекта бинормальной пары базисов с коэффициентом неправильности норм, к двусторонней оценке коэффициента неправильности через число Перрона. В качестве следствия сформулировано необходимое и достаточное условие правильности пары норм. Отмечено, что указанные результаты в случае, когда E и $\bar{E}$ являются системами решений соответственно данной и сопряженной линейных дифференциальных систем, приводят либо к уточнению или выяснению смысла известных предложений (например, теоремы Перрона о правильных системах, с одной стороны, теорем Гробмана о коэффициенте неправильности, — с другой), либо к результатам новым даже и в рассматриваемом классическом случае (таковы теоремы о существовании и структуре сопряженных систем решений, одновременно нормальных в смысле Ляпунова).

Ю. С. Богданов

359. Об асимптотической устойчивости в целом тривиального решения динамической системы двух диффе-

ренциальных уравнений. Виноградов Н. Н., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 7, 145—158

Методы качественной теории дифференциальных уравнений и прямой метод Ляпунова используются для определения достаточных условий, которым должны удовлетворять функции $F(x, y)$ и $f(x, y)$ для того, чтобы тривиальное решение $x=y=0$ системы дифференциальных уравнений $dx/dt=F(x, y)$, $dy/dt=f(x, y)$ было асимптотически устойчиво «в целом» (т. е. по отношению к любым начальным отклонениям). Плоскость x, y разбивается на области в зависимости от сочетаний знаков F и f, и границы областей подразделяются на опасные и безопасные в зависимости от временного расположения областей и координатных осей x и y. Доказываются теоремы, устанавливающие условия асимптотической устойчивости в целом, связанные с особенностями расположения указанных областей и характером их границ.

Доказываются две теоремы, позволяющие судить об устойчивости в целом по свойствам функций F и f лишь в части плоскости x, y. М. А. Айзерман

360. Дополнения к проблеме устойчивости для обыкновенных линейных дифференциальных систем. Барбути (Contributi al problema della stabilità per i sistemi differenziali lineari ordinari. Barbuti Ugo), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1956, **10**, № 3-4, 185—215. (итал.)

Для линейной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=A(t)x \qquad (1)$$

даются весьма сложно сформулированные достаточные условия ограниченности решений, включающие условия устойчивости Чезари (Cesari L., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1940, ser. 2, **9**, 163—186). Изучаются возмущения матрицы $A(t)$, сохраняющие устойчивость системы (1). В частности, обобщается теорема Гусарова (Докл. АН СССР, 1949, **69**, 217—220). Б. П. Демидович

361. Исследование одной нелинейной системы трех дифференциальных уравнений. Плисс В. А., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 2, 184—187

Приводятся тексты 12 теорем (без доказательств), касающиеся условий устойчивости в целом тривиального решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=y-f(x);\quad \frac{dy}{dt}=z-x;\quad \frac{dz}{dt}=-ax-bf(x), \qquad (1)$$

где $f(x)$ удовлетворяет обобщенным условиям Гурвица:

$$\frac{f(x)}{x}>a+b\frac{f(x)}{x}>0 \text{ при } x\neq 0 \text{ и } f(0)=0.$$

Уравнения (1) легко получаются из уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=f_1(x)+a_{12}y+a_{13}z,\\ \frac{dy}{dt}&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z,\\ \frac{dz}{dt}&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z,\end{aligned} \qquad (2)$$

если $a_{22}+a_{33}=0$. Попутно рассматривается вопрос о построении для систем типа (1) функции Ляпунова вида „квадратичная форма плюс интеграл от $f(x)$“.

В частности, устанавливается следующая теорема: Для того чтобы нулевое решение системы (2) было асимптотически устойчиво в целом при любой функции $f(x)$, удовлетворяющей обобщенным условиям Гурвица, необходимо и достаточно выполнение одного из трех следующих условий: 1) $a<0$, $b>0$; 2) $a=0$, $0<b<1$; 3) $a>0$, $b<0$, $a^2+b(1-b)^2\leqslant 0$. М. А. Айзерман

362. Устойчивость по линейному приближению периодических решений системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Докл. АН СССР, 1957, **116**, № 4, 527—530

Исследуется устойчивость по Ляпунову непрерывного периодического решения $z_i=\tilde{z}_i(t)$ (K), периода τ, нелинейной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt}=f_i(z_1,\ldots,z_n,t)\ (i=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

правые части которых f_i определены в бесконечном цилиндре C, окружающем данную кривую K, и периодичны по t с периодом τ. Предполагается, что функции f_i допускают бесконечное множество непрерывных, не пересекающихся между собой двусторонних поверхностей разрыва

$$F_\alpha(z_1,\ldots,z_n,t)=0, \qquad (2)$$

разбивающих цилиндр C на области H_α, внутри которых функции f_i достаточно регулярны и могут испытывать разрывы лишь первого рода на границе $F_\alpha=0$. Кроме того, на функции F_i накладываются еще некоторые ограничения.

Пусть интегральная кривая K пересекает поверхности $F_\alpha=0$ в точках M_α при $t=t_\alpha$, переходя с возрастанием t с „отрицательной“ на „положительную“ сторону этой поверхности. Для системы (1), по отношению к решению $z=\tilde{z}_i(t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$, определяется „система линейного приближения“ с разрывными интегральными кривыми $x_i=x_i(t)$ следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{z=\tilde{z}(t)}x_j (i=1,2,\ldots,n) \text{ при } t_{\alpha-1}+0\leqslant t\leqslant t_\alpha-0 \text{ и}$$

$$x_i(t_\alpha+0)-x_i(t_\alpha-0)=\xi_i^\alpha\sum_{j=1}^{n}h_j^{\alpha-}x_j(t_\alpha-0),$$ где ξ_i^α — величина разрыва функции f_i в точке M_α при переходе с отрицательной на положительную сторону поверхности $F_\alpha=0$ и

$$h_j^{\alpha-}=\left[\frac{\partial F_\alpha}{\partial z_j}\Big/\left(\frac{dF_\alpha}{dt}\right)^-\right]_{M_\alpha}.$$

Имеет место теорема, обобщающая классический результат Ляпунова: Если нулевое решение $x_i=0$ „системы линейного приближения“ (2) асимптотически устойчиво, то периодическое решение нелинейной системы (1) также асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы лишь намечено. Сформулирована также соответствующая теорема для случая неустойчивости периодического решения.

Б. П. Демидович

363. Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, № 5, 658—669

Приводятся подробные доказательства теорем, ранее опубликованных в Докл. АН СССР (реф. 362).

Б. П. Демидович

364. О нелинейных системах дифференциальных уравнений первого порядка, с периодическими коэффициентами. Фор (Sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre, non linéaires, à coefficients périodiques. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 25, 3022—3025 (франц.)

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_k p_{ik}x_k = f_i(x_k, t),\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (1)$$

где p_{ik} — действительные постоянные такие, что $\det(p_{ik}) \neq 0$; $f_i(x_k, t)$ — периодические относительно t функции, с общим периодом T, допускающие разложения вида

$$f_i(x_k, t) = a_i(t) + \sum_k b_{ik}(t)x_k + \sum_{pq\ldots r} c_{i,pq\ldots r}(t)\, x_1^p x_2^p \ldots x_n^r,$$

причем коэффициенты $a_i(t)$, $b_{ik}(t)$ и $c_{i,pq\ldots r}(t)$ удовлетворяют известным условиям (в тексте, по-видимому, ошибочно, пропущены промежуточные члены).

Методом последовательных приближений разыскивается периодическое решение

$$x_i = \lim_{m\to\infty} x_{i,m}$$

системы (1), где $x_{i,m}$ — периодические функции конечной ограниченной нормы, рекуррентно определяемые из последовательности линейных систем

$$\frac{dx_{i,m+1}}{dt} + \sum_k p_{ik}x_{k,\,m+1} = f(x_{k,m}, t), \qquad (2)$$

$x_{i,0} \equiv 0$ $(m = 0,1,2,\ldots)$.

Указывается процесс получения достаточных условий для существования периодических решений системы (1), основанный на оценке нормы приближений $x_{i,m}$. Эти условия заведомо могут быть реализованы, если в правую часть системы (1) ввести малый параметр.

Автор считает, что данный метод может быть распространен на систему дифференциальных уравнений любого порядка. Б. П. Демидович

365. О системах нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Рассмотрение частного случая. Фор (Sur les systèmes d'équations différentielles non-linéaires à coefficients périodiques. Étude d'un cas particulier. Faure Robert), C. r. Acad. sci., 1957, 245, № 19, 1588—1590 (франц.)

Статья представляет собой продолжение серии работ автора (РЖМат, 1958, 7693; 364). Результат, полученный в последней из них, применяется к изучению системы вида

$$\frac{dx_i}{dt} + \lambda \sum_{k=1}^n p_{ik}x_k = \lambda f_i(x_k, t)\ (i = 1,\ldots,n), \qquad (1)$$

где λ — малый параметр, p_{ik} — постоянные такие, что $\det(p_{ik}) \neq 0$, а $f_i(x_k, t)$ — функции, обладающие свойством $f_i(x_k,\ t + T) = f_i(x_k,\ t)$ и разлагающиеся в ряд

$$f_i(x_k,\ t) = a_i(t) + \sum_{k=1}^n b_{ik}(t)x_k + \sum_{pq,\ldots r} c_{ipq\ldots r}(t)x_1^p x_2^q \ldots x_r^n,$$

сходящийся в некоторой области (D) изменения $x_1,\ldots,x_n$. Коэффициенты этого ряда суть функции вида

$$X(t) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} X_p e^{pi\omega t},$$

где $\sum_{p=-\infty}^{p=\infty} |X_p| < \infty$, $X_p = \text{const}$, $\omega = 1/T$.

Показано, что если $\int_0^T a_i(t)dt = \int_0^T b_i(t)dt = 0$ и величины $|\lambda|$ или $1/\omega$ достаточно малы, то (1) допускает периодическое решение $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ периода T. Как и в остальных работах серии функции $x_i(t)$ представляются в виде рядов (2), коэффициенты которых определяются методом последовательных приближений. Указано, что результат остается в силе для соответствующей системы разностных уравнений. Г. Л. Мизернюк

366. О применении методов нелинейного функционального анализа в некоторых задачах о периодических решениях уравнений нелинейной механики. Красносельский М. А., Докл. АН СССР, 1956, 111, № 2, 283—286

Сформулированы теоремы, выражающие достаточные условия существования периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые, как указывает автор, доказываются методами функционального анализа. В заметке нет даже намеков на методы доказательств. В. В. Немыцкий

367. Определение периодических режимов в системах с кусочно-линейной характеристикой, составленной из звеньев, параллельных двум заданным прямым. I. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 2, 97—110 (рез. англ.)

Дается метод определения периодических режимов в системах

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k + \lambda_j f(x_1) + F_j(t)\ (j = 1,\ldots,n), \qquad (1)$$

где a_{jk}, λ_j — постоянные; $F_j(t)$ — известные, достаточно гладкие периодические функции с общим периодом T и $f(x_1)$ — разрывная кусочно-линейная двузвенная функция („нелинейная характеристика"). Периодические решения $x_j = x_j(t)$ ищутся в форме полных рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются явным образом через точки разрыва t_0, t_1, . . . , t_N искомого решения („времена переключения") на отрезке $[t_0,\ t_0 + T]$ ($t_N - t_0 = T$). Предварительные результаты в этом направлении были получены ранее авторами (РЖМат, 1956, 1391; 1957, 3978).

Для случая $N = 2$, при наиболее простых условиях перехода с одного звена на другое, выводятся точные уравнения, служащие для определения времен переключения t_1 и t_2 („уравнение периодов"), при которых возможны периодические режимы. Корни t_1 и t_2 уравнения периодов, удовлетворяющие известным правилам отбора, позволяют по готовым формулам построить искомые периодические режимы. Б. П. Демидович

368. Определение периодических режимов в системах, содержащих кусочно-линейные характеристики, составленные из звеньев, параллельных двум заданным прямым. II. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р., Автоматика и телемеханика, 1957, 18, № 3, 193—200 (рез. англ.)

Дается обобщение метода отыскания периодических режимов, изложенного в части I (реф. 367), на случай кусочно-линейных характеристик с произвольным числом звеньев, параллельных двум заданным прямым, при общем законе перехода с одного звена на другое.

Б. П. Демидович

369. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. Шиманов С. Н., Прикл. матем. и механ., 1957, 21, № 2, 244—252

Проблеме Пуанкаре отыскания периодических решений нелинейной системы

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t,\ x,\ \mu)\ (s = 1,\ \ldots,n),$$

где $x=(x_1, \ldots, x_n)$ и μ — малый параметр, посвящены работы И. Г. Малкина (Прикл. матем. и механ., 1950, **14**, № 1 и 4), автора (РЖМат, 1955, 219), Лефшеца (РЖМат, 1956, 2982), Лейманиса (РЖМат, 1956, 8803) и др., причем обычно предполагалось, что функции f_s — аналитические по x и μ, или особый определитель отличен от нуля.

В реферируемой работе рассматривается квазилинейная система

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{sj}x_j+\mu F_s(t, x, \mu) \quad (s=1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где a_{sj} — постоянные; μ — малый параметр и F_s — непрерывные функции в области $\{-\infty<t<+\infty,\ x\in G, |\mu|\leqslant\mu^*\}$, периодические по t с периодом 2π и удовлетворяющие условию Липшица относительно x. Для общего резонансного случая, не предполагая отличным от нуля особый определитель, автор излагает метод построения периодического решения системы (1)

$$x_s=x_s(t, \mu) \qquad (s=1, \ldots, n), \qquad (2)$$

периода 2π относительно t, обращающегося при $\mu=0$ в некоторое периодическое решение порождающей линейной системы

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{sj}x_j^{(0)} \qquad (s=1, \ldots, n).$$

Метод основан на разыскании периодического решения зависящего от надлежащего числа произвольных параметров, некоторой вспомогательной системы интегро-дифференциальных уравнений. Выясняются необходимые и достаточные условия существования периодического решения (2). При некоторых дополнительных ограничениях дается также способ приближенного вычисления периодических решений системы (1). Б. П. Демидович

370. Банаховы пространства и возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений. Хаффорд (Banach spaces and the perturbation of ordinary differential equations. Hufford George), Ann. Math. Studies, 1956, № 36, 173—195 (англ.)

Вариант теоремы о сохранении периодического решения при малом изменении параметра доказан методом неподвижной точки в некотором банаховом пространстве. Приведен пример, опровергающий предложение Левинсона об аналитичности некоторой функции, связанной с задачей, в случае аналитических правых частей уравнений. Р. Э. Виноград

371 К. Разностные методы для задач с начальными условиями. Рихтмайер (Difference methods for initialvalue problems. Richtmyer Robert D. New York; London, Interscience, 1957, [1958], xii, 238 pp., ill., 46 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 427, 11 (англ.)

372 К. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. Летов А. М. М., Гостехиздат, 1955, 312 стр., илл., 9 р. 20 к.

Рассматриваются вопросы устойчивости нелинейных систем регулирования с одним и двумя регулирующими органами. Исходным материалом являются работы А. И. Лурье (Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1951; статьи в журнале «Прикл. матем. и механика» и др.) и статьи автора в журналах «Прикл. матем. и механика», «Автоматика и телемеханика».

Книга разбита на одиннадцать глав и введение, в котором кратко излагаются некоторые вопросы теории устойчивости. В частности, здесь дается геометрическая иллюстрация первой и второй теорем второго метода Ляпунова, который является основным методом исследования в книге (это наглядное изложение в смысле строгости и полноты, естественно, уступает классическому изложению Ляпунова).

В первой главе описываются изучаемые уравнения. Принимается, что возмущенное движение системы с одним регулирующим органом описывается уравнениями

$$\dot{n}_k=\sum_{\alpha=1}^{m} b_{k\alpha}\eta_\alpha+n_k\mu \qquad (k=1, \ldots, m);$$

$$V^2\ddot{\mu}+W\dot{\mu}+s\mu=f^*(\sigma)\ ; \qquad (1)$$

$$\sigma=\sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha\eta_\alpha-r\mu\ ,$$

где η_k — координаты объекта регулирования, μ — координата регулирующего органа. Объекты регулирования классифицируются по собственным числам матрицы $\|b_{k\alpha}\|$ на собственно-устойчивые нейтральные и собственно-неустойчивые, и эта классификация последовательно проводится во всех исследованиях.

Нелинейные функции $f(\sigma)$ удовлетворяют условиям $f(\sigma)=0$ при $|\sigma|\leqslant\sigma^*$, $\sigma f(\sigma)>0$ при $|\sigma|>\sigma^*$, причем в точках $\sigma=\pm\sigma^*$ допускается разрыв непрерывности (класс A). (Из замечания на стр. 35 неясно, является ли $f(\sigma)$ стационарной функцией или фактически в процессе регулирования эта функция может варьироваться, и в уравнения процесса входит функция $f(\sigma, t)$. В последнем случае, очевидно, методы исследования, не учитывающие зависимость l от t неприменимы).

Формулируется задача об абсолютной устойчивости системы (А. И. Лурье), т. е. об устойчивости при любых возмущениях, при которых справедливы уравнения процесса, и любых функциях $f(\sigma)$ из класса A (или из некоторого подкласса A).

В следующих главах рассматриваются преобразования уравнений (1) (и аналогичных им) к некоторым каноническим формам, которые исследуются затем при помощи функций Ляпунова специального вида. Эти исследования в значительной мере опираются на идеи и результаты А. И. Лурье, изложенные в цитированных выше работах.

Приводятся также критерии устойчивости, которые автор называет упрощенными, в частности, рассматривается метод построения функций Ляпунова (и видоизменения этого метода), предложенный И. Г. Малкиным (Прикл. матем. и механика, 1951, **15**, № 1) для систем рассматриваемого вида.

В гл. VII рассматриваются задачи программного регулирования. Здесь доказывается, в частности, что при определенных условиях регулятор, поддерживающий режим, будет способен при той же настройке поддерживать новый режим, если этот новый режим достаточно близок к первоначальному.

В следующих главах для уравнений типа (1) на основе второго метода Ляпунова исследуются вопросы качества регулирования (с точки зрения скорости затухания возмущенного движения), рассматриваются задачи об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, об устойчивости по первому приближению. Кратко рассматривается задача устойчивости для некоторых неустановившихся движений.

Следует заметить, что здесь (гл. VII, VIII, X, XI) не указывается достаточно подробно, в какой связи находятся результаты, полученные в книге для уравнений типа (1), с результатами общей теории устойчивости; так, например, не выясняется связь задачи о сохранении устойчивости при малом программирующем воздействии с общей теорией малого параметра.

В гл. IX некоторые результаты обобщаются на случай систем с двумя регулирующими органами.

Предлагаемые методы иллюстрируются на конкретных примерах дифференциальных уравнений регулируемых систем. Н. Н. Красовский

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

373. Уравнения с частными производными первого порядка, интегрируемые с помощью разделения переменных и обобщения на уравнение Шредингера. Салтыков (Équations aux dérivées partielles du premier ordre intégrables par séparation des variables et généralisations sur l'équation de Schrödinger. Saltykow Nicola N.), Весн. Друштва матем. и физ. Нар. Реп. Србије, 1955, **7**, № 3 4, 137—152 (франц., рез. серб.)

Вначале приводится подробный исторический обзор по вопросу интегрирования уравнения в частных производных первого порядка путем разделения переменных. Даются условия Леви-Чивита интегрируемости путем разделения переменных уравнения

$$F(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad \left(p_i = \partial u/\partial x_i\right),$$

заключающиеся в том, что

$$\frac{D(F, F_k/F_{n+k})}{D(x_i, p_i)} = 0, \qquad (1)$$

где

$$F_k = \partial F/\partial x_k, \qquad F_{n+k} = \partial F/\partial p_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Тем самым получается $N = n(n-1)/2$ условий, представляющих собой дифференциальные уравнения второго порядка относительно F.

Вводя n вспомогательных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, определяемых соотношениями $\varphi_k = F_k/F_{n+k}$, автор получает систему $n(n+1)/2$ уравнений относительно $n+1$ неизвестных функций.

Среди решений этой системы есть такие (автор называет их сингулярными), которые обращают в нуль коэффициенты при производных F_i и F_{n+i}.

Если сингулярное решение обращает в нуль коэффициенты уравнений из (1), то оно называется сингулярным решением класса $N-K$. Их число равняется $\binom{N}{K}$, поэтому существует столько же уравнений класса $N-K$, интегрируемых с помощью разделения переменных. Всего поэтому имеется

$$\sum_n = 1 + N + \binom{N}{2} + \ldots + \binom{N}{n-2} + N + 1 = 2^N$$

различных типов уравнений, интегрируемых путем разделения переменных.

С целью применить указанные результаты автор подробно рассматривает случай $n=4$. Само применение результатов к уравнению Шредингера автор обещает рассмотреть в следующей главе (Реферируемая статья представляет собой первую главу работы).

Примечание референта. На стр. 144 и в таблице (13), по-видимому, ошибка: $\sum_2 = 2$, а не 3. З. И. Халилов

374. Решение в явном виде задачи Коши для одной системы уравнений с частными производными. Масленникова В. Н., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 1, 135—160

Приведены подробные доказательства результатов, опубликованных в Докл. АН СССР (РЖМат, 1956, 2222). С. А. Гальперн

375. О решении в целом задачи Коши для плоского нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости и о теореме единственности для простейшей системы газовой динамики. Ладыженская О. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 2, 241—242

376. Дифференциальные уравнения с чисто смешанными производными и главным членом. Фаге М. К., Докл. АН СССР, 1956, 108, № 5, 780—783

Рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$L(u) = \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} + \sum p_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} = f(x_1 \ldots x_n),$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — подмножества из $(1, 2, \ldots, n)$, $k < n$. Это уравнение рассматривается при:

а) характеристических (непротиворечивых) граничных условиях:

$$u(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_2, \ldots, x_n); \quad u(x_1, x_2^0, \ldots, x_n) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n); \ldots; \quad u(x_1, x_2, \ldots, x_n^0) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

б) граничных условиях Коши:

$$u\Big|_{\text{на } \Omega} = \varphi_0(x_1, \ldots, x_n); \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{\text{на } \Omega} = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n); \ldots;$$

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}\Big|_{\text{на } \Omega} = \varphi_{n-1}(x_1 \ldots x_n),$$

где Ω — $n-1$-мерная поверхность в $E^{(n)}$.

При некоторых естественных условиях (непрерывности, гладкости и т. д.) для $p_{i_1 \ldots i_k}$, f, f_j, φ_j и Ω в обеих краевых задачах имеют место теоремы существования и единственности, которые могут быть установлены методом последовательных приближений.

Для $L(u)$ вводится система $\left\{L^*_{\bar{I}}\right\}$ сопряженных операторов, связанная с $L(u)$ тождеством

$$vL(u) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \sum_{|I|=m} D_I \left\{u L^*_{\bar{I}}(v)\right\},$$

где

$$L^*_{\bar{I}}(v) = \sum_{J \supset \bar{I}} (-1)^{|J|} D_{J \setminus \bar{I}}(p_J v).$$

Здесь введены следующие сокращенные обозначения: $I = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ — подмножества из $(1,2, \ldots, n)$; $|I| = m$; $\bar{I} = (1, 2, \ldots, n) \setminus I$ — (дополнительное подмножество); $D_I = \dfrac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_m}}$.

Пусть $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — пара n-мерных точек, координаты которых попарно совпадают на множестве индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_s) = S$. Функция Римана $V(P_0, P)$ оператора $L(u)$ задается ус-

ловиями: 1) $V(P_0, P_0) = 1$; 2) на каждой грани $x_{j_1} = x^0_{j_1}$, $x_{j_2} = x^0_{j_2}, \ldots, x_{j_m} = x^0_{j_m}$ $(j_1, j_2, \ldots, j_m \in \bar{S}$; $s + m < n)$ $n-s$-мерного параллелепипеда $[P_0, P]$, $V(P_0, P)$, как функция от P, удовлетворяет уравнению: $L^*_{\bar{I}} v = 0$, где $I = S \cup (j_1, j_2, \ldots, j_m)$ (В это условие включается требование „допустимости" функции $p_J V$ относительно оператора $L^*_{\bar{I}}$).

Отмечается существование и единственность функции Римана. Решение уравнения $L(u) = 0$ при граничных условиях Коши может быть выражено формулой Римана

$$u(P_0) = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \sum_{|I|=m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \int_{\Omega} \cdots$$

$$\cdots \int_{(I''_k)} D_{I_k} \left\{ L^*_{\bar{I}} \left[V(P_0, P)\, u(P) \right] \right\} dx_{I'_k}.$$

Обозначения здесь таковы. Если $I = (i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_m)$, то $I_k = (i_{k+1}, \ldots, i_m)$; $I'_k = I_k \cup \bar{I}$; $I''_k = (i_k) \cup I'_k$; $dx_{I'_k}$ — произведение dx_i с $i \in I'_k$. Области интегрирования $\Omega(I''_k)$ суть грани основания Ω_0 n-мерной пирамиды с вершиной в P_0, с основанием, лежащим на Ω, и с боковыми ребрами, параллельными координатным осям (существование такой пирамиды—условие, накладываемое на Ω).

Чтобы получить $\Omega(I''_k)$, нужно в Ω_0 зафиксировать те переменные, индексы которых не входят в I''_k.

М. А. Рутман

377. Решение одной задачи Коши путем увеличения числа независимых переменных. Фаге М. К., Докл. АН СССР, 1956, **108**, № 6, 1022—1025

Рассматривается уравнение

$$q_n(w) \frac{\partial^n F}{\partial w^n} + p_n(x) \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \sum_{k=1}^{n-1} q_k(w, x) \frac{\partial^k F}{\partial w^k} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} p_k(w, x) \frac{\partial^k F}{\partial x^k} = H(w, x),$$

где $n \geqslant 3$, w — комплексное, а x — вещественное переменное. Для регулярных, не обращающихся в нуль $q_n(w)$ и непрерывных $p_n(x) > 0$ оно приводится к виду $q_n \equiv (-1)^{n-1}$; $p_n \equiv 1$.

Коэффициенты q_k, p_k и H предполагаются непрерывными.

В области G комплексной плоскости (w) $(x = 0)$ задаются n регулярных функций $f_k(w)$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ и ставится задача Коши $\partial^k F / \partial x^k = f_k$. Путем введения новых переменных („характеристических") в большем числе указанная задача сводится к ранее рассмотренной автором (реф. 376). Таким образом устанавливается единственность решения в соответствующем классе функций и характер зависимости его от начальных данных. Эта зависимость подобна зависимости для нормальных гиперболических уравнений, хотя рассматриваемое уравнение не принадлежит ни к одному из классических типов.

А. А. Дезин

378. О характеристиках уравнений с частными производными. Плись (On characteristics of partial differential equations. Plis A.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 10, 957—958, LXXX (англ.; рез. русск.)

Пусть дано C^1-решение уравнения

$$p = f(x, y_1, \ldots, y_n, z, q_1, \ldots, q_n) \qquad (f \in C^1).$$

На простом примере показана возможность того, что при заданном решении $\bar{z}(x, y) \in C^1$ некоторое решение системы уравнений

$$y'_i = -f'_{q_i}(x, y, \bar{z}(x, y(x)), \bar{q}(x, y(x))) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

нельзя дополнить функциями $z(x, y(x))$, $z'_y(x, y(x))$ до решения системы уравнений характеристик. С помощью предыдущих результатов автора (РЖМат, 1956, 1345) выведено необходимое и достаточное условие того, чтобы это дополнение можно было обязательно осуществить (известно, что так будет всегда, если $\bar{z} \in C^2$, $f \in C^2$). Это возможно, в частности, если все функции z'_{y_i} и f'_{q_i} удовлетворяют условию Гёльдера с достаточно большими показателями.

А. Д. Мышкис

379. Теорема существования решения дифференциального уравнения в частных производных 1-го порядка. Баяда, Винти (Un teorema d'esistenza della soluzione per un' equazione alle derivate parziali del 1 ordine. Baiada E., Vinti C.), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1955, 9, № 1—2, 115—160 (итал.)

В предыдущей работе Баяда (РЖМат, 1953, 1204) доказывается теорема существования для уравнения $z_x = f(x, z_y)$. Применяя подобный же метод, авторы получают аналогичную теорему для $z_x = f(x, y, z, z_y)$.

F. A. Ficken

380. Продолжение и отражение решений уравнений в частных производных. Джон (Continuation and reflection of solutions of partial differential equations. John Fritz), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **63**, № 6, 327—344 (англ.)

Автор исследует вопрос о локальной продолжимости через границу любого достаточно регулярного решения уравнения

$$P(\xi_0, \xi)\, u(x_0, x) = 0, \qquad x \equiv (x_1, \ldots, x_n), \ \xi_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0},$$

$$\xi \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \qquad (1)$$

где $P(\xi_0, \xi)$ есть форма (с постоянными коэффициентами) порядка N, удовлетворяющая условию $P(1, 0) = 1$ (нехарактеристичность плоскости $x_0 = 0$) при краевых условиях:

$$\left(\xi_0^k u \right)_{x_0 = 0} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1. \qquad (2)$$

Устанавливаются следующие результаты:

1. Для того чтобы любое достаточно регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), допускало локальное продолжение с одной стороны плоскости $x_0 = 0$ на другую, необходимо, чтобы для любого действительного вектора $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ корни λ_k характеристического уравнения $P(\lambda, \eta) = 0$ были либо все действительны, либо по крайней мере $N - s$ из них имели положительные мнимые части и по крайней мере $N - s$ из них имели отрицательные части.

2. Пусть $N = 2m$ и $s = m$ (данные Дирихле). Если в этом случае существует такое $\varepsilon > 0$, что любое решение (1), (2), достаточно гладкое в цилиндре $x \in D$, $0 \leqslant x \leqslant h$, регулярно и достаточно гладким образом продолжается в область $x \in D$, $-\varepsilon h < x_0 \leqslant 0$ (задача

удовлетворяет принципу отражения), то P имеет один из следующих трех видов:

$$P = \tau_0^{2m}, \quad (3) \qquad P = \prod_{k=1}^{2m} (\tau_0 - a_k L(\tau_l)), \quad (4)$$

$$P = \prod_{k=1}^{2m} (\tau_0^2 - a^2{}_k\, q(\tau_l)) \ ;$$

здесь $L(\tau)$ и $q(\tau)$ есть некоторые не зависящие от k линейная и соответственно квадратичная формы, a_k — постоянные, причем в случае (3) $a_1 > 0, \ldots, a_m > 0$, $a_{m+1} < 0, \ldots, a_{2m} < 0$, а в случае (4) $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2m$.

3. Во всех трех случаях фактически имеет место принцип отражения (достаточность условий п. 2). Это доказано прямым построением эффективных формул, дающих продолжение решений с условиями Дирихле. Например, в случае (3) $(2m-1)$-я производная продолжается по формуле $\xi_0^{2m-1} u(x_0, x) = v(x_0, x)$, где

$$v(x_0, x) = (2\pi i)^{-2} \int_{C'} d\alpha \int_{C''} d\beta \, \frac{S}{(\beta - \alpha) A(\alpha) B(\beta)} \ ;$$

здесь $A(\lambda) = \Pi_1^m (\lambda - a_k)$, $B(\lambda) = \Pi_{m+1}^{2m} (\lambda - a_k)$, C' и C'' — два непересекающихся и не содержащих начала координат контура таких, что C' содержит $a_1, \ldots, a_m$, а C'' содержит $a_{m+1}, \ldots, a_{2m}$, и

$$S = \beta^{2m-1} \frac{P\left(\frac{\alpha}{\beta}\xi_0, \xi\right) - P(\alpha L(\xi), \xi)}{\frac{\alpha}{\beta}\xi_0 - \alpha L(\xi)} u\left(\frac{\beta}{\alpha} x_0, x\right) -$$

$$- \alpha^{2m-1} \frac{P\left(\frac{\beta}{\alpha}\xi_0, \xi\right) - P(\beta L(\xi), \xi)}{\frac{\beta}{\alpha}\xi_0 - \beta L(\xi)} u\left(\frac{\alpha}{\beta} x_0, x\right)$$

Если теперь путем квадратур определена функция U из условий:

$$\xi_0^{2m-1} U = v, \quad (\xi_0^k U)_{x_0=0} = (\xi_0^k u)_{x_0=0}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2m-2,$$

то U и будет искомым продолжением решения u. Аналогичный результат установлен и в случае (4). Библ. 15 назв. И. И. Данилюк

381. О некоторых классах дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. Яблоков В. А., Научн. тр. Казанск. ин-та инж.-строит. нефт. пром-сти, 1954, № 2, 149—167

В первой главе рассматривается $n+1$-параметрический комплекс кривых в $n+1$-мерном евклидовом пространстве. Задавая два дополнительных соотношения относительно параметров и исключая эти параметры с помощью этих соотношений из уравнений комплекса, автор получает уравнение гиперповерхности, принадлежащей комплексу кривых. Доказывается, что всякая гиперповерхность комплекса удовлетворяет одному и тому же квазилинейному уравнению в частных производных второго порядка, которое может иметь и другие интегральные поверхности. Во второй главе тот же подход применяется к уравнению Монжа — Ампера для случая n независимых переменных. Рассматриваются уравнения, порождаемые различными частными случаями комплексов кривых, и делаются некоторые выводы относительно интегральных гиперповерхностей. З. И. Халилова

382. Замечание о приложениях теоремы Хилла — Иосида. Лион (Une remarque sur les applications du théorème de Hille Yosida. Lions J. L.), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 1, 62—70 (франц.)

1. Целью автора является перенесение результатов Иосида о задаче Коши для оператора $A + \partial^2/\partial t^2$, где A — эллиптический оператор второго порядка по x, на операторы вида

$$A + \frac{\partial}{\partial t} B + \frac{\partial^2}{\partial t^2} C \ ,$$

где A — эллиптический оператор порядка $2m$, B — порядка m, C — нулевого порядка; при этом задача Коши может быть заменена смешанной задачей. Автор замечает, что результаты легко могут быть обобщены на системы и на операторы A, B, C, зависящие от t, как это сделано в соответствующей работе М. И. Вишика.

2. Пусть Ω — область в R^n, $x = (x_1 \ldots x_n)$, $dx = dx_1 \ldots dx_n$, $H^0 \equiv L^0(\Omega)$, $H^{(m)}$ — пространство функций $u \in H^0$, $D^p u \in H^0$ $(p = 1, \ldots, m)$ с естественными нормами, H_0^m — замыкание в H^m множества $D(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями. Пусть Ω m-регулярна, т. е. существуют a и b такие, что для всех $u \in H^m$

$$|u|_k \leqslant a\,|u|_m + b\,|u|_0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-1,$$

где $|u|_k^2 = \sum_{|p|=k} |D^p u|_0^2$, $|u|_0^2 = (u, u)_0$. Пусть V — замкнутое в H^m подпространство $H_0{}^m \subset V \subset H^m$. Пусть на $V \times V$ задана полулинейная непрерывная форма $a(u, v)$ (т. е. линейная по u и полулинейная по v: $a(u, \lambda v) = \bar{\lambda}\, a(u, v)$), которую можно записать в виде

$$a(u, v) = a_0(u, v) + a_1(u, v), \qquad (1)$$

причем

Н. 1 1) $\overline{a_0(u, v)} = a_0(v, u)$, $u, v \in V$,
$a_0(u, u) \geqslant c_0 |u|_m^2$, $c > 0$, $u \in V$,

2) $|\operatorname{Re} a_1(u, v)| < c_1 \|u\|_m \cdot |v|_0$.

Форма $a(u, v)$ определяет оператор $A \in \mathfrak{C}(V, D'(\Omega))$ (если X и Y — топологические пространства, то $\mathfrak{C}(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в Y), где $D'(\Omega)$ — двойственное к $D(\Omega)$, формулой

$$\langle Au, v \rangle = a(u, v), \quad u \in V, \quad v \in D(\Omega). \qquad (2)$$

Пусть N — подпространство $u \in V$ таких, что $Au \in H^0$ и

$$(Au, v) = a(u, v) \text{ для всех } v \in V. \qquad (3)$$

Предположим, что $D(\Omega) \subset N$. Пусть далее имеем операторы B и C:

$$B \in L(V, H^0), \qquad C \in \mathfrak{C}(H^0, H^0).$$

Н. 2 $|\operatorname{Re}(Bv, v)| < c_2 |v|_0^2$, $v \in V$.

Н. 3 $(Cf, f) \geqslant \gamma |f|_0^2$, $\gamma > 0$, $f \in H^0$.

Тогда имеет место

Лемма 1. При гипотезах H. 1 и H. 3 величина $((u, v)) \equiv a_0(u, v) + (Cu, v)$ может быть принята за скалярное произведение и определяет гильбертово пространство с нормой, эквивалентной $\|u\|_m$ $(u, v \in V)$.

Введем в $V \times H^0$ топологию нормой $|||\{u, v\}||| = ((u, v)) + (Cv, v)$ и обозначим через U линейный непрерывный оператор из $N \times V$ в $V \times H^0$:

$$\{u, v\} \xrightarrow{U} \{v, -C^{-1}Au - C^{-1}Bv\}.$$

Теорема 1. Если Ω m-регулярна и имеют место H. 1, H. 2 и H. 3, то оператор $1 - \lambda U$, $\lambda \in R'$, для достаточно больших $|\lambda|$ есть изоморфизм из $N \times V$ на $V \times H^0$; если C_λ есть обратный, то при $N = V$, $|C_\lambda| \leqslant 1 + |\lambda|^{-1}\beta$, $\beta > 0$.

Доказательство вытекает из

Леммы 2: Для достаточно больших $|\lambda|$, $A + \lambda B + \lambda^2 C$ есть изоморфизм из N в H^0.

3. Смешанные задачи. Из теоремы 1 и теоремы Хилла-Иосида следует, что U есть бесконечно малый производящий оператор группы операторов $X(t)$ из $\mathfrak{C}(V \times H^0, V \times H^0)$; после чего легко доказывается

Теорема 2. Пусть выполнены гипотезы теоремы 1, $f \in N$, $g \in V$. Существует функция $u(t)$ единственная, дважды непрерывно дифференцируемая в H^0, непрерывно дифференцируемая в V, непрерывная в N для $t \geqslant 0$, удовлетворяющая

$$Au(t) + B\frac{d}{dt}u(t) + C\frac{d^2}{dt^2}u(t) = 0, \qquad t \geqslant 0,$$

такая, что $u(t) \xrightarrow[t \to 0]{} f$ в N и $\frac{d}{dt}u(t) \xrightarrow[t \to 0]{} g$ в V.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, оператор

$$A + \frac{\partial}{\partial t}B + \frac{\partial^2}{\partial t^2}C$$

есть изоморфизм из $D'_+(t, N)$ (или из $D'_-(t, N)$ в $D'_+(t, H^0)$ (или $D'_-(t, H^0)$) (обозначения см. Schwartz L. Théorie des distributions, t. II. Paris, Hermann, 1950).

А. Л. Крылов

383. Теоремы единственности и представления решений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ в бесконечной области. **Миранкер** (Uniqueness and representation theorems for solutions of $\Delta u + k^2 u = 0$ in infinite domains. Miranker W. L.), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 6, 847—858 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad (k > 0) \qquad (1)$$

в бесконечной области D и для случая, когда дополнение D является ограниченной областью, выводится формула представления решения u уравнения (1) и доказывается единственность решений задач Дирихле и Неймана. При этом на решение накладывается только условие излучения на бесконечности—одно из условий Зоммерфельда. В случае, когда дополнение D является неограниченной областью, то при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на решение, кроме условия излучения, выводится аналогичная формула представления. Доказывается единственность решения задачи Дирихле при условии, что область D содержит прямой круговой конус с углом при вершине $> \pi$.

Заметим, что результаты для случая, когда дополнение D является ограниченной областью, имеются в работе И. Н. Векуа (Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1943, **12**), где также доказывается, что второе условие Зоммерфельда — условие ограниченности — является следствием условия излучения.

С. А. Терсенов

384. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. **Слободецкий Л. Н.**, Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 2, 243—246

В работе введены функциональные пространства, обобщающие пространства С. Л. Соболева $W_2^{(l)}$ на случай нецелого l. Пусть $l = l' + \lambda$, где l' — целое $\geqslant 0$ и $0 < \lambda < 1$. Будем говорить, что $f(x) \in W_2^{(l)}$, если $f(x) \in W_2^{(l')}$ и сходятся все интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{|D^q f(x) - D^q f(y)|^2}{|x - y|^{n + 2\lambda}}\,dxdy,$$

где $D^q f$ обозначает любую производную от f порядка $\leqslant l'$, n — число измерений пространства, интегрирование ведется по n-мерным пространствам x и y.

В пространствах $W_2^{(l)}$ можно естественно ввести норму и скалярное произведение, превратив их тем самым в гильбертовы пространства. (Рассматриваются также еще более общие пространства, чем только что определенные).

Сформулированы теоремы для этих новых пространств, аналогичные теоремам вложения С. Л. Соболева, причем результаты здесь получаются предельно точные. Пространства $W_2^{(l)}$ легко определить и для функций, заданных на достаточно гладких поверхностях. Из теорем, сформулированных в работе, например, следует, что если в n-мерной области D, ограниченной достаточно регулярной поверхностью S

$$f(x) \in W_2^{(1)}(D), \text{ то на } S f(x) \in W_2^{(1/2)}(S),$$

и обратно: любую функцию $f \in W_2^{(1/2)}(S)$ можно продолжить внутрь области так, что продолженная функция будет принадлежать $W_2^{(1)}$, при этом

$$C_1 \|f\|_{W_2^{(1/2)}(S)} \leqslant \|f\|_{W_2^{(1)}(D)} \leqslant C_2 \|f\|_{W_2^{(1/2)}(S)},$$

C_1, $C_2 > 0$ зависят только от D.

Новые пространства имеют интересные приложения в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Из сформулированных в работе теорем приведем одну.

Для того чтобы задача Дирихле $\Delta u = f(x)$, $u|_S = \varphi(x)$ (S трижды непрерывно дифференцируема) была однозначно разрешима в $W_2^{(2)}(D)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_2(D)$, $\varphi \in W_2^{(3/2)}(S)$. При этом для решения имеет место оценка

$$C_1\left[\|f\|_{L_2(D)} + \|\varphi\|_{W_2^{(3/2)}(S)}\right] \leqslant \|u\|_{W_2^{(2)}} \leqslant C_2\left[\|f\|_{L_2(D)} + \|\varphi\|_{W_2^{(3/2)}}\right].$$

Доказательства не приведены.

В. М. Бабич

385. Задача Дирихле для уравнения

$$\Delta U + \frac{4n(n+1)}{(1 + x^2 + y^2)^2}U = 0.$$

Ганин М. П., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 5, 205—209

Автор в явном виде дает все решения задачи Дирихле (задача неединственна) для уравнения

$$\Delta U + \frac{4n(n+1)}{(1+x^2+y^2)^2} U = 0$$

в случае круговой области; Δ — оператор Лапласа на плоскости, n — целое положительное число.

С. А. Терсенов

386. Задачи Неймана в комплексной области. Кон, Спенсер (Complex Neumann problems. Kohn J. J.; Spencer D. C.), Ann. Math., 1957, **66**, № 1, 89—140 (англ.)

Для каждой точки τ комплексной сферы определяется оператор d_τ при помощи соотношения $2d_\tau = (\tau - i)\partial + (\tau + i)\bar{\partial}$, где ∂ — комплексный аналог оператора d внешнего дифференциала, $\bar{\partial}$ — ему сопряженный оператор (Шиффер М., Спенсер Д. Функционалы на конечных римановых поверхностях, М., 1957, гл. 9; РЖМат, 1957, 7848 К); таким образом, d_τ совпадает с операторами d, ∂ и $\bar{\partial}$, когда $\tau = \infty$, $-i$, i соответственно. Многообразие V класса C^∞ называется почти комплексным многообразием, если существует отображение $J: A_x \to A_x$ дифференциальных форм A над V такое, что 1) $A_x \to A_x$ есть гомоморфизм в каждой точке $x \in V$, 2) $Jv = v$ при $v \in A^0_x$, 3) $J^2 v = (-1)^p v$ при $v \in A^p_x$; риманово многообразие называется эрмитовым, если $(u, v) = (Ju, Jv)$ для всех $u, v \in A^1_x$ ((u,v) — внутреннее произведение, соответствующее заданной римановой метрике). На почти комплексном эрмитовом многообразии определяются операторы Лапласа (см. там же, а также Рам, Ж. де. Дифференцируемые многообразия, 1956, гл. V; РЖМат, 1958, 703 К): $\Delta = d\delta + \delta d$, $\delta = -*d*$, $\Box = \bar{\partial}\mathfrak{d} + \mathfrak{d}\bar{\partial}$, $\mathfrak{d} = -*\partial*$, а также $k_\tau \Box_\tau = \delta_\tau d_\tau + d_\tau \delta_\tau$, где $k_\tau = \frac{1}{4}\left\{|\tau - i|^2 + |\tau + i|^2\right\}$, $\delta_\tau = -*d_\tau*$. Если $\Delta = 2\Box$, то V называется псевдокелеровым многообразием, в этом случае $\Box_\tau = \Box$.

Изучается задача Неймана на конечных почти комплексных псевдокелеровых многообразиях: требуется найти решение уравнения $\Box\varphi = 0$ на V, удовлетворяющее условиям $n\varphi = n\Theta$, $nd_\tau\varphi = nd_\tau\Theta$ на границе в V; здесь $n\psi$ есть нормальная составляющая формы ψ, Θ — произвольная форма, заданная в окрестности границы. Вся статья состоит из 6 разделов. Разд. I посвящен предварительным основным понятиям и теоремам, после чего в разд. II выводятся соответствующие формулы Грина, ставится краевая задача и, в частности, устанавливается, что она формально самосопряженная тогда и только тогда, когда τ чисто мнимо и лежит вне интервала $(-i, i)$. Задача изучается методом Пуанкаре — Фредгольма и приводится к интегральным уравнениям. Если $\tau \neq \infty$, то этот метод приводит к сингулярным интегральным уравнениям. После решения в разд. III задачи в единичном шаре, авторы строят в разд. IV общую теорию сингулярных интегральных уравнений на компактных римановых многообразиях, предполагая при этом, что ядра уравнений удовлетворяют условиям Жиро. Возвращаясь затем к задаче Неймана и используя полученные результаты, авторы устанавливают, что для всех τ, лежащих вне отрезка $[-i, i]$, полученная система сингулярных интегральных уравнений регуляризируема, т. е. что задача эквивалентна системе интегральных уравнений Фредгольма. В разд. V полностью решены случаи самосопряженной задачи Неймана, за исключением двух значений τ: $\tau = i$, $\tau = -i$. В разд. VI обсуждается также случай $\tau = i$. Библ. 36 назв.

И. И. Данилюк

387. О парах гармонических функций. Редхеффер (On paris of harmonic functions. Redheffer R. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 450—457 (англ.)

Рассматриваются пары гармонических функций без дополнительного условия сопряженности (удовлетворение системе Коши—Римана). Для таких пар функций справедлива теорема о максимуме модуля. Строится пример такой пары функций, для которой теорема о минимуме модуля не имеет места. В случае, когда минимум модуля достигается во внутренней точке, даются некоторые оценки для производных, которые зависят от величины данного минимума, диаметра рассматриваемой области и константы M такой, что $u^2 + v^2 \geqslant M$ на границе области.

В. С. Виноградов

388. К теории потенциала козамкнутых гармонических форм. Дафф (On the potential theory of coclosed harmonic forms. Duff G. F. D.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 1, 126—137 (англ.)

Как и в ряде других работ автора, рассматриваются граничные задачи смешанного типа для уравнений Пуассона, связанных с козамкнутыми формами на конечных N-мерных римановых многообразиях класса C^∞ (с положительно определенной метрикой), с гладкой $(N-1)$-мерной границей B.

Козамкнутые гармонические формы удовлетворяют уравнениям $\delta d\Phi = 0$, $\delta\Phi = 0$ (по поводу обозначений см., например, РЖМат, 1957, 7848 К и РЖМат, 1958, 703 К).

В реферируемой работе доказана, например, теорема об условиях однозначной разрешимости граничной задачи $t*\varphi = \xi$, $t*d\varphi = \eta$ для соответствующих уравнений Пуассона: $\delta d\varphi = \rho$, $\delta\varphi = \sigma$ (здесь d — дифференциал, δ — кодифференциал, $*$ — оператор перехода к дополнительной форме, t — оператор перехода к граничным значениям). Эти условия состоят в том, чтобы формы $\rho = \rho_p$, $\sigma = \sigma_{p-1}$ были кодифференциалами, а формы $\xi = \xi_{N-p}$ и $\eta = \eta_{N-p-1}$, определенные на границе B многообразия M, удовлетворяли условиям

$$d_B \xi = (-1)^N t*\sigma, \quad \int_{bR_{N-p+1}} = (-1)^N \int_{R^*_{N-p+1}\sigma},$$

$$d_B \eta = (-1)^N t*\rho, \quad \int_{bR_{N-p}} \eta = (-1)^N \int_{R^*_{N-p}\rho}.$$

Единственность решения обеспечивается требованием ортогональности решения к подпространству пространства форм, натянутому на формы, удовлетворяющие условиям $d\tau = \delta\tau = 0$, $n\tau = 0$.

В. В. Рыжков

389. О задаче Неймана и дуально-сопряженной задаче в обобщенной теории потенциала. Дафф (On the Neumann and dual-adjoint problems of generalized potential theory. Duff G. F. D.), Trans. Roy. Soc. Canada, 1956, Sec. 3, **50**, June, 23—31 (англ.)

Рассматривается N-мерное риманово пространство с положительно определенной метрикой класса C^∞, через M обозначается компактная область пространства, ограниченная гладкой гиперповерхностью B (поверхностью $N-1$-измерения). Если B локально определена уравнением $x^N = 0$, то имеет место разложение: $\varphi_p = t\varphi + n\varphi = t\varphi + \bar{n}\varphi \wedge dx^N$, где $t\varphi$ и $\bar{n}\varphi$ не содержат dx^N и определяют касательную и нормальную компоненты дифференциальной формы φ_p порядка p $(1 \leqslant p \leqslant N-1)$. Форма φ называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = 0$, $\Delta = d\delta + \delta d$ (относительно опе-

раторов d, δ, Δ и других употребляемых здесь понятий см. Де РАМ Г., РЖМат, 1958, 703 К). Задача Неймана в обобщенной теории потенциала состоит в нахождении гармонической формы с заданными значениями $t\delta\varphi$ и $nd\varphi$ на B (РЖМат, 1953, 757).

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть заданные значения $t\delta\varphi$ удовлетворяют условиям:

$\int_B \delta\varphi \wedge *\tau = 0$, $d\tau = 0$, $\delta\tau = 0$, $t\tau = 0$;

обозначим через α гармоническое поле ($d\alpha = d\delta\alpha = 0$) с условиями

$$t\alpha = d_B\, t\delta\varphi, \quad \int_{R_p} \alpha = \int_{bR_p} \delta\varphi.$$

Для того чтобы существовала гармоническая форма с заданными значениями $t*d\varphi$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$d_B\, t*d\varphi = (-1)^p\, t*\alpha, \qquad \int_{bR_{N-p}} t*d\varphi = (-1)^p \int_{R_{N-p}} {}^*\alpha,$$

где bR_{N-p} — гомологичный нулю цикл на B.

2. Для того чтобы существовала гармоническая форма φ с заданными значениями $t\varphi$ и $t*d\varphi$, необходимо и достаточно, чтобы имели место условия

$$\int_B \tau \wedge *\,d\varphi, \quad d\tau = 0, \quad \delta\tau = 0, \quad t*\tau = 0,$$

$$d_B\, t\varphi = t\beta, \quad \int_{bR_{p+1}} t\varphi = \int_{R_{p+1}} \beta,$$

где β — производная форма ($\beta = d\chi$), удовлетворяющая условию $t*\beta = t*d\varphi$, или эквивалентные им условия:

$$\int_B (\varphi \wedge *d\rho - \rho \wedge *d\varphi) = 0,$$

где формы ρ удовлетворяют условиям:

$$\delta\rho = 0, \quad \delta d\rho = 0, \quad t^*\rho = 0.$$

Доказательства теорем получаются приведением их к смешанной задаче (реф. предыдущий), содержащей задачи Дирихле и Неймана в качестве экстремальных случаев ($p = 0$ или $p = N$). Появление точечных ограничений, наряду с интегральными, в условиях разрешимости рассматриваемых задач, является, как отмечает автор, новым явлением в теории эллиптических дифференциальных уравнений .Библ. 8 назв.

И. И. Данилюк

390. Граничные свойства гармонических функций в трехмерном пространстве. Мозжерова Н. И., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 4, 636—638

Пусть D — область n-мерного евклидова пространства, D' — область, замыкание которой лежит в D. Вектор h называется допустимым для $D' \subset D$, если векторы вида $t\,h$, $|t| < 1$, сдвигают D' в пределах D. Пусть $r \geqslant 0$ — целое число, $0 < \alpha \leqslant 1$ и $M > 0$ — константы, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Функция $f(x)$, $x \in D$ называется входящей в класс $W_p^{(r)} H^{(\alpha)}(M, D)$, если $f(x)$ и ее обобщенные производные (в смысле Соболева) до порядка r включительно принадлежат $L_p(D)$ и для каждой из производных порядка r имеет место неравенство

$$\|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)\|_{L_p(D')} \leqslant M\,|h|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1),$$

$$\|f^{(r)}(x+h) - 2f^{(r)}(x) + f^{(r)}(x-h)\|_{L_p(D')} \leqslant M\,|h|$$

($\alpha = 1$.

Для $0 < \varepsilon < 1$ полагаем по определению

$$W_p^{(r)} H^{1+\varepsilon}(M, D) = W_p^{(r+1)} H^{(\varepsilon)}(M, D).$$

Аналогично определение классов $W_p^{(r)} H^{(\alpha)}(M, S)$ функций, заданных на достаточно гладкой поверхности S.

В статье без доказательства для $n = 3$ приводятся теоремы:

1. Если $\Delta u = 0$, $u|_S = f \in W_p^{(r)} H^{\alpha - \frac{1}{p}}(M, S)$,

то $u \in W_p^{(r)} H^{(\alpha)}(\overline{M}, D)$.

2. Если $\Delta u = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f \in W_p^{(r)} H^{\alpha - \frac{1}{p}}(M, S)$,

то $u \in W_p^{(r+1)} H^{(\alpha)}(\overline{M}, D)$.

3. Если $\Delta u = f$, $u|_S = 0$ $\left(\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0\right)$, и $f \in W_p^{(r)} H^{(\alpha)}(M, D)$, то $u \in W_p^{(r+2)} H^{(\alpha)}(\overline{M}, D)$.

Отмечается, что полученные результаты легко переносятся на любое n и, вообще говоря, не могут быть усилены. Имеются опечатки и неудачные обозначения.

Х. Л. Смолицкий

391. Задача Дирихле. Выборный (Dirichletova úloha. Výborný Rudolf), Časop. pěstov. mat., 1958, 83, № 1, 99—100 (чешск.)

В статье доказывается теорема: Пусть $W_f(P)$ — перроново обобщенное решение задачи Дирихле в области D. Если оператор $A_f(P)$ удовлетворяет условиям: 1) оператор $A_f(P)$ ставит в соответствие каждой непрерывной на границе области D функции f гармоническую функцию; 2) если для данной функции задача Дирихле разрешима, то A_f совпадает с решением задачи Дирихле; 3) если $f_1 \leqslant f_2 + K$ (K — константа) на границе области D, то $A_{f_1} \leqslant A_{f_2} + K$ в области D, — тогда $W_f(P) = A_f(P)$ в D.

С. А. Терсенов

392. Распространение теорем о сходимости и единственности в теорий обобщенной задачи Дирихле. Чиммино (Una estensione dei teoremi di convergenza e di unicitá nella teoria del problema generalizzato di Dirichlet. Cimmino Gianfranco), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 87—94 (итал.)

Автор ограничивается для простоты задачей Дирихле для уравнения Лапласа в плоской односвязной области D, ограниченной контуром C_0. Пусть C_0 аппроксимирован изнутри D контурами C_t ($t > 0$), имеющими, параметрическое представление $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, так что C_0 получается при $t = 0$ (в соответствующих предположениях регулярности). Тогда известно, что для любой функции $\varphi(s) \in L_2(C_0)$ существует гармоническая в D функция u_φ, для которой $\|u_\varphi(x(s, t), y(s, t)) - \varphi(s)\|_{L_2} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$. Доказывается: 1) если последовательность $\varphi^n(s)$ слабо сходится к $\varphi(s)$, то $u_{\varphi^n}(x, y) \to u_\varphi(x, y)$ для всех $(x, y) \in D$; 2) если функция $u(x, y)$ гармонична в D и функции $u(x(s, t), y(s, t))$ при $t \to 0$ слабо сходятся к нулю, то $u \equiv 0$. Второе утверждение доказано только для случая, когда все контуры C_t в результате конформного преобразования области D переходят в концентрические окружности, однако имеются некоторые указания, какими надо руководствоваться в более общем случае.

А. Д. Мышкис

393. Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений. Дымков С. С., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 2, 220—222

Изучается первая краевая задача для квазилинейного эллиптического уравнения

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,u) = 0, \quad (1)$$

$$u\big|_S = 0; \quad (2)$$

S — граница ограниченной области Ω евклидова пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$, S состоит из конечного числа дважды дифференцируемых поверхностей, имеющих гельдеровые вторые производные. Предполагается, что $\frac{\partial a}{\partial u} \geqslant \beta > 0$ для $x \in \overline{\Omega}$ и всех u; a_{ij}, a_i, a имеют первые производные по x и u и ограничены вместе с производными некоторой постоянной C_4 при $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant \frac{1}{\beta}\max_x |a(x,0)| = C_1$.

Тогда справедливы теоремы:

Теорема 1. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ и любых вещественных ξ_i

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi^2 i; \quad (3)$$

$$\max\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial u}\right| \leqslant \frac{\alpha e\sqrt{3}}{12 n C_1}, \quad (4)$$

когда $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant C_1$. Тогда задача (1), (2) имеет решение $u \in E_{\delta,2}$ ($E_{\delta,2}$ — пространство функций, имеющих 2 непрерывных в смысле Гельдера производных в $\overline{\Omega}$).

Теорема 2. Задача (1), (2) имеет решение $u \in E_{\delta,2}$, если

$$\beta \geqslant \frac{12 n C_4}{\alpha_1 e\sqrt{3}} \max_x |a(x,0)|$$

(постоянная α_1 определяется следующим образом: предполагается, что условие (3) выполняется при $u = 0$ с $\alpha = \alpha_0$, тогда существует $\alpha_1 > 0$ и можно выбрать указанные выше C_1 и C_4 так, чтобы для всех $x \in \overline{\Omega}$, $|u| \leqslant C_1 \leqslant \frac{e\sqrt{3}\,\alpha_1}{12 C_4 n}$ было справедливо неравенство (3) с $\alpha = \alpha_1$).

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1 или 2 и $\beta > C_3 C_4$, $C_3 \geqslant \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|$, то решение задачи (1), (2) единственно.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на изучении вспомогательного уравнения, содержащего параметр, леммах, дающих априорные равномерные по параметру оценки для решения и его производных до второго порядка, получаемых с помощью методики О. А. Ладыженской (РЖМат, 1958, 9880), использования теоремы Шаудера о разрешимости задачи (1) для линейного уравнения (Math. Z., 1934, 38, H 2) и топологического метода Лере и Шаудера. Замечается, что аналогичные результаты могут быть получены для уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b(x,u,p) = 0;$$

$p = (u'_{x_1}, \ldots, u'_{x_n})$ при некоторых предположениях о функции $b(x,u,p)$. С. Д. Эйдельман

394. О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа. Ильин В. А., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 1, 87—180

В § 1 дан подробный обзор современного состояния вопроса о разложении функции в ряд Фурье по собственным функциям уравнения Лапласа

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (1)$$

заданного в конечной области g N-мерного пространства Евклида. В §§ 2—9 автор доказывает следующую теорему:

Пусть область g допускает применение формулы Грина к собственным функциям, а f — произвольная функция, заданная в этой области и удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $f \in W_p^{\left(\frac{N-1}{2}\right)}(g)$, где $p > \frac{2N}{N-1}$ для нечетного N, $f \in W_p^{\left(\frac{N}{2}\right)}(g)$, где $p > 2$ для чётного N;

2) функции $f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots, \Delta^k f$ (где $k = \left[\frac{N-2}{4}\right]$ для случая первой краевой задачи, $k = \left[\frac{N-4}{4}\right]$ для случая второй или третьей краевых задач) удовлетворяют в обобщенном смысле соответствующему однородному краевому условию.

Тогда ряд Фурье функции f сходится при суммировании в порядке возрастания собственных чисел равномерно в любой строго внутренней подобласти g'.

Автор показывает при помощи примеров, что ни одно из указанных условий не может быть ослаблено.

Попутно при доказательстве основной теоремы автор получает много результатов, имеющих самостоятельный интерес. Б. М. Левитан

395. О разложимости функций, обладающих особенностями, в условно сходящийся ряд по собственным функциям. Ильин В. А., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 1, 49—80

Изучается разложение по собственным функциям уравнения Лапласа

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (1)$$

заданного в конечной области g N-мерного пространства при однородном граничном условии любого из трех родов. Автор доказывает следующую теорему: Если функция $f(Q)$ внутри области g обладает особенностью вида $r_{PQ}^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ или вида $\ln r_{PQ}$ и после выделения указанной особенности удовлетворяет обычным условиям разложимости (т. е. условиям, приведенным в предыдущем реф. 394), то она может быть разложена в ряд Фурье по собственным функциям уравнения (1) (для области g), причем этот ряд сходится при суммировании в порядке возрастания собственных чисел равномерно в любой строго внутренней подобласти g', из которой удалена сколь угодно малая окрестность особой точки P.

В работе также имеется новый вывода симптотической формулы для спектральной функции уравнения (1).

Б. М. Левитан

396. Асимптотика собственных значений и функций задач типа Дирихле для одного класса эллиптических систем. Драпкин (Асимптотика власних значень і функцій задач типу Діріхле для одного класу еліптичних систем. Драпкін А. Б.), Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, **44**, 134—147 (укр.)

В конечной области D, ограниченной поверхностью Ляпунова S, рассматривается задача:

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x) = -\lambda_k u_k(x),\ x \in D;\ u_k(x) = 0,\ x \in S, \quad (1)$$

где

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{ij} A_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0,\ A_{ij} = A_{ji} \quad (2)$$

—оператор второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами. В предположении, что оператор (2) эллиптичен и является вариационным оператором от некоторого положительно определенного функционала, при помощи метода, принадлежащего Карлеману, автор устанавливает, используя фундаментальные матрицы-решения, асимптотические формулы:

$$\sum_{k=1}^{n} u'_k(x)\, u_k(x) \sim \frac{1}{12\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{spur} \left\{ \left[A_2(x,\alpha) \right] \left[A_2(x,\alpha) + E \right] \right\}^{-1} d\alpha \cdot \lambda_n^{3/2}, \quad (3)$$

$$n \sim \frac{1}{12\pi^4} \int_D \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{spur} \left\{ \left[A_2(x,\alpha) \right] \left[A_2(x,\alpha) + E \right] \right\}^{-1} d\alpha \right\} dx \cdot \lambda_n^{3/2},$$

где $A_2(x,\alpha) = \sum_{ij} A_{ij}(x)\, \alpha_i \alpha_j$, u_k — столбец, u'_k — строка, E — единичная матрица, $d\alpha = d\alpha_1 \dots d\alpha_n$, $dx = dx_1 \dots dx_n$. Полученные формулы содержат в себе ряд известных ранее асимптотических выражений для решений уравнений второго порядка и системы теории упругости. Библ. 7 назв. И. И. Данилюк

397. Асимптотика собственных значений для одного класса несамосопряженных эллиптических систем. Драпкин (Асимптотика власних значень для одного класу несамоспряжених еліптичних систем. Драпкін А. Б.), Наук. зап. Львівськ. ун-т, 1957, **44**, 148—151 (укр.)

Показано, что асимптотическое выражение (3) для собственных чисел задачи (1) (см. предыдущий реферат) остается справедливым также и в том случае, когда дифференциальный оператор (2), входящий в эту задачу, есть сумма описанного там оператора и оператора

$$A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_i A_i^*(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A^*_0(x)$$

с достаточно гладкими матрицами $A^*_i(x)$, $A^*_0(x)$.
И. И. Данилюк

398. Бигармоническая задача о собственных значениях для полубесконечной полосы. Хорви (Biharmonic eigenvalue problem of the semi-infinite strip. Horvay Gabriel), Quart. Appl. Math., 1957, **15**, № 1, 65—81 (англ.)

Рассматривается бигармоническая задача для полубесконечной полосы ($0 \leqslant x \leqslant \infty$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$) в случае, когда кромки ($y = \pm 1$) свободны от напряжений, а к торцу $x = 0$ приложена уравновешенная система сил.

Касательное и нормальное усилия, приложенные к торцу $x = 0$, разлагаются на интервале $-1 \leqslant y \leqslant 1$ в ряды по полиномам Лежандра $P_n(y)$ и полиномам Хорви — Шписса $Q_n(y)$ (РЖМат, 1956, 549°). Для торцевой нагрузки, заданной в форме полинома P_n или Q_n, ищется решение бигармонической задачи в виде

$$K_n = \operatorname{Re} \sum_k c_{nk} \varphi_k(x,y).$$

Здесь $\varphi_k(x,y)$ — бигармоническая функция Папковича — Фадле, удовлетворяющая условиям на кромках $y = \pm 1$

$$\varphi_k = z_k^{-2} e^{-z_k x} (\cos z_k y - y \operatorname{tg} z_k \sin z_k y),$$

$$\sin 2z_k + 2z_k = 0,$$

c_{nk} — постоянные, определяемые из условий на торце $x = 0$, Re — действительная часть. Решение также записывается в форме интеграла Фурье и строится приближенное решение задачи. Приведены некоторые численные результаты. М. Г. Слободянский

399. Распространение теоремы о сходимости метода моментов С. Фаэдо. Киффи (Estensione del teorema di convergenza del metodo dei momenti di S. Faedo. Chiffi Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 591—595 (итал.)

Рассматривается смешанная задача

$$L[v] \equiv -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b_1 \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial t} + cv = F$$

$$(0 \leqslant x \leqslant c;\ 0 \leqslant t < \infty),$$

$$v(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad v(0,t) = v(c,t) = 0.$$

Метод Фаэдо состоит в отыскании приближенных решений в виде

$$v_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_{in}(t)\, \varphi_i(x),$$

где $\{\varphi_i(x)\}$ — заданная система функций, полная на $[0,c]$, а функции c_{in} находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\int_0^c \{L[v_n] - F\}\, \varphi_s dx = 0 \qquad (s = 1, \dots, n).$$

Фаэдо доказал сходимость метода при условии $a(x,t) > 0$. В данной работе показано, что при более слабом ограничении $a + a_1^2 > 0$, $a(x,0) > 0$ возможно сделать простую замену аргументов (при соответствующих предположениях регулярности), после которой будет выполняться условие Фаэдо. Тем самым общие результаты Фаэдо оказываются справедливыми и при указанном ограничении. А. Д. Мышкис

400. Сингулярные задачи Коши для гиперболических уравнений в частных производных. Дун Гуэн-чан (On singular Cauchy problems of hyperbolic partial

differential equations. Tong Kwang-chang), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 319—322 (англ.)

Ставится задача Коши для уравнения

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{\partial u}{\partial x_k}+au=f,$$

в котором $a_{00}=1$, а форма $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j$ отрицательно определенная при $x_0>0$; начальные данные задаются при $x_0=0$. Задача Коши называется сингулярной первого рода, если при $x_0=0$ какая-либо из функций a_{ij}, a_k, a, f делается бесконечной, и сингулярной второго рода, если при $x_0=0$ упомянутая выше форма вырождается. Решение задачи Коши называется классическим, если оно имеет непрерывные первые производные при $x_0\geqslant 0$ и непрерывные вторые производные при $x_0>0$. Формулируются теоремы существования классического решения, несколько усиливающие теоремы М. Л. Краснова (РЖМат, 1957, 4013) и К. И. Карапетяна (РЖМат, 1958, 7752). С. Г. Михлин

401. Замечание об интегрировании уравнений напряжения в теории плоской пластичности. Гейрингер (Remark on the integration of the stress equations in plane plasticity. Geiringer Hilda. Mémoires sur la mécanique des fluides offerts à M. Dimitri P. Riabouchinsky, pp. 85—87. Publ. Sci. Tech. Ministère de l'Air, Paris, 1954) (франц.)

Известно, что для идеально пластичного тела при явном напряжении радиусы кривизны R_ξ, R_η линий сдвига $\eta=\text{const}$ и $\xi=\text{const}$ соответственно удовлетворяют дифференциальным уравнениям в частных производных

$$\frac{\partial^2 R_\xi}{\partial\eta\partial\xi}=R_\xi\ , \qquad \frac{\partial^2 R_\eta}{\partial\eta\partial\xi}=R_\eta\ . \tag{1}$$

В этой статье автор указывает, что в дополнение к R_ξ, R_η другая пара функций удовлетворяет (1). Это суть функции:

$$X=x\cos(\eta-\xi)+y\sin(\eta-\xi),$$

$$Y=-x\sin(\eta-\xi)+y\cos(\eta-\xi),$$

где x,y — декартовы ортогональные координаты точки. N. Coburn

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 2, 199

402. Интегрирование волнового уравнения на основе теории полугрупп. Иосида Сугаку, 1956, 8, № 2, 65—71 (японск.)

403. Параболические уравнения. Наш (Parabolic equations. Nash John), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, 43, № 8, 754—758 (англ.)

Целью заметки является доказательство теорем о непрерывности решений параболических и эллиптических уравнений. Такие априорные теоремы о непрерывности важны, по словам автора, для приложений к нелинейным уравнениям.

Изучаются параболические уравнения вида

$$\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[C_{ij}(x_1,\ldots,x_n,t)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right]=\frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{или} \quad \nabla[C\Delta T]=\dot{T}, \tag{1}$$

где C — симметрическая действительная матрица, имеющая верхнюю и нижнюю границы собственных значений $c_2\geqslant c_1>0$. Такими уравнениями описывается диффузия или распространение теплоты.

Теорема 1. Если $T(x,t)$ — решение (1), удовлетворяющее условию $|T|\leqslant B$ при $t=t_0$, тогда для всех $t_2\geqslant t_1\geqslant t_0$

$$|T(x_1,t_1)-T(x_2,t_2)|\leqslant BA\left[\left(\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{t_1-t_0}}\right)^{\alpha}+\left(\frac{t_2-t_1}{t_1-t_0}\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha+2}}\right], \tag{2}$$

где α и A — постоянные, зависящие только от c_1, c_2 и n.

Аналогичные результаты получаются для решений граничных задач для эллиптических уравнений:

Теорема 2. Если $T(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\cdot(C\Delta T)=0$ в области и $|T|_\Gamma\leqslant B$ на границе, то

$$|T(x)-T(\bar{x})|\leqslant BD\left[\frac{|x-\bar{x}|}{\min(d(x),d(\bar{x}))}\right]^{\frac{\alpha}{2\alpha+1}},$$

где α определяется как в теореме 1, а D зависит только от c_1, c_2, и n.

Доказательство теорем проведено элементарными методами с использованием фундаментального решения. А. Л. Крылов

404. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений параболического типа. Выборный Рудольф, Докл. АН СССР, 1957, 117, № 4, 563—565

Пусть $D=G\times(0,T)$ — цилиндрическая область в $n+1$-мерном пространстве, G — область изменения $x_1\ldots x_n$, $t\in(0,T)$. При некоторых ограничениях, накладываемых на область D для решения u параболического уравнения

$$L(u)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}-u_t+cu=f$$

$$(c\leqslant 0,\ \sum a_{ij}\lambda_i\lambda_j\geqslant m\sum\lambda_i^2,\ m>0),$$

при краевых условиях

$$a\frac{\partial u}{\partial l}+bu=0 \qquad \text{на } S,$$

$$u=0 \qquad \text{на } Z$$

(S — боковая поверхность, Z — основание цилиндра, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $a^2+b^2\geqslant k>0$, l — направление, образующее с внутренней нормалью к S острый угол) на основании принципа максимума получаются оценки, аналогичные оценкам О. А. Олейник (Матем. сб.; 1952, 30 (72) № 3) для эллиптических уравнений.

На основании этих оценок устанавливается непрерывная зависимость решения как от коэффициентов уравнения, так и от коэффициентов краевых условий. С. А. Терсенов

405. Решение одной смешанной задачи на полупрямой. Джавадов М. Г., Докл. АН АзербССР, 1957, 13, № 3, 243—246 (рез. азерб.)

Рассматривается смешанная задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c(x)u, \tag{1}$$

$$u(t, x)|_{x=0} = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

$$u(t, x)|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{3}$$

Решение ищется в виде

$$u(t, x) = \int_0^\infty A(t,\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

Определение коэффициентов $A(s, \lambda)$ сводится к следующей задаче Коши для операторного уравнения:

$$\frac{dA}{dt} = SA(t),$$

$$A|_{t=0} = a,$$

где $a = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x) \sin \lambda x dx$.

Доказывается, что если $C(\infty) = C'(\infty) = 0$, $f(0) = f(\infty) = f'(\infty) = 0$ и $C(x)$, $C'(x)$, $C''(x)$, $f''(x)$ абсолютно интегрируемы, то задача (1), (2), (3) имеет решение, притом единственное. З. И. Халилов

406. О применении преобразования Лапласа к краевым задачам. Хельвиг (Über die Anwendung der Laplace—Transformation auf Randwertprobleme. Hellwig Günter), Math. Z., 1957, 66, № 4, 371—388 (нем.)

Обосновывается применение преобразования Лапласа к решению следующей краевой задачи:

1. Рассматривается уравнение

$$\bar{D}u \equiv \bar{A}u + b(x) u_t = 0, \quad (l \leqslant x \leqslant m, \quad 0 \leqslant t < \infty); \tag{1}$$

здесь $\bar{A}u = -(p(x) u_x)_x + q(x) u$, где $p(x) > 0$, $b(x) > 0$ — заданные функции.

2. При начальном и граничных условиях:

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = u_0(x), \tag{2}$$

$$\bar{R}_i u = a_{i1} u(l, t) + a_{i2} u_x(l, t) + a_{i3} u_t(l, t) + b_{i1} u(m, t) + b_{i2} u_x(m, t) + b_{i3} u_t(m, t) = 0 \quad (i = 1,2), \tag{3}$$

где $u_0(x)$ — произвольно заданная функция, $a_{i1}, \ldots, b_{i3}$ — постоянные.

Применяя преобразование Лапласа

$$\int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = v(x, s) \quad (s = \xi + i\eta)$$

к уравнениям (1) — (3), получим

$$Dv = b(x) u_0(x), \tag{4}$$

$$R_1 v = 0. \tag{5}$$

Пусть $G(x, y, s)$ есть функция Грина для уравнений (4) — (5). Тогда решением последней задачи будет

$$v(x, s) = \int_l^m G(x, y, s) b(y) u_0(y) dy.$$

Доказывается теорема: Пусть $p''(x)$, $b'(x)$, $q(x)$ в $l \leqslant x \leqslant m$ непрерывны и ограниченной вариации при $p > 0$, $b > 0$; $u_0'''(x)$ непрерывна в $[l, m]$; тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \text{H.W.} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{st} \left[\int_l^m G(x, y, s) b(y) u_0(y) dy \right] ds$$

при подходящем $\xi_1 > 0$ является решением краевой задачи в том смысле, что

1) u, u_x, u_t, u_{xx} непрерывны при $l < x < m$, $0 < t < \infty$ и u удовлетворяет уравнению $\bar{D}u = 0$;

2) u, u_x непрерывны при $l < x < m$, $0 \leqslant t < \infty$, и имеет место начальное условие $\lim_{t \to 0} u(x, t) = u_0(x)$.

3) u, u_x непрерывны при $l \leqslant x \leqslant m$, $0 < t < \infty$;

4) если определить $u_t(l, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \lim_{x \to l} u(x, t)$, $u_t(m, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \lim_{x \to m} u(x, t)$, то $u_t(l, t)$, $u_t(m, t)$ при $t > 0$ непрерывны и имеют место граничные условия $\bar{R}_i u = 0$.

Решение задачи также может быть записано в виде

$$u(x,t) = \lim_{\beta \to \infty} \sum_{|s_\nu| < \beta} e^{s_\nu t} R_\nu(x, t),$$

где $e^{st} R_\nu(x, t)$ является вычетом выражения $e^{st} \int_l^m G(x, y, s) b(y) u_0(y) dy$ для полюса $s = s_\nu$ функции $G(x, y, s)$.

Доказательство этой теоремы основывается на полученной автором асимптотической формуле для функции Грина $G(x, y, s)$. П. И. Кузнецов

407. О некоторых задачах для дифференциальных уравнений составного типа. Каттабрига (Su alcuni problemi per equazioni differenziali di tipo composito. Cattabriga Lamberto), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, Parte 1, 1957, 27, 122—143 (итал.)

Для уравнения $\partial \Delta u / \partial x = 0$ ($\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) рассматривается следующая краевая задача в круге $K(x^2 + y^2 < 1)$. Искомая функция u задана на окружности $C(x^2 + y^2 = 1)$ и на диаметре $D(x = 0, |y| \leqslant 1)$. После представления $u(x, y) = v(x, y) + \nu(y)$ (функция v гармонична) получается система интегральных уравнений для $v(\cos\theta, \sin\theta)$ и $\nu(y)$, которая решается методом последовательных приближений. При этом применение результатов Келлога дает возможность доказать существование решения задачи в более широких условиях, чем полученные ранее в работах Адамара и Сьестранда: помимо естественных необходимых ограничений от граничных значений здесь требуется только выполнение условий Гёльдера в общих точках C и D. Единственность решения доказывается и без этого ограничения. Аналогично доказано существование решения уравнения $\partial^2 \Delta u / \partial x^2 = 0$, если u задана на C и D, а $\partial u/\partial x$ — на D (здесь применяется представление $u(x, y) = v(x, y) + \lambda(y) x + \nu(y)$ и уравнения $\partial \Delta \Delta u / \partial x = 0$, если u задана на C и D, а $\partial u/\partial n$ — на C (здесь $u(x, y) = w(x, y) + \nu(y)$, где функция w бигармонична). Единственность решения доказана только в том же классе функций, что и существование. А. Д. Мышкис

408. Свойства единственности в теории дифференциальных операторов эллиптического типа. Фридман (Uniqueness properties in the theory of differential operators of elliptic type. Friedman Avner), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 1, 61—67 (англ.)

Пусть дан эллиптический оператор

$$L = \sum_{l=0}^{s} \sum_{j_1 + \ldots + j_N = l} f_{j_1 \ldots j_N}(x) \frac{\partial^l}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_N^{j_N}}$$

в области $B \subset E^N$, причем все $f_{j_1 \ldots j_N} \in C^{(j_1 + \ldots + j_N)}$; пусть в B дана функция $u(x) \in C^s$, для которой $Lu(x) \leqslant 0$

$u(x) \geqslant 0$, причем существует такая точка $a \in B$, что u и все ее производные порядка $< s$ имеют в a нуль бесконечного порядка. Тогда $u \equiv 0$ в B. Доказательство основано на оценке интегралов вида $\int u(x) |\overline{ax}|^{-n-s} dx$. Указаны некоторые обобщения (в частности, оператор L может в точке a определенным образом вырождаться) и проблемы. Если априори не требовать эллиптичности, то для справедливости сформулированного свойства единственности условие

$$\sum_{i_1+\ldots+i_N=s} f_{i_1\ldots i_N}(a)\,\xi_1^{i_1}\cdots\xi_N^{i_N} \geqslant 0$$

является необходимым, а для операторов $\sum_{i_1+\ldots+i_N=s} f_{i_1\ldots i_n} \times \times \partial^s/\partial x_1^{i_1}\ldots dx_N^{i_N} + f(x)(f_{i\ldots i})^N$ постоянны, $f(x) \leqslant 0$) и условие эллиптичности является необходимым.

К цитированным работам, относящимся к данному вопросу, следует добавить работы Е. М. Ландиса (РЖМат, 1957, 1443, 2335 и 7888). А. Д. Мышкис

409. О задаче Коши для уравнения $\dfrac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \mu^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \lambda^2 u = f(x, y, z)$. **Василаке Серджиу**, Ж. чистой и прикл. матем. Акад. РНР, 1956, 1, №2, 61—71

Рассматривается задача Коши для уравнения, указанного в заглавии. Автор пользуется преобразованием Фурье по координатам и преобразованием Лапласа по t и находит в явном виде фундаментальное решение. Отмечено, что при $\lambda=0$ решение дано С. Л. Соболевым (РЖМат, 1955, 232). С. А. Гальперн

410. Системы линейных уравнений в частных производных с добавочным дифференциальным уравнением в одной точке. Фридман (Linear partial differential systems with an additional differential equation at one point. Friedman Avner), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 2, 173—190 (англ.)

Пусть в области $D \subset E^n$ дана вещественная система уравнений

$$L_\lambda u(x) \equiv \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{i=0}^{m} a_{i_1\ldots i_n}^{\lambda\mu}(x) \frac{\partial^i u_\mu(x)}{\partial x_1^{i_1}\ldots \partial x_n^{i_n}} = 0_{(\lambda=1,\ldots,N;\ x=(x_1,\ldots,x_n))} \qquad (1)$$

эллиптического типа, причем все $a_{i_1\ldots i_n}^{\lambda\mu} \in C^{i_1+\ldots+i_n}$. Утверждается, что для любой точки $x^0 \in D$ и для любых заданных значений $D^i u(x_0)$ $(i \leqslant m)$, удовлетворяющих необходимым условиям (1), в окрестности x_0 найдется по крайней мере одно решение системы. Для доказательства изучаются свойства фундаментальных решений по Джону (F. John), после чего оказывается возможным перейти к системам с постоянными коэффициентами. Далее доказано, что если все решения системы (1) (или неоднородной системы аналогичного вида) принадлежат некоторому классу функций, замкнутому относительно сложения и умножения, то в окрестности любой точки $x_0 \in D$ систему можно преобразовать с помощью невырожденной матрицы, после чего все коэффициенты (и правые части) станут принадлежать тому же классу функций. Аналогичные утверждения доказаны для параболических систем вида $L_\lambda u(x,t) - \partial u_\lambda/\partial t = 0$, причем здесь широко применяются результаты С. Д. Эйдельмана (РЖМат, 1956, 8844) о фундаментальных решениях таких систем.

А. Д. Мышкис

411. Диссипативные гиперболические системы. Филлипс (Dissipative hyperbolic systems. Phillips R. S.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 1, 109—173 (англ.)

Рассматриваются гиперболические системы с одним пространственным независимым переменным и коэффициентами, не зависящими от времени. Термин «диссипативные» означает, что граничные условия таковы, что энергия не поступает через границу.

Изучаемые системы имеют вид:

$$Ey_t = (Ay)_x + By, \quad -\infty \leqslant a < x < b \leqslant \infty,\ 0 < t, \qquad (1)$$

где $y = (\eta_1', \ldots, \eta_1^k)$ - k-мерная вектор-функция x и t E, A, B — $k \times k$-матрицы, зависящие от x, E — эрмитова, положительно определенная, A — эрмитова и постоянного ранга r, B удовлетворяет условию

$$B + B^* + A_x < \Theta, \qquad a < x < b. \qquad (2)$$

Элементы E и A абсолютно непрерывны на компактных подмножествах (a, b), а элементы E_x, A_x, B квадратично интегрируемы на них.

Интегралом энергии системы (1) называется $\frac{1}{2}\int_a^b (Ey, y)\,dx$. Так как по определению диссипативных систем энергия не возрастает, естественно рассматривать задачу в гильбертовом пространстве $H = L_2(a, b, E)$. Скалярное произведение $\langle y, z\rangle = \int_a^b (Ey, z)dx$ и $\|y\| = \left[\langle y, y\rangle\right]^{1/2}$.

Из (1) сразу следует

$$\langle y, y\rangle_t = [(Ay, y)^b - (Ay, y)^a] + \int_a^b ((B + B^* + A_x)y, y)\,dx.$$

Предполагается, что $(Ay, y)^b - (Ay, y)^a \leqslant 0$; граничные условия такого рода называются диссипативными.

Задача Коши для системы (1) формулируется в терминах полугрупп. Рассматривается оператор

$$Ly = E^{-1}[(Ay)_x + By]$$

с областью определения $\mathfrak{D}(L)$, определяемой диссипативными граничными условиями. Требуется, чтобы он порождал сильно непрерывную полугруппу ограниченных линейных операторов $S(t)$ такую, что

$$\lim_{t\to 0+} S(t)y_0 = y_0, \qquad y_0 \in H,$$

по норме для любого y^0. При этом

$$\frac{dS(t)y_0}{dt} = L[S(t)y_0], \quad y_0 \in \mathfrak{D}(L), \quad t > 0,$$

где производная берется в смысле топологии H.

Далее показывается, что для $y_0 \in \mathfrak{D}(L^2)$ решение $y(\cdot, t) = S(t)y_0$ удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле.

В отличие от большинства работ с применениями методов теории полугрупп, настоящая статья освещает случай сингулярных граничных условий.

В дальнейшем удобно ввести $D = E - (B + B^* + A_x)$ и обозначить через $L_2(a, b; D)$ класс измеримых вектор-функций $\int_a^b (Dy, y)\,dx < \infty$.

Вводится оператор $L_1 y = E^{-1}[(Ay)_x + By]$ с областью определения $\mathfrak{D}(L_1) = [y : y \in L_2(a, b; D)$, Ay абсолютно

непрерывно и $E^{-1}[(Ay)_x + By] \in L_2(a, b; E)$]. Задача нахождения оператора L формулируется автором так: найти всевозможные диссипативные сужения оператора L_1, которые порождают сильно непрерывную полугруппу операторов.

По теореме Хилла-Иосида замкнутый линейный оператор L с плотной областью определения порождает такую полугруппу тогда и только тогда, когда его резольвента $R(\lambda; L)$ удовлетворяет условию $\lambda \|R(\lambda; L)\| \leqslant 1$ для достаточно больших λ. Для проверки этого условия в § 3 строится явное представление для резольвенты из решений уравнений

$$\lambda - E^{-1}[(Ay)_x + By] = 0, \quad a < x < b,$$

и сопряженного с ним

$$\lambda z - E^{-1}[-(Az)_x + (B + A_x)z] = 0, \quad a < x < b.$$

В § 4 показано, что область определения диссипативного сужения L_1 может быть определена путем соответствующего выбора r линейно независимых пар решений последнего уравнения (обозначенных $[z_{a,i}, z_{b,i}]$) как

$$\mathfrak{D}(L) = [y : y \in \mathfrak{D}(L_1);\ (Ay, z_b, i)^b - (Ay, z_{a,i})^a = 0$$
для $i = 1, 2, \ldots, r]$.

Чтобы освободить определение $\mathfrak{D}(L)$ от зависимости от λ, автор рассматривает оператор M_1, двойственный L_1:

$$M_1 z = E^{-1}[-(Az)_x + (B^* + A_x)z].$$

$\mathfrak{D}(M_1) = [z, z \in L_2(a, b; D)]$; Az абсолютно непрерывна и $E^{-1}[-(Az)_x + (B^* + A_x)z] \in L_2(a, b; E)]$, который диссипативен, так как
$(B^* + A_x) + (B^* + A_x)^* + (-A_x) = B + B^* + A_x \leqslant 0$.
Следуя Кодаиру, рассматривается $\mathfrak{D}(L_1)$ по модулю $\mathfrak{D}(L_b) = [y : y \in \mathfrak{D}(L_1),\ (Ay, z)^b = 0$ для всех $z \in \mathfrak{D}(M_1)]$.

Это фактор-пространство $\mathfrak{D}(L_1)/\mathfrak{D}(L_b)$ конечномерно и произведение $(Ay_1\ y_2)$ зависит только от классов $Y_{b,1}$ и $Y_{b,2}$, содержащих соответственно y_1 и y_2. Таким образом можно определить $(AY_{b,1}, Y_{b,2})$. Аналогичные построения проводятся относительно M_1. Устанавливается, что размерность $\mathfrak{D}(L_1)/\mathfrak{D}(L_b)$ и $\mathfrak{D}(M_1)/\mathfrak{D}(M_b)$ одинакова и равна d_b. Пусть $U_{b,1}, \ldots, U_{b,d_b}$ и $V_{b,1}, \ldots, V_{b,d_b}$ — базисы этих пространств; тогда если

$$Y = \sum \gamma_i U_{b,i} \quad \text{и} \quad Z = \sum \delta_i V_{b,i}, \quad \text{то}$$

$$(AY_b, Y_b) = \sum \gamma_i \bar{\gamma}_j \mu_{ij},$$

$$(AY_b, Z_b) = \sum \gamma_i \bar{\delta}_i,$$

$$(AZ_b, Z_b) = \sum \delta_i \bar{\delta}_j \nu_{ij},$$

где $(\mu_{ij}) = (\nu_{ij})^{-1}$ — несингулярные эрмитовы матрицы с n_b отрицательными и p_b положительными собственными значениями. Аналогичные результаты имеют место для конца a. Наконец, вводится $\mathfrak{N}_{a,b}$-подпространство $\mathfrak{D}(L_1)/\mathfrak{D}(L_a) \times \mathfrak{D}(L_1)\mathfrak{D}/(L_b)$ размерности $p_a + n_b$ такое, что $-(AY_a, Y_a) + (AY_b, Y_b) \leqslant 0$ для всех $[Y_a, Y_b] \in \mathfrak{N}_{a,b}$; пусть $\mathfrak{P}_{a,b}$ есть $A_{a,b}$ — ортогональное дополнение $\mathfrak{N}_{a,b}$ в $\mathfrak{D}(M_1)/\mathfrak{D}(M_a) \times \mathfrak{D}(M)_1/\mathfrak{D}(M_b)$, т. е. $[\mathfrak{P}_{a,b} = [[Z_a, Z_b]; -(AY_a, Z_a) + (AY_b, Z_b) = 0$ для всех $[Y_a, Y_b] \in \mathfrak{N}_{a,b}]$.

Основная теорема § 7 и ответ на поставленную выше задачу таков: наиболее общие диссипативные сужения операторов L_1 и M_1, которые порождают полугруппы, имеют вид:

$$\mathfrak{D}(L) = [y;\ y \in \mathfrak{D}(L_1),\ [y, y] \in \mathfrak{N}_{a,b}],$$

$$\mathfrak{D}(M) = [z;\ z \in \mathfrak{D}(M_1);\ [z, z] \in \mathfrak{P}_{a,b}],$$

и обратно, такие L и M являются диссипативными производящими операторами.

M и L сопряжены друг другу. В § 8 изучаются консервативные системы; соответствующая полугруппа состоит из изометрических операторов. В этом же параграфе найдены необходимые и достаточные условия, которые необходимо наложить на систему, чтобы L был производящим оператором группы унитарных операторов. В последнем § 9 дается приложение теории возмущений полугрупп к изучаемым вопросам.

В целом работа представляет значительный интерес как приложение спектральной теории дифференциальных операторов к уравнениям с частными производными. А. Л. Крылов

412. Поправка. Докл. АН СССР, 1957, 113, № 3, 486
См. РЖМат, 1957, 5562.

413. Поправка. Бицадзе А. В., Успехи матем. наук, 1958, 13, № 2, 270
См. РЖМат, 1958, 5796.

414 К. Курс прикладной математики, т. 9. Дифференциальные уравнения с частными производными; их применение. (Оё сугаку кодза, Хэнбибунхотэйсики то соно оё). Инуи Тэцуро. Токио, Корона, 1957, 376 стр., 600 иен.) (японск.)

415 Д. Сингулярные решения волнового уравнения и теория двойных решений. Фер (Les solutions singulières des équations d'onde et la théorie de la double solution. Fer Francis.— Thèse ingr doct., Fac. sci. Univ. Paris, 1956, s. l., Bureau docum. minière, 1957, 147 p.) (франц.)

416 Д. Решение некоторых задач для уравнений смешанного типа. Девинталь Ю. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Пермск. ун-т, Пермь, 1958

417 Д. Распространение одного способа приведения к регулярным интегральным уравнениям граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на случай невыпуклых областей. Гавеля С. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовск. ун-т, Львов, 1958

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

418. Уравнения движения системы материальных точек переменной массы в обобщенных координатах. Сапа В. А., КазССР Гылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1957, вып. 6 (10), 60—81 (рез. каз.)

Рассматривается система материальных точек, одни из них сохраняют постоянную массу, другие меняют массу путем излучения, а остальные одновременно излучают и присоединяют массу.

Предполагая сначала наличие только голономных связей в системе и беря за исходные уравнения движения не уравнения Ньютона, а уравнения Мещерского, автор выводит обычным классическим путем уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Применение выведенных уравнений иллюстрируется на нескольких примерах. Затем добавляются линейные неголономные связи и тем же путем выводятся уравнения движения в форме Роуса (с неопределенными множителями) и в форме Аппеля. Соответствующие примеры отсутствуют.

В работе имеются некоторые недоговорки, неточности и опечатки. Так, например, в формуле (3) в одном члене имеется знак модуля, а в другом, аналогичном члене он отсутствует; в формуле (1, 14) есть опечатка; не ясны обозначения V_{r1} и V_{r2} на стр. 63, поскольку r есть число некоторых точек, а не индекс.

При выводе уравнений движения при наличии неголономных связей следовало бы оговорить то обстоятельство, что связи, наложенные на скорости основных точек системы, могут влиять и на скорости излучаемых этими точками частиц. В. В. Добронравов

419. Применение метода Гельмгольца к исследованию движения неголономных систем. Новоселов В. С., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 1, 80—87 (рез. англ.)

В данной работе, название которой не вполне соответствует ее содержанию, рассматриваются динамические уравнения движения, содержащие неопределенные множители и составляемые для механических систем с линейными неголономными связями, а также с такими нелинейными связями

$$F_\kappa(\dot{q}_i, q_i, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 5;\ \kappa = 1,2,\ldots,r;\ r<5),$$

при которых возможные перемещения системы удовлетворяют постулативным соотношениям Н. Г. Четаева, т. е. соотношениям вида $\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i = 0\ (k = 1,2,\ldots,r)$.

Показывается прямой способ нахождения неопределенных множителей Лагранжа, а следовательно, и обобщенных сил реакций связей в функциях обобщенных координат, скоростей и времени. Затем выполняется собственно обобщение результатов Гельмгольца, Майера и Суслова, т. е. выясняется, при каких условиях в рассматриваемом случае каждая обобщенная сила реакций связей может быть представлена в виде лагранжиана соответствующего индекса от некоторой функции $U(q_i, \dot{q}_i, t)$ и, следовательно, система допускает существование обобщенного потенциала Гельмгольца. Приводится в работе и разработанный алгорифм для нахождения подобной функции U.

Более конкретно полученные результаты применяются к системам с линейными неголономными связями, причем первоначальная кинетическая энергия системы предполагается выраженной в нормальных координатах; при этом разбираются два простейших примера подобных систем со связями формально математического характера. В. В. Добронравов

420. Расчет уравнительных резервуаров путем приближенного решения дифференциальных уравнений. Кастрильон (Breves consideraciones sobre las chimeneas de equilibrio y método aproximado de solución de las ecuaciones diferenciales resultantes. Castrillon Ricardo R.), Ingenieria civil (México), 1955, 6, № 65, 612—625 (исп.)

Рассматриваются колебания горизонта в цилиндрическом уравнительном резервуаре при мгновенном полном закрытии задвижки. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p^2x + \alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0 \qquad (1)$$

(α и p^2 малы) при начальных условиях $x = -a$, $\frac{dx}{dt} = u_0$ при $t=0$. Предлагаются два приближенных способа решения уравнения (1). Заметим, что уравнение (1) подстановкой

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

приводится к уравнению, которое интегрируется в квадратурах. Г. В. Аронович

421. Асимптотические решения задач на изгибание тороидальных оболочек. Кларк (Asymptotic solutions of toroidal shell problems. Clark R. A.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 1, 47—60 (англ.)

Рассматриваются задачи на изгибание тонкой упругой оболочки, имеющей форму поверхности вращения. Требуется найти распределения напряжений, обладающие цилиндрической симметрией. Пусть r,Θ,z — цилиндрические координаты; $r=r(\xi)$, $z=z(\xi)$ — уравнения меридиана средней поверхности оболочки; ξ — параметр; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; h — толщина стенки; p_H и p_V — радиальная и аксиальная компоненты поверхностной силы давления, отнесенной к единице поверхности; V, Q, N_ξ и N_Θ — аксиальное, скалывающее и нормальные напряжения; M_ξ и M_Θ — крутящие моменты соответствующих пар напряжений; u,v и w — компоненты смещения точки средней поверхности оболочки по направлениям координат r,Θ,z; β — угол, на который при деформации поворачивается касательная к меридиану. Положим: $C=Eh$, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $\alpha=\sqrt{r'^2+z'^2}$, где штрих обозначает дифференцирование по ξ. Тогда $v=\kappa r\Theta$, где k — постоянная; остальные величины не зависят от Θ.
При этом

$$u=\frac{r}{C}\left(N_\Theta - \nu N_\xi\right);\quad w=-\int\left[r'\beta-\frac{z'}{C}\left(N_\xi-\nu N_\Theta\right)\right]d\xi;$$

$$rV=-\int r\alpha p_v d\xi.$$

Далее вводятся функции $X(\xi)$ и $Y(\xi)$, определяемые уравнениями:

$$\beta=\left(\frac{\alpha}{rD}\right)^{\frac{1}{2}}X;\qquad rN_\xi = r'\left(\frac{C}{r\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}Y+\frac{z'}{\alpha}\left(rV\right),$$

$$\text{причем}\quad rQ=-z'\left(\frac{C}{r\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}Y+\frac{r'}{\alpha}\left(rV\right),$$

$$\alpha N_\Theta=\left(\frac{\alpha C}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[Y'-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)'}{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)}Y\right]+r\alpha p_H,$$

$$\alpha M_\xi=\left(\frac{\alpha D}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{X'+\left[\nu\frac{r'}{r}-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)'}{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)}\right]X\right\},$$

$$\alpha M_\Theta=\left(\frac{\alpha D}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\nu X'+\left[\frac{r'}{r}-\frac{\nu}{2}\frac{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)'}{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)}\right]X\right\}.$$

Положим

$$\theta_1=\left(\frac{r'}{r}\right)^2-\nu\frac{\left(\frac{r'D}{\alpha}\right)'}{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)}+\frac{1}{4}\left[\frac{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)'}{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)'}{\left(\frac{rD}{\alpha}\right)}\right]',$$

$$\theta_2=\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\nu\frac{\left(\frac{r'}{\alpha C}\right)'}{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)}+\frac{1}{4}\left[\frac{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)'}{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)}\right]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)'}{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)}\right]',$$

$$\mu\Phi=[12(1-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}\frac{\alpha z'}{rh};\quad F=r'\left(\frac{\alpha}{rD}\right)^{\frac{1}{2}}(rV);$$

$$G=r'\left(\frac{\alpha C}{r}\right)^{\frac{1}{2}}k+\left(\frac{r}{\alpha C}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left[\frac{r'z'}{r^2}+\nu\frac{\left(\frac{z'}{\alpha C}\right)}{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)}\right](rV)+\right.$$

$$\left.+\nu\frac{z'}{r}(rV)'-\left[\frac{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)'}{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)}+\nu\frac{r'}{r}\right](r\alpha p_H)-(r\alpha p_H)'\right\}.$$

Функции $X(\xi)$ и $Y(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений $X''-\theta_1X+\mu\Phi Y=F$; $Y''-\theta_2Y+\mu\Phi X=G$. (А)
При большом μ можно пренебречь членами, содержащими θ_1 и θ_2. Положив $Z=X+iY$, $f=F+iG$, находим $Z''-i\mu\Phi Z=f$. (Б)
В окрестности $\xi=0$ уравнение (Б) можно аппроксимировать уравнением

$$Z''-i\mu\xi Z=f(0). \qquad (В)$$

Положив $Z=f(0)\mu^{-\frac{2}{3}}T(\mu^{\frac{1}{3}}\xi)$, находим

$$T''(x)-ixT(x)=1. \qquad (1)$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее при $x\gg1$ асимптотической формуле $T(x)\sim\frac{i}{x}$, имеет вид

$$T(x)=-\int_0^\infty e^{-ixt-\frac{t^3}{3}}dt=T_r(x)+iT_i(x),\quad T_r(0)=-1{,}288;$$

$T_i(0)=0$; $T_r'(0)=0$; $T_i'(0)=0{,}939$; $\max T_r'(x)=T_r'(1{,}225)=$
$=0{,}753$; $T_r(1{,}225)=-0{,}692$; $T_i(1{,}225)=0{,}753$; $T_i'(1{,}225)=$

$$=0{,}214;\ T_r(x)=-\int_0^\infty\cos(xt)\,e^{-\frac{t^3}{3}}dt;\quad T_i(x)=$$

$$=\int_0^\infty\sin(xt)\,e^{-\frac{t^3}{3}}dt.$$

В качестве первого приближенного решения уравнения (Б) берется функция $Z_1(\xi)=\mu^{-\frac{2}{3}}f(\xi)T(\mu^{\frac{1}{3}}\Phi)$.

Далее рассматривают следующие приближения $Z_2(\xi)$ и $Z_3(\xi)$. Предыдущая общая теория применяется к частному случаю $k=0$, $p_H=0$, $rV=\frac{P}{2\pi}=\text{const}$;

$$F=r'\left(\frac{\alpha}{rD}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{P}{2\pi},$$

$$G=\left[\frac{r'z'}{r^2}+\nu\frac{\left(\frac{z'}{\alpha C}\right)}{\left(\frac{r}{\alpha C}\right)}\right]\left(\frac{r}{\alpha C}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{P}{2\pi}.$$

Ю. Л. Рабинович

422. Решение уравнений для движения электрона в однородном магнитном поле. Марек (Řešení rovnic pro pohyb elektronu v homogenním časově proměnném magnetickém poli. Marek Ivo), Apl. mat., 1957, 2, № 1, 69—73 (чешск.; рез. русск., англ.)

Решается система уравнений для движения электрона в однородном магнитном поле, линейно зависящем от времени. Вводя новые зависимые переменные, автор преобразует эту систему к одному уравнению типа Бесселя и находит его решение. Показано, что кинетическая энергия электрона монотонно возрастает. J. Vlach

423. К вопросу об устойчивости самолета на конечном интервале времени. Хаккер (O problemă de stabilitate a avionului pe un interval finit de timp. Hacker Tiberiu), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 12, 1345—1349 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt}=Ax+z+X(x,y,z),\qquad \frac{dy}{dt}=z,$$
$$\frac{dz}{dt}=Bx+Cz+Z(x,y,z),$$

которая встречается в вопросах устойчивости самолета. Методом вариации постоянных система сводится к интегральным уравнениям, и при помощи обычных оценок показывается, каким образом можно получить условия устойчивости на конечном интервале времени для $x(t)$ и $z(t)$, представляющих собой возмущения угла атаки и угловой скорости тангажа. A. Halanay

424. Оптимальное программирование направления силы тяги ракеты. Лоден (Optimal programming of rocket thrust direction. Lawden D. F.), Astronaut. acta, 1955, 1, №, 41—56 (англ.; рез. нем., франц.)

Решается задача оптимального управления силой тяги ракеты на заданном интервале времени с тем, чтобы при некоторых заданных ограничениях достигнуть максимальной возможной общей энергии ракеты. Рассматривается общий случай движения ракеты в гравитационном поле при учете сил сопротивления атмосферы. Задача приводится к исследованию системы уравнений $\ddot{x}_i+F_i+\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}=f(t)l_i$ $(i=1,2,3)$, (1)
где $\Phi(t,x_1,x_2,x_3)$ — потенциальная функция поля, $F_i=F_i(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3,l_1,l_2,l_3,M,t)$ — компоненты силы сопротивления, $M=M(t)$ — масса ракеты, $f(t)$ — величина ускорения, вызываемого силой тяги ракеты, l_i — направляющие косинусы силы тяги. При известных функциях Φ, F_i и $f(t)$ требуется определить $l_i=l_i(t)$ таким образом, чтобы получить максимальную величину энергии E ракеты на единицу ее массы при заданном значении $t=T$.

Приравнивая нулю вариацию энергии E, автор получает уравнения для определения функций $l_i(t)$. В общем случае уравнения можно решать лишь численным путем, причем необходимо подбирать начальные условия интегрирования.

Приводятся частные решения проблемы в случаях однородного поля при отсутствии сил сопротивления и в случае выхода с круговой орбиты. В этом последнем случае результаты вычислений показывают, что при оптимальном управлении направление силы тяги долж-

но быть смещено относительно траектории на некоторый угол в направлении поля тяготения. Этот угол в процессе движения должен убывать, делаясь в конце управления равным нулю.

Хорошее приближение к оптимальному программированию направления силы тяги получается при касательном к траектории ракеты направлении и этой силы во все время управления. Весьма близкое приближение к оптимальному управлению достигается, если принять, что угол смещения убывает, как линейная функция времени. Здесь, впрочем, возникает дополнительная трудность подбора начального значения угла смещения ε_0. Поддержание направления тяги перпендикулярно радиусу-вектору при выходе с круговой орбиты не является экономичным в смысле рассматриваемой в статье задачи оптимального управления. Н. Н. Красовский

425. Построение переходных процессов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными и переменными коэффициентами. Погосов А. А., Вестник электропром., 1957, № 8, 23—32

Рассматривается построение переходных процессов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными и переменными коэффициентами.

Рассматриваемый метод ближе к графоаналитическому методу построения переходных процессов Д. А. Башкирова (Тр. Ленингр. воен.-возд. инж. Акад., 1952)

Г. М. Уланов

426. О расчете установившихся процессов в нелинейных системах. Каляев А. В., Тр. Таганрогск. радиотехн. ин-та, 1957, **3**, № 2, 139—143

427. Определение оптимального процесса в линейных системах (Системы с нулевой скоростной ошибкой и нулевой ошибкой по ускорению). Бабистер (Determination of the optimum response of linear systems (Zerovelocity-error and zero-acceleration-error systems) Babister A. W.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 1, 119—128 (англ.)

Пусть $\varepsilon(t)$ — динамическая ошибка линейной системы, т. е. отклонение решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами от предельного (установившегося) значения этого решения при $t\to\infty$. Это установившееся значение предполагается конечным, т. е. система — устойчивой.

Описывается метод, позволяющий выразить через коэффициенты дифференциальных уравнений интегралы

$$L=\int_0^\infty e^2dt \text{ и } L_1=\int_0^\infty\left(\frac{de}{dt}\right)^2dt$$

при линейной правой части уравнения. Новых результатов работа не содержит. М. А. Айзерман

428. Течения с обменом массы, импульса и энергии. Литвинишин (Flows with the exchange of mass, momentum and energy. Litwiniszyn Jerzy), Arch. mech. stosowanej, 1957, **9**, № 6, 669—683 (англ.; рез. русск., польск.)

Выводятся уравнения одномерного нестационарного течения идеального газа, если в области, занятой течением, имеются источники массы, импульса и энергии. Изучается характер полученной системы уравнений, устанавливается ее гиперболичность. Обсуждаются случаи непрерывного распределения источников и случай точечных источников конечной мощности. Рассмотрены некоторые примеры. Б. Л. Рождественский

429. Точное решение нелинейной задачи о взрыве в газе при переменной начальной плотности. Коробейников В. П., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 6, 947—948

Приводится точное решение задачи о взрыве в идеальном газе, имеющем постоянное начальное давление и переменную начальную плотность.

Задача определения одномерных адиабатических движений газа за ударной волной сводится к отысканию решения системы

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{(\nu-1)v}{r}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)+v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0$$

с соответствующими начальными условиями, условием в центре взрыва $v(0,t)$ и условиями на фронте ударной волны.

Предполагается, что начальная плотность ρ_1 зависит от линейной координаты r следующим образом:

$$\rho_1(r)=\frac{a}{b\left(\frac{r}{r_0}\right)^\omega\left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^\nu+c\right]^\beta},$$

где a, b, c, ν, ω, β —некоторые связанные между собой постоянные.

Решение задачи получено для случаев плоской, цилиндрической и сферической симметрии.

Б. Л. Рождественский

430. Об уравнениях вихревого движения политропного газа. Аржаных И. С., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 29—34

Рассмотрены плоское и пространственное стационарные вихревые течения газа с уравнением состояния $p=K\rho^n$ (K, n — постоянные, $n\neq1$).

В плоском случае уравнения течения записываются в «каноническом» виде:

$$\frac{\partial y}{\partial\tau}=\frac{\partial H}{\partial x},\quad\frac{dx}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad\frac{dy}{d\sigma}=\frac{\partial\psi}{\partial x},\quad\frac{dx}{d\sigma}=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\tag{1}$$

$$\text{где } H=\frac{1}{2}(u^2+v^2)=\frac{n}{n-1}\frac{p}{\rho}-U,$$

u и v—составляющие скорости, U — потенциал внешних массовых сил, ψ — функция тока, $d\tau=\frac{dt}{\omega}$,

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\neq0,\quad d\sigma=\frac{dt}{\rho}.$$

Для совпадения траекторий, определяемых первой и второй парами уравнений (1), положено $H=\lambda\psi$ ($\lambda=$ const). Тогда $\omega=\lambda\rho$ и система (1) приводится к уравнению второго порядка для ψ. Если ψ найдено, ρ, H и ω определяются алгебраически. В качестве примера рассмотрено центрально-симметричное плоское течение газа с $n=-1$. Найдены первый член разложения H по степеням λ^2 и соответствующие ω и v.

В трехмерном случае уравнения течения имеют вид:

$$[\operatorname{rot}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}]=-\operatorname{grad}H,\quad\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=0.\tag{2}$$

Если $\boldsymbol{\omega}=\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\lambda(x,y,z)\boldsymbol{v}$, первое из уравнений (2) допускает интеграл (интеграл Громеко-Прандтля), и система (2) может быть приведена к дифференциальному уравнению первого порядка для $\boldsymbol{\omega}$. Для общего случая, когда вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ не коллинеарен вектору скорости, получена замкнутая система относительно $\boldsymbol{\omega}$, ρ, H, $\xi=(\operatorname{rot}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$, определяющая течение.

В статье имеются опечатки. На странице 30 выражение для ω (7-я формула сверху) следует читать так:

$\omega = (\text{grad}\frac{1}{\rho}, \text{grad}\,\psi) + \frac{1}{\rho}\Delta\psi$. На стр. 32 (2-я формула сверху) выражение для H следует читать так:

$$H = \frac{1}{2\omega^2}\left(\dot{H}^2 - Kn\,\lambda^2\right).$$

Н. Н. Кузнецов

431. Импульсивные вращения. Георгице (Rotatii impulsive. Gheorghiță St. I.), Comun. Acad. RPR, 1956, 6, № 4, 515—520 (рум.; рез. русск., франц.)

См. РЖМех, 1957, 11540.

432. Граничная задача для уравнения в частных производных четвертого порядка в теории движения вязкой жидкости. Вольская-Бохенек (Problème aux limites pour l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre dans la théorie du mouvement d'un liquide visqueux. Wolska-Bochenek J.), Ann. polon. math., 1957, 4, № 1, 93—109 (франц.)

Рассматривается граничная задача для уравнения функции тока двумерного стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости, имеющего вид

$$\nu\Delta\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} + \varphi(x, y),$$

где $\varphi = \text{rot}_z F$, F — массовая сила. Движение происходит во внутренней многосвязной области D, ограниченной контуром $C(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ На C функция ψ и ее нормальная производная равны нулю. Предполагается, что φ непрерывна и ограничена в $D+C$, удовлетворяет условию Гёльдера в D, а координаты кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n$ имеют вторые производные по дуге, удовлетворяющие условию Гёльдера. Применением функции Грина G бигармонического уравнения задача сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$\psi(x, y) = \frac{1}{8\pi\nu}\int_D\int\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\xi} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\eta} + \varphi\right)G(x, y, \xi, \eta)\,d\xi d\eta.$$

Последнее уравнение приводится к системе интегральных уравнений для $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}, \frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}$, которая решается методом последовательных приближений Выводится достаточное условие сходимости, зависящее от действующей силы, от коэффициента вязкости и от области движения. Д. Е. Долидзе

433. Об изменении кинетической энергии и внутренней энергии потока вязкой сжимаемой жидкости в двумерной области. Кшивоблоцкий (On the variation of kinetic energy and internal energy of a viscous compressible fluid flow in a twodimensional domain. Krzywoblocki M. Z. v.), Делтион тис эллиникис математикус этериас, Bull. Soc. Math. Grece, 1954, 28, № 1-3, 37—50 (англ.)

Исследуются изменения с течением времени кинетической энергии, плотности и внутренней энергии потока вязкой сжимаемой жидкости в области, ограниченной конечной постоянной границей C. Контур C состоит из конечного числа регулярных кривых, имеющих непрерывную касательную. Гидродинамические величины считаются аналитическими функциями координат x, y $(-\infty < x, y < +\infty)$ и времени t $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$. Вводится обобщенная функция тока $\psi(x, y, t)$ по формулам

$$\rho u = \overline{\varphi}_y,\ \rho v = -\varphi_x,\ \varphi = \psi + \frac{1}{2}F,\ \overline{\varphi} = \psi - \frac{1}{2}F,$$

$F = \iint \rho_t\,dx\,dy$, где u, v — компоненты скорости, ρ — плотность. Для функции ψ получено линейное уравнение второго порядка в частных производных:

$$\Delta_2\psi + \rho\,\Delta\left(\psi, \frac{1}{\rho}\right) = -2\rho z - \frac{1}{2}\rho\,\Delta_4\left(\frac{1}{\rho}, F\right),$$

где $z = \frac{1}{2}\left(v_x - u_y\right)$, Δ_2 — оператор Лапласа, а символы Δ и Δ_4 означают операторы

$$\Delta(f, g) = f_x g_x + f_y g_y;\quad \Delta_4(f, g) = (f\cdot g_x)_x - (f\cdot g_y)_y.$$

Решение этого уравнения при однородном условии на границе записывается с помощью соответствующей функции Грина. Кинетическая энергия выражается через ψ.

Используя уравнение Навье-Стокса при переменной вязкости, уравнение неразрывности, уравнение состояния и уравнение энергии, автор получает оценки изменения кинетической энергии, плотности и внутренней энергии, которые в случае несжимаемой жидкости совпадают с результатами, полученными ранее другими авторами. Д. Е. Долидзе

434. Поправки. Долидзе Д. Е., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 5, 934

См. РЖМат, 1958, 8900.

435. О телах, для которых критическое число Маха достигает экстремальных значений. 1. Гилбарг, Шиффман (On bodies achieving extreme values of the critical Mach number, I. Gilbarg D., Shiffman M.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 2, 209—230 (англ.)

Решаются две вариационные задачи теории обтекания симметричных профилей плоским безвихревым дозвуковым потоком газа:

1. Среди всех профилей с заданной относительной толщиной найти такой, для которого критическое число Маха имеет наибольшее значение.

2. Среди всех профилей с заданной толщиной и заданной максимальной кривизной найти такой, для которого критическое число Маха имеет наименьшее значение (критическим числом Маха авторы называют число Маха набегающего потока, при котором хотя бы в одной точке профиля достигается скорость звука, а самый поток в этом случае называют критическим).

При этом доказываются и используются следующие результаты теории плоских, безвихревых, дозвуковых течений газа:

а) Если поток, обтекающий замкнутый профиль, однороден, имеет дозвуковую скорость на бесконечности и нигде не является сверхзвуковым, то максимальная скорость течения (которая может быть и звуковой) достигается лишь в точках профиля;

б) (Теорема сравнения). Пусть B и $\overline{B}$ — симметричные профили, такие что $B \in \overline{B}$, причем они имеют общую регулярную точку касания P. Если два симметричных дозвуковых потока, критических или докритических, обтекающих B и $\overline{B}$, имеют скорости набегающего потока q_0 и $\overline{q}_0$ при $q_0 \geqslant \overline{q}_0$, то в точке P соответствующие скорости потока удовлетворяют неравенству $\overline{q}(P) \geqslant q(P)$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда оба течения совпадают. В частности, лишь при последнем условии $q(P)$ может равняться скорости звука.

Аналогичные результаты имеют место и для осесимметричных потоков. И. Л. Кароль

436. Управление перемещением контура нефтеносности с учетом фазовой проницаемости в зоне замещения. Коротков С. Ф. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ-матем. и техн. н., 1957, вып. 11, 63—78

Рассмотрена задача управления перемещением контура нефтеносности с учетом различия вязкостей и пониженной фазовой проницаемости для воды в зоне вытеснения нефти водой, причем эта проницаемость в § 1 принимается постоянной. Задача построения давления с помощью методов теории потенциала сведена к интегральным уравнениям. Дебиты скважин определяются из условия наилучшего в смысле принятой нормы удовлетворения заданного закона движения.

В § 2 та же задача исследована для случая, когда проницаемость для воды в зоне замещения зависит определенным образом от координат. Специальным преобразованием автор приводит уравнение для давления в зоне вытеснения к уравнению Лапласа; что позволяет далее воспользоваться результатами § 1.

Рассмотрен численный пример: стягивание контура нефтеносности, имеющего форму окружости, к одной батарее эксплуатационных скважин при наличии одной нагнетательной батареи. Дается сравнение с результатами решения задачи управления в системах одножидкостной и двухжидкостной без учета снижения проницаемости в зоне вытеснения. Библ. 15 назв.

В. Л. Данилов

437. О некоторых случаях фильтрации из осесимметричных водоемов. Пахарева Н. А. (Про деякі випадки фільтрації з осесиметричних водойм. Пахарєва Н. О.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1954, **13**, № 8, 115—120 (укр.; рез. русск.)

В случае фильтрации из осесимметричных водоемов вместо вектора скорости вводится искаженный вектор скорости, который в отличие от первого удовлетворяет такой системе дифференциальных уравнений, для которой имеет место теорема о сохранении области (Положий Г. Н., Докл. АН СССР, 1947, 58, № 7). На основе этого делаются качественные выводы о поведении и форме депрессионных кривых при осесимметричной фильтрации без подпора, даются оценки расхода жидкости сверху и снизу. Приведенные числовые примеры показывают, что среднее арифметическое указанных оценок мало отличается от точного значения расхода жидкости.

Г. Н. Положий

438. Задача фильтрации с подвижной границей, или «задача о сигарете». Кламкин (A moving boundary filtration problem of «the cigarette problem». Klamkin M. S.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 710—715 (англ.)

Рассмотрена фильтрация через горящую сигарету как в случае непрерывного вдыхания, так и при прерывистом вдыхании (второй случай ближе к реальным условиям курения). Предполагается, что сгорает постоянная часть любой компоненты табака $(1-a)$, часть a передается и фильтруется по сигарете. Автор получает дифференциальное уравнение относительно концентрации любой компоненты:

$$\frac{\partial C(x, L)}{\partial x} + \frac{\partial C(x, L)}{\partial L} = -abC(0, L)e^{-bx} \qquad (1)$$

при начальном условии $C(x, L_0)=C_0=\text{const}$, где C — концентрация компоненты Z в единицах веса на единицу длины, x — расстояние до горящего конца, L — текущая длина сигареты, L_0 — начальная длина сигареты, b — постоянная диффузия. Решение уравнения (1) имеет вид

$$C(x, L) = C_0 + \frac{C_0 a e^{-bx}}{1-a}\left[1 - e^{-b(1-a)(L_0 - L)}\right].$$

Далее определяется количество никотина, вдыхаемое курящим, и проводится сравнение эффективности сигарет различной длины как при непрерывном, так и при прерывистом вдыхании.

В. Л. Данилов

439. Колебания прямолинейных труб с движущейся жидкостью. Пальмов В. А., Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-та, 1957, № 12, 103—107

Для уравнения поперечных колебаний прямолинейной трубы, по которой течет жидкость, вычислены в двух практически важных случаях фундаментальные системы частных решений обыкновенного дифференциального уравнения, получающегося из исходного преобразованием Лапласа по времени. Это вносит известное упрощение в решение граничных задач и определение спектров частот собственных колебаний.

Н. А. Ростовцев

440. Устойчивость тонкостенной трубы под действием продольной периодической силы с учетом затухания. Наумов К. А., Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. II, 56—61

Вопрос сведен к исследованию уравнения в частных производных

$$D\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P_0 \cos\Theta t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{E\delta}{r^2} y + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k\frac{\partial y}{\partial t} = 0, \qquad (1)$$

где Θ — частота внешней периодической силы, D, P_0, E, δ, r, m, k — постоянные, с однородными условиями при $x=0$ и $x=l$.

Решение уравнения (1) ищется в виде $y=T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$. Полученное для T_n уравнение легко сводится к уравнению Матье, причем зоны неустойчивости уравнения Матье являются зонами, в которых цилиндрическая труба теряет устойчивость.

В. М. Бабич

441. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с прямолинейной границей раздела краевых условий. Уфлянд Я. С., Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-та, 1957, № 12, 22—27

Исследуется пространственная статическая задача теории упругости для полупространства ($y>0$), на части границы которого ($x>0$) заданы перемещения, а на остальной части ($x<0$) — напряжения.

С помощью функций Папковича — Нейбера задача сводится к ряду смешанных краевых задач теории потенциала для полупространства. Точное решение этих задач получено путем применения преобразования Фурье, а также интегрального преобразования по цилиндрическим функциям мнимого значка и аргумента, впервые введенного в 1938 г. М. И. Конторовичем и референтом.

В качестве примера рассмотрено действие нормальной сосредоточенной силы на упругое полупространство, частично скрепленное с жестким неподвижным телом.

Н. Н. Лебедев

442. Об одном классе решений динамических уравнений теории упругости. Бондаренко Б. А., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 41—49

В работе представляется в новой форме один класс решений динамических уравнений теории упругости, найденный И. С. Аржаных (РЖМат, 1956, 2264).

В. М. Бабич

443. Смещения, создаваемые в упругом полупространстве импульсивным крутящим моментом, приложенным к закрепленному жесткому диску. Митра (Disturbance produced in an elastic half-space by an impulsive twisting moment applied to an attached rigid circular disc. Mitra M.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, 38, № 1-2, 40—43 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Находится распределение тангенциальных перемещений (u_θ) в упругом полупространстве при действии импульсивного крутящего момента $M\delta(t)$, передаваемого через жесткий штамп (радиальные и осевые перемещения равны нулю). Рассматриваются случаи изотропной и трансверсально анизотропной среды.

Задача сводится к отысканию решения дифференциального уравнения движения

$$\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}\right)+c_{44}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

при задании напряжений на плоскости, ограничивающей полупространство, в форме

$$\tau_{z\theta}=\begin{cases}\dfrac{3Mr\,\delta(t)}{4\pi r_0^3\sqrt{r_0^2-r^2}}, & r<r_0,\\ 0, & r\geqslant r_0,\end{cases}\qquad \tau_{zr}=\sigma_z=0.$$

Здесь r_0 — радиус основания штампа, c_{ik} — упругие характеристики материала.

Задача решается с помощью интегральных преобразований Лапласа и Бесселя.

Перемещения представляются в конечном виде через эллиптические интегралы. К. В. Соляник-Красса

444. Автомодельные задачи динамического изгиба пластин. Демьянов Ю. А., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 4, 669—670

Для уравнения изгиба пластины

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

где w — смещение, перпендикулярное начальному положению, M_1, M_{12}, M_2 — изгибающие моменты, являющиеся в общем случае некоторыми функциями кривизны $\varkappa_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\varkappa_{12}=\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$, $\varkappa_2=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, рассматривается класс автомодельных решений $w=t\,\Phi_0(\xi,\eta)$, зависящий от двух переменных $\xi=x/\sqrt{t}$; $\eta=y/\sqrt{t}$.

Если изгибающие моменты являются функциями только кривизн $\varkappa_1=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ и $\varkappa_2=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, то в случае радиальной симметрии уравнение динамического изгиба сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для функции Φ_0' (так как $\varkappa_1=\Phi_0''$ и $\varkappa_2=\Phi_0'/\xi$)

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{dM_1}{d\xi}\right)+\frac{d}{d\xi}(M_1-M_2)+\frac{\mu\xi^2}{4}(\Phi_0'-\xi\Phi_0'')=0.$$

Здесь $\xi=r/\sqrt{t}$. Указываются случаи интегрируемости этого уравнения для упругих и упруго-пластических деформаций. А. Н. Тюманок

445. К задаче о деформации гибкой прямоугольной пластины. Слезингер (До задачі про деформацію гнучкої прямокутної пластини. Слезінгер І. Н.), Прикл. механіка, 1957, 3, № 4, 460—466 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается система уравнений Кармана

$$\Delta^2 F=E(w_{xy}^2-w_{xx}w_{yy}),$$

$$D\Delta^2 w=h(F_{xx}w_{yy}+F_{yy}w_{xx}-2F_{xy}w_{xy})+q,$$

где F — функция напряжений, w — прогиб пластины, E — модуль Юнга, D — цилиндрическая жесткость, h — толщина пластины, q — плотность внешней нагрузки.

Для случая свободно опертой по всему контуру прямоугольной пластины предлагается прием эффективного приближенного решения, основанный на предварительном выделении из функции прогиба $w(x, y)$ известного решения для случая свободно опертой жесткой прямоугольной пластины.

Показано, что предложенный прием уже в первом приближении дает хорошие результаты в случае равномерно распределенной внешней нагрузки. Рассмотрено также действие силы, сосредоточенной в центре пластины. Расчеты в обоих случаях производились для квадратной пластины. Я. С. Уфлянд

446. Упруго-пластическое кручение сектора кругового кольца. Фрейбергер (Elastic-plastic torsion of circular ring sectors. Freiberger W.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 3, 259—265 (англ.)

См. РЖМех, 1957, 13147.

447. Поперечный изгиб плиты, опертой на несколько точек. Бассали (The transverse flexure of thin elastic plates supported at several points. Bassali W. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 3, 728—754 (англ.)

448. Задачи изгиба изотропных тонких пластинок, подверженных действию различным образом распределенных нормальных нагрузок. Бассали (Problems concerning the bending of isotropic thin elastic plates subject to various distributions of normal pressures. Bassali W. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 2, 265—287 (англ.)

В обычных ограничениях теории слабого изгиба пластинок, методом комплексного переменного получено точное решение задачи о поперечном изгибе тонкой круглой пластинки со свободным краем, опертой в нескольких внутренних или граничных точках и нагруженной произвольным образом по площади эксцентрично расположенного круга, не имеющего общих точек с краем пластинки. Особо исследуется случай плоской эпюры давлений, из которого предельным переходом получается случай, когда пластинка подвергается действию сосредоточенных сил и моментов. Тем же методом с применением конформного отображения выводятся формулы решения для полубесконечной пластинки с прямолинейным свободным краем при тех же условиях относительно опор и нагрузок. Н. А. Ростовцев

449. Поперечный изгиб бесконечной и полубесконечной тонкой упругой пластинки. III. Бассали, Нассиф (Transverse bending of infinite and semi-infinite thin elastic plates. III. Bassali W. A., Nassif M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 2, 288—299 (англ.)

В рамках теории слабого изгиба пластинок метод комплексного переменного применяется для получения точных формул прогибов бесконечной тонкой изотропной пластинки, которая: 1) на бесконечности свободна от напряжений; 2) упруго закреплена по некоторой окружности, вдоль которой выполняется условие $c\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+c_1\frac{\partial w}{\partial r}=0$ (c, c_1 — постоянные числа), включающее и тот частный случай, когда пластинка зажата на краю; 3) подвержена действию поперечной нагрузки, распределенной произвольным образом по площади круга, не имеющего общих точек с границей пластинки.

Из найденных формул предельным переходом выводятся формулы для случая полубесконечной пластинки, зажатой по прямолинейному краю и подверженной действию вышеописанной нагрузки. Н. А. Ростовцев

450. Расчет пластин, закрепленных ребрами жесткости методом конечных разностей. Дмитренко (Розрахунок пластин, підкріплених ребрами жорсткості методом скінченних різниць. Дмитренко Л. С.), Наук. щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956, Київ, 1957, 561—562 (укр.)

451. О некоторых задачах теории пластичности. Кошелев А. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 19, 20—29 (рез. англ.)

Исследуется уравнение упруго-пластического кручения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[f(T^2)\frac{\partial u}{\partial y}\right]+a=0 \qquad (1)$$

с однородным краевым условием $u|_\Gamma=0$. Здесь a—угол закручивания на единицу длины, $T^2=(\mathrm{grad}u)^2$ и f—функция, характеризующая упрочнение материала. Рассматривается обобщенное решение задачи $u\in W_p^{(2)}$ $(p>2)$, удовлетворяющее почти всюду в области поперечного сечения стержня уравнению (1) и обращающееся в нуль на границе.

Функция f представляется в виде $f=(2G)^{-1}+\mu\varphi$, где G — модуль сдвига материала. Рассматривается метод упругих решений, по которому n-е приближение определяется как решение следующей задачи:

$$\frac{1}{2G}\Delta u_n+a=-\mu\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(T_{n-1}^2\right)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi\left(T_{n-1}^2\right)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right]\right\},$$

$$u_n|_\Gamma=0;$$

за нулевое приближение берется решение задачи упругого кручения данного стержня.

Теорема. Если функция φ имеет вторую непрерывную производную, то при достаточно малом μ задача упруго-пластического кручения разрешима, и притом единственным образом. Решение можно построить по методу упругих решений. Если же 1) $\varphi(t)$ не убывает, имеет непрерывную третью производную, а при $t\geqslant 0$ удовлетворяет неравенству $\varphi(t)\geqslant bt^r$, в котором $b>0$, $r>0$; 2) на бесконечности $\varphi(t)$ ведет себя как полином, — то при достаточной гладкости контура поперечного сечения обобщенное решение существует при любом конечном μ.

На примере круглого стержня показывается, что метод упругих решений может расходиться при достаточно больших μ.

Рассмотрена также пространственная задача для упруго-пластических тел с закрепленным краем. При некоторых условиях, наложенных на границу и на упруго-пластические свойства тела, доказывается, что если массовые силы принадлежат пространству L_p при $p>3$, то существует обобщенное решение задачи, к которому сходится метод упругих решений. С. Г. Михлин

452. О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом. Гулканян Н. О., Айкакан ССР Гитутюннери Академиан тегекагир. Физико-математикан гитутюннери сериа, Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1957, **10**, № 5, 33—58 (рез. арм.)

Рассматривается задача о кручении призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, содержащего вырез прямоугольной формы, расположенной несимметрично относительно одной из осей системы (симметрия относительно второй оси—сохранена), сводящаяся к интегрированию уравнения Пуассона $\Delta u=-2$ с граничными условиями: $u=0$ на внешнем контуре сечения, $u=u_0=\mathrm{const}$ на внутреннем контуре сечения.

С помощью метода вспомогательных функций, предложенного Н. Х. Арутюняном (Прикл. матем. и механ., 1949, **13**, № 1), а также метода Г. А. Гринберга решения неоднородных задач математической физики (Изв. АН СССР. Сер. физ. 1946, **10**, № 2) задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, относительно которой доказывается, что она вполне регулярна.

Выведены формулы для напряжений и жесткости. Произведены численные расчеты для стержня квадратного сечения с квадратным вырезом. Я. С. Уфлянд

453. О существовании решений уравнений изотермического упругого равновесия в случае, когда система приложенных нагрузок обладает осями равновесия. Стоппелли (Sull'esistenza di soluzioni delle equazioni dell'elastostatica isoterma nel caso di sollecitazioni dotate di assi di equilibrio. Stoppelli Francesco), Ricerche mat., 1957, **6**, № 2, 241—287 (итал.)

Исследуются условия существования и единственности решений уравнений упругого изотермического равновесия в теории конечных деформаций. Решения ищутся последовательными приближениями в форме разложений по степеням малого параметра Θ, входящего множителем в выражения массовых и поверхностных сил, образующих систему, статически эквивалентную нулю (предполагается, что нагрузки в начальном и актуальном состояниях одинаковы). Говорят, что система обладает осями равновесия, если диада Яумана моментов сил, в данном случае симметричная, вырождается. Осью равновесия называется направление, соответствующее нулевому значению характеристического числа. Возможны, очевидно, три степени вырождения.

Последовательное определение множителей при степенях в разложении решения при наличии осей равновесия не всегда оказывается возможным вследствие того, что в этом случае получаемые на каждой ступени приближения линейные уравнения в частных производных оказываются несовместными. Развивая метод локальной конструкции решения, аналогичный примененному в предшествовавшей работе (РЖМат, 1958, 5785), и накладывая на известные функции некоторые довольно широкие требования регулярности, автор находит необходимые условия существования и единственности вектора смещения $S(P_*\Theta)$, принадлежащего классу C, являющегося решением уравнений равновесия.

В терминологии автора, вектор называется принадлежащим классу C, если: 1) для всех Θ в окрестности $\Theta=0$ он имеет вторые производные гёльдерова класса; 2) в избранной точке $P_*=0_*$ начального состояния C_* он обращается в нуль и его первые производные по всем координатам суть непрерывные функции Θ.

В этом случае в качестве начального приближения может быть взято классическое решение, а следующие приближения (в избранной точке) строятся наложением на деформацию некоторого вращения, подбираемого специальными приемами, в зависимости от степени вырождения.

Необходимые условия существования и единственности решения довольно сложны и допускают краткую формулировку лишь в специальной терминологии автора. Н. А. Ростовцев

454. Напряженное состояние и перемещения в тонкой анизотропной пластинке под действием точечного источника тепла. Моссаковский (The state of stress and displacement in a thin anisotropic plate due to a concentrated source of heat. Mossakowski Jerzy), Arch. mech. stosowanej, 1957, **9**, № 5, 565—577 (англ.; рез. русск., польск.)

Исследуется частный случай плоской задачи теории упругости анизотропного тела для упругой анизотропной полуплоскости, внутри которой на расстоянии η от границы имеется точечный источник тепла постоянной мощности. Благодаря наличию источника тепла в полуплоскости возникает неравномерное температурное поле, определяемое функцией $T(x, y)$ (температура), вызывающее в свою очередь поле напряжений, которому соответствует функция напряжений Эри $F(x, y)$.

Математическая задача сводится к определению в полуплоскости двух функций T и F, удовлетворяющих системе уравнений эллиптического типа с постоянными коэффициентами

$$k_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+(k_{12}+k_{21})\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}+k_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0,$$

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x\partial y^3}+$$
$$+a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+a_{22}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-a_{12}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}+a_{11}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0.$$

Неизвестные функции T и F должны удовлетворять определенным условиям непрерывности и однозначности в полуплоскости, условию постоянства теплового потока на любом замкнутом контуре, окружающем источник, и условиям на границе, зависящим от теплового режима и способа закрепления ее. Метод решения в основном такой же, как и в случае плоской задачи при постоянной температуре. Автор исходит из представления функций T и F через 6 произвольных функций $f_k(z_k)$ комплексных переменных типа $z_k=x+\mu_k(y-\gamma_i)$, где μ_k — комплексные постоянные, зависящие от упругих констант среды.

Для данной задачи удается найти решение с помощью элементарных функций

$$f_k(z_k)=A_k\left(z_k^4\ln\frac{z_k}{d_k}-\frac{25}{12}z_k^4\right)\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 6),$$

где A_k — постоянные, определяемые из вышеуказанных условий. Рассмотрены 4 варианта граничных условий; найдены значения A_k и выражения для напряжений и перемещений. Показано, что путем предельного перехода из решения автора получается известное решение для изотропной полуплоскости с точечным источником тепла. С. Г. Лехницкий

455. К стационарному распространению тепла сквозь однородную оболочку, ограниченную двумя неконцентрическими сферами. Карикато (Sulla propagazione stazionaria del calore attraverso un involucro omogeneo limitato da due sfere non concentriche. Caricato Gaetano), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 1-2, 131—139 (итал.)

Приближенная оценка для количества тепла, которое в условиях стационарного распространения проходит за единицу времени сквозь оболочку, разделяющую две среды с однородными температурами, полученная в работе А. Синьорини (РЖМат, 1958, 7800), рассматривает применительно к случаю оболочки, ограниченной двумя неконцентрическими сферами. Выражения для нижнего и верхнего пределов приближенной оценки получены при помощи рассуждений, аналогичных проводимым в цитируемой работе. Рассмотрен как общий случай, так и случай оболочки с малым эксцентриситетом, под которым понимается отношение

$$e=|C_0C_1|/(R_1-R_0),$$

где C_0 и C_1 — центры окружностей, а R_0 и R_1 — их радиусы. Выражение для количества тепла в случае малого e совпадает с точным выражением для него в случае $e=0$. В. И. Беляев

456. Конечные температурные деформации в сферах и круговых цилиндрах. Сетх (Finite thermal strain in spheres and circular cylinders. Seth B. R.), Arch. mech. stosowanej, 1957, **9**, № 6, 633—645 (англ.; рез. польск., русск.)

Рассматриваются задачи термоупругости в случае конечных деформаций, возникающих при очень высоких температурах. Предлагается линейная связь между деформациями и напряжениями $t_{ij}=\lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij}-ka_T$, где λ и μ — упругие постоянные, $k=\lambda+\frac{2}{3}\mu$, а функция a_T характеризует тепловое расширение тела.

Исследуются случаи радиальных деформаций полой сферы и полого цилиндра. В обоих случаях задача сводится к отысканию функции $\beta=\beta(r)$, определяющей радиальные перемещения

$$u_r=r(1-\beta),$$

и удовлетворяющей нелинейному дифференциальному уравнению

$$(r\beta'+\beta)^2+B\beta^2+C\int r\beta'^2\,dr+Da_T=A,\qquad(1)$$

в котором A — постоянная, а коэффициенты B, C и D зависят от упругих постоянных и имеют различные значения для сферы и для цилиндра.

Для решения уравнения (1) функции $\beta(r)$ и $a_T(T)$ разлагаются в степенные ряды

$$\beta(r)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{1}{r^n}\quad\text{и}\quad a_T(T)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nT^n,$$

коэффициенты которых определяются из граничных условий. Подробно рассматривается случай квадратичной функции $a_T=a_1T+a_2T^2$. К. В. Соляник-Красса

457. Баллистические кривые теплопроводности (и диффузии) в цилиндре конечного радиуса в случае радиального потока; основные уравнения. Камиа (Courbes balistiques de la chaleur (et de la diffusion) dans un cylindre de rayon fini et dans le cas d'un flux radial: équations fondamentales. Camia Frédéric), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2218—2221 (франц.)

Рассматриваются следующие краевые задачи для бесконечного полого однородного цилиндра, радиус внутренней поверхности которого r_1, внешней — r_2: 1) поверхности $x=r_1$ и $x=r_2$ находятся при нулевой температуре; 2) температура поверхности $x=r_1$ равна нулю, поверхность $x=r_2$ теплоизолирована; 3) обе поверхности теплоизолированы.

Показано, что в радиально-симметричном случае температура Θ в произвольной точке $r=x$ цилиндра определяется выражением

$$\Theta(x,\ t)=\int_{l=r_1}^{r_2}\int_{u=0}^{t}f_0\,du\,dl+$$
$$+\frac{1}{\pi\gamma}\sum_{p=1}^{\infty}\left(\frac{U_o(\omega_p x)}{r_2^2U_n^2(\omega_p r_2)-r_1^2U_m^2(\omega_p r_1)}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{l=r_1}^{r_2}\int_{u=0}^{t}U_0(\omega_p l)\,e^{-\omega_p^2h(t-u)}W\,du\,dl\right),\qquad(1)$$

где $W(x,\ t)$ — плотность источников тепла,

$$U_n(\omega_p,\ r)=J_n(\omega_p r)+c_pN_n(\omega_p r),$$

постоянная c_p определяется из граничных условий; начальные условия нулевые; величина f_0 является окон-

чательной температурой, которая устанавливается в цилиндре, в первых двух случаях она равна нулю, а в третьем

$$f_0 = \frac{W}{\pi\gamma(r_2^2 - r_1^2)}.$$

Когда индексы (m, n) принимают значения (1,1), (1,0) и (0,0), выражение (1) дает решение первой, второй и третьей краевых задач. В. И. Беляев

458. Полый круглый цилиндр под периодическим изменением температуры. Водичка (Hollow circular cylinder under periodic fluctuations of temperature. Vodička Václav), Appl. Sci. Res., 1955, A5, № 5, 327—337 (англ.)

Исследуется температурный режим внутри твердого круглого цилиндрического кольца $r \leqslant \rho \leqslant R$, $-s \leqslant z \leqslant +s$. На границах области задается температура в виде периодической функции $Ce^{i\alpha t}$ (t — время), где C и α на основаниях и боковых поверхностях цилиндров имеют разные постоянные значения. Решение ищется в виде суммы четырех частных решений, удовлетворяющих на одной части границы заданным граничным условиям, а на остальной части — однородным условиям. Эти частные решения автор находит способом Фурье. Д. Е. Долидзе

459. Прохождение периодического теплового потока через многослойную среду. Водичка (Przewodzenie okresowo zmiennego strumienia cieplnego w ośrodkach wielowarstwowych. Vodička Václav), Arch. budowy maszyn, 1957, **4**, № 1, 63—73 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассматривается среда, состоящая из n слоев с различными тепловыми свойствами. Температура $u_k(\xi, t)$ и тепловой поток $w_k(\xi, t)$ в k-м слое удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = K_k^2\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial \xi^2} + \frac{p}{\xi}\frac{\partial u_k}{\partial \xi}\right), \quad K_k^2 = \frac{\lambda_k}{c_k\gamma_k}, \tag{1}$$

$$\xi_{k-1} < \xi < \xi_k, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$w_k = -\lambda_k \frac{\partial u_k}{\partial \xi}, \quad \xi_{k-1} < \xi < \xi_k, \quad t > 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$u_1(\xi_0, t) = U_1(\xi_0)e^{i\omega t}, \quad w_1(\xi_0, t) = W_1(\xi_0)e^{i\omega t}, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \xi} + h_k(u_k - u_{k+1}) = 0, \quad \xi = \xi_k, \quad t > 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4 А}$$

$$\frac{\partial u_{k+1}}{\partial \xi} + h'_k(u_k - u_{k+1}) = 0, \quad \xi = \xi_k, \quad t > 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{4 Б}$$

где p в уравнении (1) — произвольный положительный параметр.

Решение для случая $n = 1$, когда $a < \xi < b$, представляется в матричной форме

$$\left\| \begin{matrix} u(\xi, t) \\ \xi^p w(\xi, t) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{D(a)} M(\xi) \left\| \begin{matrix} u(a, t) \\ a^p w(a, t) \end{matrix} \right\|, \quad t > 0. \tag{5}$$

Матрица M имеет вид

$$M(\xi) = \left\| \begin{matrix} Q'(\delta a)P(\delta\xi) - P'(\delta a)Q(\delta\xi), \\ \lambda\xi^p[P'(\delta a)Q'(\delta\xi) - Q'(\delta a)P'(\delta\xi)], \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{1}{\lambda a^p}[Q(\delta a)P(\delta\xi) - P(\delta a)Q(\delta\xi)] \\ \frac{\xi^p}{a^p}[P(\delta a)Q'(\delta\xi) - Q(\delta a)P'(\delta\xi)] \end{matrix} \right\|,$$

где $P(\delta\xi)$ и $Q(\delta\xi)$ являются независимыми решениями уравнения

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{p}{\xi}\frac{dU}{d\xi} + \delta^2 U = 0, \qquad \delta^2 = -\frac{i\omega}{k^2},$$

а D — вронскиан функций P и Q.

Затем методом математической индукции доказывается справедливость следующих соотношений

$$u_k(\xi_{k-1}, t) = U_k(\xi_{k-1})e^{i\omega t}, \qquad w_k(\xi_{k-1}, t) = W_k(\xi_{k-1})e^{i\omega t} \tag{6}$$

для $k = 1, 2, \ldots, n$. На основании (6) для определения $u_k(\xi, t)$ и $w_k(\xi, t)$ получаются рекуррентные соотношения

$$\left\| \begin{matrix} u_1(\xi, t) \\ \xi^p w_1(\xi, t) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{D_1(\xi_0)} M_1(\xi) \left\| \begin{matrix} u_1(\xi_0, t) \\ \xi_0^p w_1(\xi_0, t) \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

$$\xi_0 < \xi < \xi_1, \quad t > 0,$$

и

$$\left\| \begin{matrix} u_k(\xi, t) \\ \xi^p w_k(\xi, t) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{D_k(\xi_{k-1})} M_k(\xi) \left[\left\| \begin{matrix} u_{k-1}(\xi_{k-1}, t) \\ \frac{\lambda_k h'_{k-1}}{\lambda_{k-1}h_{k-1}} \xi_{k-1}^p w_{k-1}(\xi_{k-1}, t) \end{matrix} \right\| - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_{k-1}h_{k-1}} \left\| \begin{matrix} w_{k-1}(\xi_{k-1}, t) \\ 0 \end{matrix} \right\| \right], \tag{8}$$

$$\xi_{k-1} \leqslant \xi \leqslant \xi_k, \quad t > 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

Матрица $M_k(\xi)$ и вронскиан D_k в этих соотношениях имеют тот же вид, что и в уравнении (5), с той разницей, что P, Q и δ имеют индекс k, а вместо a стоит ξ_{k-1}.

Отмечается, что (7) и (8) обеспечивают теоретическую возможность представления $u_k(\xi, t)$ и $w_k(\xi, t)$ через $u_1(\xi_0, t)$ и $w_1(\xi_0, t)$, но в общем случае они ведут к очень сложным расчетам, которые, за исключением особых случаев, являются невыполнимыми. Решения (7) и (8) ясно показывают, что $u_k(\xi, t)$ и $w_k(\xi, t)$ имеют форму

$$u_k(\xi, t) = U_k(\xi)e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad w_k(\xi, t) = W_k(\xi)e^{i\omega t}.$$

Для часто встречающегося в технике случая, когда

$$\lambda_k h_k = \lambda_{k+1} h'_k, \qquad \frac{1}{h_k} \to 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

формулы (7), (8) упрощаются и сводятся к одному выражению

$$\left\| \begin{vmatrix} u_k(\xi, t) \\ \xi^p w_k(\xi, t) \end{vmatrix} \right\| = \frac{N_{k-1}}{D_k(\xi_{k-1})} M_k(\xi) \left\| \begin{vmatrix} u_1(\xi_0, t) \\ \xi_0^p w_1(\xi_0, t) \end{vmatrix} \right\|,$$

$$\xi_{k-1} \leqslant \xi \leqslant \xi_k, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$N_0 = 1, \qquad N_{k-1} = \frac{M_1(\xi_1) M_2(\xi_2) \ldots M_{k-1}(\xi_{k-1})}{D_1(\xi_0) D_2(\xi_1) \ldots D_{k-1}(\xi_{k-2})},$$

$$k = 2, 3, \ldots, n.$$

Рассмотрено приложение полученных результатов к случаю распространения тепловых изменений в многослойной плоской стенке ($p = 0$), многослойном цилиндре ($p = 1$) и многослойной шаровой среде ($p = 2$).

Автор указывает на аналогию тепловых явлений в многослойных средах с электрическими явлениями в четырехполюснике. В. И. Беляев

460. Приведенное волновое уравнение в среде с переменным показателем преломления. Миранкер (The reduced wave equation in a medium with a variable index of refraction. Miranker W. L.), Communs Pure and Appl. Math., 1957, **10**, № 4, 491—502 (англ.)

В трехмерном евклидовом пространстве V рассматривается уравнение

$$\Delta u + h^2(x) u = 0, \tag{1}$$

где $h(x)$ квадратично интегрируемо по любой конечной области, $|h^2(x) - k^2| \leqslant O(|x|^{-\mu})$, $k > 0$, $\mu > 0$ — постоянные, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ (трехмерность пространства не ограничивает общности).

Показано, что если

$$\frac{1}{4\pi} \int\int\int_V \frac{|k^2 - h^2(x)|}{|x|} dV < 1 \tag{2}$$

и $u(x)$ — ограниченное во всем пространстве V решение уравнения (1), то $\lim_{|x| \to \infty} \int\int_{\Sigma_{|x|}} |u|^2 dS \neq 0$ ($\Sigma_{|x|}$ — поверхность шара радиуса $|x|$ с фиксированным центром). Эта теорема обобщает известный результат Ф. Реллиха (Rellich, F., Jahresber. Dtsch Math.Ver. 1943, **53**, p. 57). Из нее выводятся два следствия. Если выполнено (2), то: I) ограниченное в V решение (1), квадратично интегрируемое по всему пространству, тождественно равно нулю. II) не существует отличных от нуля решений (1), ограниченных в V и удовлетворяющих условию излучения:

$$\lim_{|x| \to \infty} \int\int_{\Sigma_{|x|}} \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - ih(x) u \right|^2 ds = \lim_{|x| \to \infty} \int\int_{\Sigma_{|x|}} \left| \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku \right|^2 ds = 0.$$

Во второй части статьи уравнение (1) рассмотрено в области D, внешней к достаточно регулярной поверхности B (в D $|h^2(x) - k^2| = O(|x|^{-\mu})$, $\mu > 2$). Доказано, что если $u(x)$ — ограниченное в D решение уравнения (1), удовлетворяющее условию излучения, и $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число, то в D существует такое решение v уравнения $\Delta v + k^2 v = 0$, что $|u - v| = O(|x|^{-\mu+2+\varepsilon})$, причем $v \not\equiv 0$, если $u \not\equiv 0$. Эта теорема аналогична одной теореме Л. Берса (РЖМат, 1958, 8851) об аппроксимации в окрестности конечной точки решения линейного эллиптического уравнения однородными полиномами. Из нее следует, что

$$\lim_{|x| \to \infty} \int\int_{\Sigma_{|x|}} |u|^2 ds \neq 0$$

для всякого ограниченного в D и удовлетворяющего условию излучения решения уравнения (1), если $\mu > 3$. Последний результат используется для доказательства следующей теоремы единственности: существует не более одного решения уравнения (1), удовлетворяющего условию излучения и принимающего на B заданные значения. М. В. Гельман

461. Влияние пространственного заряда на электронно-оптические свойства электростатических систем с одной или двумя плоскостями симметрии. Страшкевич (Вплив просторового заряду на електроннооптичні властивості електростатичних систем з однією або двома площинами симетрії. Страшкевич О. М.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 1, 3—6 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются электростатические системы, имеющие плоскость симметрии. Пространственный заряд ρ и потенциал Φ, связанные уравнением Пуассона

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho, \tag{1}$$

раскладываются в ряды по степеням расстояния от оси, лежащей в указанной плоскости. Подставив полученные ряды в уравнение (1), автор получает связь между коэффициентами разложения величин ρ и Φ. Затем, во втором приближении, находятся релятивистские уравнения движения электронов и выводятся основные формулы релятивистской электронной оптики с учетом влияния пространственного заряда в центральной области поля. Ю. А. Шапиро

462. Сравнение поверхностных потенциалов, возникающих при изображении человеческого сердца с помощью различных источников поля. Е. Мартинек (Comparison of surface potentials due to several singularity representations of the human heart. Yeh Gordon C. K., Martinek Johann), Bull. Math. Biophys., 1957, **19**, № 4, 293—308 (англ.)

Электрический потенциал, возникающий благодаря деятельности сердца, анализируется в предположении, что человеческое тело представляет собой однородную проводящую среду, внутри которой имеются точечные источники поля. В статье содержатся численные и графические результаты вычисления потенциала на поверхности вытянутого эллипсоида вращения и сферы, внутри которых расположены диполь или пара зарядов. Ю. А. Шапиро

463. Эллипсоидальная фигура равновесия электропроводящей массы жидкости, равномерно вращающейся в изменяющемся со временем магнитном поле. Агостинелли (Figure di equilibrio ellissoidali per una massa fluida elettricammente conduttrice iniformemente rotante, con campi magnetici variabili col tempo. Agostinelli Cataldo), Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), **23**, № 6, 409—414 (итал.)

Сформулированная в заглавии статьи задача математически сводится к решению системы уравнений магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{H} \times \mathbf{v}] + \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma} \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [\operatorname{rot}\mathbf{v} \times \mathbf{v}] - \frac{\mu}{4\pi\rho_0}[\operatorname{rot}\mathbf{H} \times \mathbf{H}] = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{v^2}{2} - U\right), \quad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

с граничным условием $p = 0$ на свободной поверхности жидкости. Здесь U — потенциал сил неэлектромагнитного происхождения. При этом ищется решение системы (1) — (4), соответствующее вращению с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz, проходящей через центр тяжести жидкости, т. е. полагается $\mathbf{v}(p) = [\omega \times \times \overline{Op}]$.

В силу условий задачи

$$H_x = -\frac{\partial V}{\partial y}; \; H_y = \frac{\partial V}{\partial x}; \; H_z = H_z(x, y, t),$$

где $V(x, y, t)$ — функция лишь x, y, t; и система (1) — (4) сводится к трем скалярным уравнениям:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \omega\left(x\frac{\partial V}{\partial y} - y\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\Delta_2 V = f(t),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} + \omega\left(x\frac{\partial H_z}{\partial y} - y\frac{dH_z}{dx}\right) - \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}\Delta_2 H_z = 0$$

$$\frac{\mu}{4\pi\rho_0}\left[-\Delta_2 V \cdot \operatorname{grad} V + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dH_z}{dx}\right)\right] =$$

$$= \operatorname{grad}\left[\frac{1}{\rho_0} p - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{8\pi\rho_0} H^2_z - U\right],$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени. Решения последней системы ищутся в виде

$$V = \frac{1}{2}(\alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2) + \alpha_{12}xy + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3$$

и

$$H_z = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3,$$

где α и β являются функциями лишь t и ω. Для их определения получаются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых позволяют выразить в явном виде H_x, H_y и H_z как функции ω. Для определения угловой скорости вращения при этом получается выражение

$$\frac{1}{2}\omega^2\xi^2 + \frac{1}{2}(\omega^2 - \varkappa_0^2)\eta^2 + U = \text{const},$$

где ξ и η связаны с x и y соотношениями

$$x = \xi\sin(\omega t + \gamma_0) + \eta\cos(\omega t + \gamma_0),$$

$$y = -\xi\cos(\omega t + \gamma_0) + \eta\sin(\omega t + \gamma_0),$$

а $\varkappa_0$ и γ_0 — постоянные.

Подробно исследуется случай, когда потенциал U является гравитационным потенциалом эллипсоида.

А. Г. Свешников

464. Колебания электронной плазмы с учетом самодействия электронов. Богданов А. В., Тр. Всес. заочн. энерг. ин-та, 1957, вып. 11, 68—73

Рассматриваются продольные колебания в однородной электронной плазме, находящейся в поле равномерно распределенных положительных ионов плотности n_0 с учетом эффекта самовоздействия электронов плазмы (лучистого трения). Решается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v\operatorname{grad}_x)f + (w\operatorname{grad}_v)f + \left(\frac{w}{s_0} - \frac{eE}{ms_0}\right)\operatorname{grad}_w f = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi e\left(n_0 - \int\int_{-\infty}^{\infty} f\,dv\,dw\right).$$

После линеаризации системы и интегрирования получается дисперсионное уравнение, анализ которого показывает, что учет самодействия электронов плазмы ведет к уточнению дисперсионного уравнения.

Е. С. Алексеев

465. Проблемы переноса и принцип обратимости. Кейс (Transfer problems and the reciprocity principle. Case K. M.), Revs Mod. Phys., 1957, 29, № 4, 651—663 (англ.)

Рассматривается следующее уравнение переноса для случая диффузии нейтронов с одной скоростью:

$$\Omega\,\Delta\psi(r, \Omega) + \sigma(r)\psi(r, \Omega) =$$

$$= c(r)\sigma(r)\int f(\Omega\,\Omega')\psi(r, \Omega')\,d\Omega' + q(r, \Omega),$$

где $c(r)$ — число нейтронов, возникающих в r в результате нейтронных соударений. Доказана теорема единственности, которая утверждает, что если $c(r) < 1$ по всей области V, то угловое распределение определяется единственным образом угловым распределением на граничной поверхности S и источниками внутри V. Доказано фундаментальное тождество:

$$\int_S dS \int_{n_0\Omega<0} d\Omega\,|n_0\Omega|\{\widetilde{\psi}_{2\text{inc}}(r, \Omega)\,\psi_1(r, -\Omega) - \psi_{1\text{inc}}(r, \Omega)\,\widetilde{\psi}_2(r, -\Omega)\} =$$

$$= \int_V dr \int d\Omega\left\{\widetilde{\psi}_2(r, -\Omega)\,q_1(r, \Omega) - \psi_1(r, \Omega)\,q_2(r, -\Omega)\right\}.$$

Из него выведено три следствия, которые названы принципами обратимости: а) угловая плотность в r_1 в направлении $-\Omega_1$, возникшая от единичного источника направления Ω_2 в r_2, равна угловой плотности в r_2 в направлении $-\Omega_2$, возникшей от единичного точечного источника направления Ω_1 в r_1; б) исходное угловое распределение в направлении $-\Omega_2$ в r_{2S}, обусловленное случайным пучком в r_{1S} в направлении Ω_1, умноженное на модуль косинуса угла между Ω_2 и нормалью к S в r_{2S}, равно исходному распределению в r_{1S} в направлении $-\Omega_1$, обусловленному случайным пучком в r_{2S} в направлении Ω_2, умноженному на модуль косинуса угла между Ω_1 и нормалью в r_{1S}; в) исходное угловое распределение в направлении $-\Omega_2$ в r_2, обусловленное точечным источником направления Ω_1 в r_1, является произведением обратной величины модуля косинуса угла между нор-

малью в r_{2s} и Ω_2 и угловой плотности в r_1 направления $-\Omega_1$, обусловленной случайным пучком в направлении Ω_2 в r_{2s}. Эти три следствия применены к частному случаю плоской симметрии. Выведены основные уравнения для случая полупространства, построена функция Грина для полупространства, а также для смежных полупространств. Получены уравнения для плоской пластинки. Е. С. Алексеев

466. Новый метод математической формулировки принципа Гюйгенса в теории электрона Дирака. Фан Ван Лок (Une nouvelle manière d'établir l'expression mathématique du principe de Huygens en théorie de l'électron de Dirac. Phan-Van-Loc), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 3, 88—390 (франц.)

Рассматривается уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Если средняя плотность электричества ρ не зависит от времени, то $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ или, интегрируя по объему V, ограниченному сферой S, имеем:

$$\int_V \operatorname{div} (\psi_k^* \vec{\alpha} \psi_k)\, dv = \int_S \psi_k^* \alpha_u n^u \psi_k\, ds .$$

Заменяя ψ_k^* на потенциал Φ_k^*, согласно уравнениям теории электрона Дирака, получим:

$$\int_S \left\{ \left[\Phi_k^* \overleftarrow{(n_u \partial^u)} \psi_k - \Phi_k^* (n_u \partial^u) \psi_k \right] - \right.$$
$$- \left[\Phi_k^* \overleftarrow{(n^\nu \partial^w - n^w \partial^\nu)} \alpha_\nu \alpha_w \psi_k + \right.$$
$$\left. \left. + \Phi_k^* \overleftarrow{(n^\nu \partial^w - n^w \partial^\nu)} \alpha_\nu \alpha_w \psi_k \right] \right\} ds = 0 .$$

Вводя для потенциала следующее выражение:

$\Phi_k = a_k \frac{e^{-iK_r}}{r} e^{-ikct}$, $K^2 = K^2 - K_0^2$, получим по известному методу формулу принципа Гюйгенса:

$$4\pi \psi_k(P) = \int_S \left\{ \psi_k \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-iK_r}}{r} \right) - \frac{e^{-iK_r}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \psi_k \right\} ds +$$
$$+ \int_S (n^\nu \partial^w - n^w \partial^\nu) \alpha_\nu \alpha_w \left(\frac{e^{-iK_r}}{r} \psi_k \right) ds .$$

Е. С. Алексеев

467. О модификации релятивистски инвариантного формализма в теории слияния. Среднява (Sur une modification de Lorentzinvariant formalisme dans la théorie de fusion. Sredniawa Bronislaw), Acta phys. polon., 1957, **16**, № 6, 399—405 (франц.; рез. русск.)

Рассматривается релятивистски инвариантное уравнение движения для частицы с максимальным значением спина, равным 1, полученное по методу слияния де Бройля из двух уравнений для частиц со спином $^1/_2$, причем последние могут описываться по Дираку или по Майорана. Автор вводит запись уравнения в виде $(\Gamma^\mu d\mu + m)\ \psi = 0$, определяя матрицы Γ^μ через матрицы Дирака, изучает запись уравнений в трехмерных обозначениях, а также приводит выражения для физических тензорных величин, записанные при помощи матриц Γ^μ. А. В. Тулуб

468. Стационарные состояния и теория двойного решения. Ро (Les états stationnaires et la théorie de la double solution. Rot M.), Sémin. théor. phys. L. Broglie, Fac. sci. 1956—1957, **26**, Paris, 1957, 2-1—2-9 (франц.)

Автор изучает решение граничной задачи для уравнения Шредингера в тех случаях, когда переменные разделяются. При этом уравнение Шредингера рассматривается им как первое приближение к уравнению «теории двойного решения» де Бройля, в котором можно пренебречь нелинейными членами. В статье находятся решения, обладающие особенностями, и приводится способ, с помощью которого, по мнению автора, можно осуществить разложение таких решений на сингулярную и регулярную части, как этого требует «теория двойного решения». А. В. Тулуб

469. Нелинейный электромагнетизм и фотоны в функциональной теории частиц. Эшлиман, Детуш (L'électromagnétisme non linéaire et les photons en théorie fonctionnelle des corpuscules. Aeschlimann Florence, Destouches Jean-Louis), J. phys. et radium, 1957, **18**, № 11, 632—637 (франц.)

Рассматриваются выведенные Ми (G. Mie) уравнения нелинейного электромагнитного поля, а также фундаментальные уравнения нелинейной теории фотона: $L_A u = Q_A(u, \nabla)$; $L_B u = Q_B(u, \nabla)$, где $Q_A(u, \nabla)$ и $Q_B(u, \nabla)$ обозначают нелинейные члены, тогда как уравнения фотона де Бройля имеют вид: $L_A \Phi_{ik} = 0$; $L_B \Phi_{ik} = 0$. Если A_j и B_j — операторы, полученные из оператора Дирака α, то, умножая фундаментальные уравнения нелинейной теории фотона на различные комбинации операторов A_j и B_j, можно получить различные уравнения нелинейной теории электромагнитного поля. Если умножить фундаментальные уравнения теории фотона на A_j и B_j, где $j = 1,2,3$, и применить к полусумме оператор $\Omega n = d \sum_{ik} k \delta_{ik} F n_{ik}$, то получим следующие уравнения нелинейной теории электромагнитного поля:

$$\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\frac{\partial a}{\partial t} - \operatorname{grad} v, \quad P = d\mathfrak{D} - \mathfrak{s} .$$

Если умножить фундаментальные уравнения теории фотона на A_j и B_j, где $j = 23,31,12$, и применить к их полусумме оператор Ω, то получим следующие уравнения нелинейной теории электромагнитного поля:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A};\ m = d\mathfrak{B} - \mathfrak{H}.$$

Если умножить фундаментальные уравнения теории фотона на A_j и B_j, где $j = 14,24,34$, и применить к их полусумме оператор Ω, то получим следующее уравнение нелинейной теории электромагнитного поля:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathfrak{H} = -i .$$

Приведены также уравнения нелинейной теории электромагнитного поля в тензорной форме и уравнения распространения электромагнитных волн. Е. С. Алексеев

470 Д. Уравнения движения и движение вращающихся симметричных масс в общей теории относительности. Рябушко А. П. — Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусск. ун-т, Минск, 1958

См. также: 239, 241, 483, 487, 489, 509 К, 547, 565, 582, 594, 863—872, 894 Д, 902

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редактор *В. В. Немыцкий*

471. О приведении вольтерровских операторов к простейшему виду и обратных задачах. Сахнович Л. А., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1957, **21**, № 2, 235—262

Пусть $L_r^2[0,l]$ — пространство вектор-унитарий $f(x) = [f_1(x) \ldots, f_r(x)]$ со скалярным произведением $(f,g) = \sum_{i=1}^{r} \int_0^l f_i(x)\,\overline{g_i}(x)\,dx$.

М. С. Лившиц (РЖМат, 1954, 5660) показал, что обширный класс операторов с помощью унитарного преобразования может быть приведен к „треугольному" виду

$$Af = i\int_0^x f(t)\,\beta(t\ Idt\,\beta(x)\ (f(t) \in L_r^2[0,l]), \qquad (1)$$

где $\beta(t)$ — неотрицательная матрица и $\operatorname{sp}\beta^2(t) = 1$, а I — диагональная матрица, на диагонали которой стоят ± 1.

Простейшими операторами вида (1) являются операторы интегрирования I^m, определенные в $L_r^2[0,b]$ формулой

$$I^m\varphi = \left[i\int_0^x \varphi_1(t)\,dt, \ldots, i\int_0^x \varphi_m(t)\,dt, 0, 0, \ldots\right], x \in [0,b].$$

Доказывается, что при известных условиях регулярности, накладываемых на матрицу $\beta^2(x)I$, любой оператор A вида (1) линейно эквивалентен некоторому оператору интегрирования $I^{(m)}$, т. е. $A = BI^{(m)}B^{-1}$ на замыкании линейного многообразия, в которое переходит $L_r^2[0,l]$ при умножении его элементов на матрицу $\beta(x)$. Здесь B и B^{-1} — линейные ограниченные операторы.

Эти результаты используются для доказательства некоторых теорем единственности решения обратной задачи определения матрицы $\beta^2(x)I$ в системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dx}w(x,\lambda) = i\lambda\, w(x,\lambda)\,\beta^2(x)\,I,\ w(0,\lambda) = E,\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

по вронскиану этой системы, известному в точке l при всех значениях параметра λ. В. А. Марченко

472. О применении метода моментов и «смешанного» метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений. Иванов В. В., Докл. АН СССР, 1957, **114**, № 5, 945—948

Для приближенного решения уравнения

$$G\varphi = A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0} = f(t_0),\ t_0 \in \gamma, \qquad (1)$$

где γ — окружность $|t| = 1$, $A, B, f \in \operatorname{Lip}_\alpha$ на γ,

$$A^2 - B^2 \neq 0,\ A + B = 1 \text{ и } \chi = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{A-B}{A+B}\right]_\gamma \geqslant 0,$$

предлагается два метода:

1. Метод, близкий к методу Галеркина. Приближенное значение φ^* того решения φ, у которого $\int_\gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z}$ имеет наивысший порядок нуля при $z \to \infty$, ищется в виде

$$\varphi^* = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k - \sum_{k=-n}^{k=-1} a_k t^{k-\varkappa},$$

причем коэффициенты a_k определяются из системы $(G\varphi^*, t^k) = (f, t^k)$, $k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots;\ \pm n$.

Доказывается однозначная разрешимость этой системы при больших n. Оценивается скорость сходимости φ^* к φ в L_2.

2. φ^* ищется в том же виде. Уравнение (1) удовлетворяется в точках, равноделящих γ. Доказывается возможность однозначного определения a_k и оценивается скорость сходимости φ^* к φ по норме, связанной с интегралами типа Коши.

Результаты распространены на уравнения вида $G\varphi + A\varphi = f$, где A — вполне непрерывный оператор.

Л. А. Оганесян

473. Пример ядра не карлемановского типа. Касуга (An example of kernel of noncarleman type. Kasuga Takashi), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 9, 521—524 (англ.)

Строится неотрицательное, симметричное в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ ядро $S(x,y)$, обладающее следующими свойствами:

1) $S(x,y)$ — функция Бэра первого класса;

2) если $f(y) \in L^2[0,1]$, то $S(x,y)f(y) \in L_1\ (0 \leqslant y \leqslant 1)$ для каждого фиксированного значения x, за исключением множества меры нуль, которое зависит от $f(y)$;

3) $\int_0^1 S(x,y)f(y)\,dy \in L^2[0,1]$;

4) оператор $\int_0^1 S(x,y)f(y)\,dy$ самосопряженный в $L^2[0,1]$;

5) для некоторых x из $[0,1]$ $S(x,y) \notin L^2\ (0 \leqslant y \leqslant 1)$.

Ю. К. Ландо

474. Аналитический метод Некрасова-Назарова в нелинейном анализе. Ахмедов К. Т., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 135—153

А. И. Некрасов (Изв. Иваново-Вознес. политехн. ин-та, 1922, № 6, 155—171) рассмотрел нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) = \lambda\int_a^b K(x,y)\,H(y, u(y))\,dy, \qquad (1)$$

где ядро $K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n}$; $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система собственных функций ядра $K(x,y)$; $\lambda = \lambda_n$ — соответствующие собственные значения; $H(y,u(y))$ — аналитическая по u функция в окрестности $u = u_0$ и при $0 \leqslant y \leqslant b$; $u = u_0$ — решение уравнения (1) при $\lambda = \lambda_0$. Пусть $A_m(y)$ — коэффициент при m-й степени в разложении H по степеням $u - u_0$.

А. И. Некрасов предполагал, что $A_0(y) \equiv 0$, $A_1(y) \not\equiv 0$, $A_2(y) \equiv A_3(y) \equiv \ldots \equiv A_{m-1}(y) \equiv 0$, но $A_m(y) \not\equiv 0$. При этих условиях он доказал, что нетривиальным решением уравнения (1) является ряд по степеням $(\lambda - \lambda_1)^{1/(m-1)}$; этот случай, когда $u_0 = 0$, и $\lambda_0 = \lambda_1$.

Н. Н. Назаров независимо от А. И. Некрасова (Тр. Среднеаз. ун-та, 1933. 5, сер. матем., вып. 33; Тр. Среднеаз. ун-та, докторская диссертация, 1941) изучил уравнение (1) в общем случае, когда $A_0(y) \not\equiv 0$, исходное $\lambda = \lambda_0$ не является собственным значением ядра $K(x, y)$ и т. д; он рассмотрел и случай Некрасова. Метод в его исследованиях такой же, как у Некрасова, и состоит в непосредственном построении решения в виде ряда в одних случаях по целым степеням $\lambda - \lambda_0$, а в других — по дробным, точнее по целым степеням $(\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{m-1}}$ или $(\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{m}}$. При этом уравнение разветвлений не применяется, так как сразу решается неизмененное уравнение (1). В этом состоит существенное отличие данного способа от методов Ляпунова, Шмидта и др.

В реферируемой статье автор обобщает результаты Некрасова—Назарова на случай операторного уравнения вида

$$u = \lambda f(u); \qquad (2)$$

здесь u — элемент комплексного банахова пространства x; λ — комплексный числовой параметр; $f(u)$ — аналитический оператор из X в X. Рассматривается пространство $X_1 = X + K$, где K — комплексная плоскость. Решение (λ, u) уравнения (2) определяет точку X_1. Через $\Lambda \in X_1$ обозначается множество всех решений (λ, u) уравнения (2). Пусть $(\lambda_0, u_0) \in \Lambda$. Предполагается, что для u_0, $v \in X$

$$f(u_0 + v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta^n f(u_0, v);$$

здесь $\delta^0 f(u_0, v) = f(u_0)$; $\delta^n f$ — n-я вариация $f(u)$ в смысле Гато. Положено

$$\frac{1}{n!} \delta^n f(u_0, v) = A^n_{u_0}(v, \ldots, v) = A^n_{u_0}(v^n).$$

Оператор, сопряженный к $A^1_{u_0}$, обозначен через $\overline{A}^1_{u_0}$. Линейный оператор $A^1_{u_0}$ считается вполне непрерывным. Точка $(\lambda, u) \in \Lambda$, для которой оператор $A^1_{u_0}$ имеет обратный элемент, названа регулярной точкой Λ, остальные точки Λ — нерегулярными.

При решении делается замена: $u = u_0 + v$, $\lambda = \lambda_0 + \mu^m$ (m — целое положительное число) и (2) принимает вид

$$v = \lambda_0 \sum_{n=1}^{\infty} A^n_{u_0}(v^n) + \mu^m \sum_{n=0}^{\infty} A^n_{u_0}(v^n).$$

Теоремы 1—4 аналогичны соответствующим теоремам Некрасова— Назарова. Теорема 5 представляет собой некоторое обобщение этой теории. В теоремах 1—5 доказательство сходимости рядов по норме проводится путем построения мажорантных рядов, аналогично Некрасову и Назарову.

Отмечено, что аналогичными методами можно исследовать уравнение вида $u = F(\lambda, u)$, где F — оператор, аналитический относительно λ, и $u \in X$. Библ. 35 назв.

Я. И. Секерж-Зенькович

475. Функция Коши линейного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра. Ландо Ю. К., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1956, вып. 5, 41—47

Строится аналог функции Коши для линейного интегродифференциального уравнения

$$M(u) \equiv L(u) - \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^x K_i(x, y)\, u^{(i)}(y)\, dy = 0,$$

где

$$L(u) \equiv \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, u^{(i)}(x).$$

Пользуясь этой функцией, автор находит явное выражение частного решения неоднородного уравнения $M(u) = f(x)$.

Примечание референта. Такой же метод перехода от одной системы интегро-дифференциальных уравнений к соответствующей неоднородной системе и применение этого метода к изучению устойчивости решений нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений доложены рецензентом на 3-м Всес. матем. съезде (РЖМат, 1957, 1500). Подробно см. I и IV главы монографии референта „О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений".

Я. В. Быков

476. Нелокальные взаимодействия и матрица рассеяния. Шадан (Interactions non locales et matrice de diffusion. Chadan Khosrow), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 10, 1513—1516 (франц.)

Рассматривается S-рассеяние двух нуклонов, взаимодействие между которыми складывается из обычного-локального, описываемого потенциалом $V(r)$ и (гипотетического) нелокального взаимодействия вида $\lambda U(r)\, U(r')$. Соответствующее уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + E\psi = V(r)\,\psi + \lambda U(r) \int_0^{\infty} U(r')\,\psi(r')\, dr', \quad E = k^2. \qquad (1)$$

Ищется решение этого уравнения, удовлетворяющее обычным краевым условиям $\psi = 0$ при $r = 0$, $\psi \sim A \sin(kr + \delta_v + \delta_u(V))$ при $r \to \infty$, где δ_v — фаза рассеяния, отвечающая наличию только локального взаимодействия $V(r)$, которая может быть вычислена известными методами (предполагается, что отрицательных уровней в спектре уравнения $\psi'' + E\psi = V\psi$ не существует), V $\delta_u(v)$ — дополнительная фаза рассеяния, связанная с нелокальным взаимодействием $\lambda U(r)\, U(r')$. Использование импульсного представления для уравнения (1) позволяет вывести следующую формулу:

$$-\frac{2k}{\pi} \operatorname{tg} \delta_u(V) = \varphi(k) / \left(1 + P \int_0^{\infty} \frac{\varphi(p}{p^2 - k^2}\, dp\right), \qquad (2)$$

где $\varphi(k) = 2\lambda k^2 U^2(k)/\pi\, |f(k)|^2$, и $f(k)$ связано с $e^{2i\delta_V}$ соотношением $e^{2i\delta V} = f(k)/f^*(k)$. Если считать полную фазу рассеяния δ и, следовательно, также $\delta_u(V)$ известной функцией k, то (2) представляет собой интегральное уравнение, определяющее функцию $\varphi(k)$. Решение этого уравнения (приводимое без вывода) имеет вид

$$\varphi(k) = -\frac{2k}{\pi}\sin(\delta-\delta_v)\,e^{\alpha(k^2)}\left(1+\sum_1^N \frac{c_n}{k^{2n}}\right), \qquad (3)$$

$$\alpha(k^2) = -\frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{\delta-\delta_v}{p^2-k^2}\,dp,$$

если отрицательных (связанных) уровней E в спектре уравнения (1) не имеется и

$$\varphi(k) = -\frac{2k}{\pi}\sin(\delta-\delta_v)\,e^{\alpha(k^2)}\left(1+\sum_1^{N-1}\frac{c_n'}{k^{2n}}\right)\left(1+\frac{\gamma^2}{k^2}\right), \quad (4)$$

$$\alpha(k^2) = -\frac{2}{\pi}P\int_0^\infty \frac{\delta-\delta_v}{p^2-k^2}\,dp,$$

если имеется один отрицательный уровень $-\gamma^2$ (в (3) (4) c_n, c_n' — некоторые не уточняемые автором константы). Формулы (3), (4) позволяют установить вид нелокального взаимодействия $\lambda U(r)U(r')$ по известной локальной части взаимодействия $V(r)$ и энергетической зависимости фазы рассеяния δ. Ю. С. Саясов

477. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений. Ху Кун-шэн (Hu Kuen-sen), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1957, № 2, 121—150 (кит.; рез. англ.)

Рассматриваются две системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, заданные в матричной форме.

Первая система имеет вид:

$$y^1(x) = g_l(x) + \int_{x_0}^x f_l[x, t, \hat{Y}(t)]\,dt \quad (i=1,\ldots,n), \qquad (1)$$

где $g_l(x)$ и $f_l(x,t,\hat{Y})$ — данные функции,

$\hat{Y} = (y_1(t), y_1'(t) \ldots y_1^{(\nu_1)}(t) \ldots y_n(t), y_n'(t) \ldots y_n^{(\nu_n)}(t))$, $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — целые числа, порядки производных от неизвестных функций $y_l(x)$.

Вторая система линейная относительно столбцовой матрицы $Y(x)$

$$Y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x \sum_{\alpha=0}^{\nu} K_\alpha(x,t) D_t^\alpha Y(t)\,dt, \qquad (2)$$

где $\nu = \max(\nu_1, \ldots, \nu_n)$,

$Y(x) = (y_1(x) \ldots y_n(x))$, $g(x) = (g_l(x) \ldots g_n(x))$,

$K_\alpha(x,t) = \text{matrix}\,K_{\alpha ij}(x,t)$ $(i,j=1,\ldots,n)$,

$D_t^\alpha Y(t) = (y_1^{(\alpha)}(t), \ldots, y_n^{(\alpha)}(t))$ $(\alpha = 0,1,\ldots,n)$,

причем $y_i^{(0)}(t) = y_l(t)$, $y_i^{(\alpha)}(t) = 0$, когда $\alpha > \nu_i$. Символ D_t^α обозначает производную по t порядка α. Налагая различного рода ограничения на функции, входящие в уравнения (1) и (2), автор доказывает методом последовательных приближений существование и единственность решений систем (1) и (2) (теорема 1 и 2). В третьей теореме, вводя понятие повторных ядер $K_\alpha^{(\lambda)}(x,t)$ $(\alpha = 0,1,\ldots,\nu;\ \lambda = 1,2,3,\ldots)$ и резольвент $\Gamma_\alpha(x,t)$, автор выражает решения уравнений (2) через резольвенты Теорема устанавливает некоторые соотношения между повторными ядрами и резольвентами. В теореме 5 показано, что теория автора справедлива и для случая, когда повторные ядра и резольвенты стремятся к ∞ при $x \to t$. Первая теорема является обобщением теоремы Лалеско о нелинейных интегральных уравнениях (Volterra. V., Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, 1913, 89 — 90).

Остальные теоремы обобщают интегральные уравнения Вольтерра второго рода на случай, когда повторные ядра безграничны. Далее в работе указано, что метод автора применим к решению задачи Коши для систем уравнений

$$y_i^{(\nu_i+1)}(x) = \Psi_l[x, \hat{Y}(x)] \text{ или}$$

$$y_l^{(\nu_i+1)}(x) = \varphi_l[x, \hat{Y}(x)] + \int_{x_0}^x \Psi_i[x,t,\hat{Y}(t)]\,dt.$$

Для случая, когда $\nu_1, \ldots, \nu_n$ — все нули, формула, дающая решение системы (2), включает в себя формулу Пеано—Бекера (РЖМат, 1954, 4419 К) для решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, а для случая $n=1$, $\nu_1 > 0$ эта формула дает формулу Та Ли (Ta Li, Über die allgemeine lineare Differentialgleichung. Commentarie Mathematice, 1939, 12, 3) для решения линейных дифференциальных уравнений порядка ν_1. В. В. Васильев

478. Интегральное уравнение пульсаций кривых нулевой скорости в астероидальной эллиптической задаче. Хейнрих (An integral equation for pulsations of the zero velocity ovals in the asteroidal elliptical problem. Heinrich W. W.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1957, 2, № 2, 57—72 (англ.; рез. болг., русск.)

В интегро-дифференциальном соотношении $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - L - \int_{t_0}^t \frac{\partial 2U(x,y,z,t)}{\partial t}\,\partial t,$

где $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — координаты и скорости тела нулевой массы, U — силовая функция, L — постоянная интеграции, имеющем место в эллиптической ограниченной задаче трех тел, полагается $x=y=z=0$ и решается возникающее при этом интегральное уравнение. Заключение автора о том, что таким образом ему удалось найти уравнение кривых нулевой скорости, являющееся обобщением известных поверхностей Хилла в круговой задаче, референту представляется ошибочным.

Г. А. Мерман

479. Оптимизация линейной системы с переменным коэффициентом и с нестационарным входом. Шинброт (Optimization of time-varying linear systems with nonstationary inputs. Shinbrot Marvin), Trans. ASME, 1958, 80, № 2, 457—462 (англ.)

Предлагается прием для построения решения интегрального уравнения, к которому Бутон (Booton R. C., Jr, An optimization theory for time-varying linear systems with nonstationary statistical inputs, M. I. T. Dynamic Analysis and Control Laboratory, Cambridge, Mass. July, 1951, Meteor Report 72) свел задачу об оптимизации системы, подверженной воздействию случайного нестационарного процесса. Метод применим лишь в случае корреляционных функций определенного типа. Автор указывает, что корреляционные функции этого типа часто встречаются на практике. Метод иллюстрируется примерами. М. А. Айзерман

480. Замкнутое решение в случае полубесконечной полосы с разрывными краевыми условиями (II). Кацнер (A closed solution in the case of a semi-infinite plate with discontinuous boundary conditions. II. Kac-

ner Artur), Arch. mech. stosowanej, 1958, **10**, № 1, 56—80 (англ.; рез. польск., русск.)

Ч. I см. РЖМат, 1958, 3794. Полубесконечная прямоугольная тонкая плита загружена равномерно распределенной нагрузкой q. Длинные стороны ($x=0$ и $x=a$) плиты свободно оперты. Часть ($c \leqslant x \leqslant c+d$) короткой свободной стороны ($y=0$) загружена некоторыми распределительными моментами $M(x)$, величина которых определена по условию равенства нулю прогиба на том же участке свободного края.

Даются два способа решения задачи. В первом решение достигается представлением момента $M(x)$ в форме бесконечного ряда, коэффициенты которого определяются из бесконечной системы. Во втором — $M(x)$ определяется как решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$w(x) + \int_c^{c+d} K(x, z)\, M(z)\, dz = 0$$

К. В. Соляник-Красса

481. Проблема Милна с произвольной индикатрисой. Масленников М. В., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 5, 895—898

Исследуется интегральное уравнение, определяющее плотность излучения в плоскопараллельной рассеивающей и поглощающей среде, заполняющей полупространство $z>0$. Используя двустороннее преобразование Лапласа по переменному z, автор получает достаточные условия существования и единственности решения основного интегрального уравнения и асимптотические формулы, определяющие поведение решения на больших расстояниях от границы среды. Л. А. Чудов

482 К. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Быков Я. В., Кирг. ун-т. Фрунзе, 1957, 327 стр., илл., 15 р.

Книга содержит 7 глав. В ней собраны исследования автора, часть из которых была опубликована раньше. Основным вопросом гл. 1 является вопрос о единственности задачи Коши для уравнения

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u + F(x, u(\cdot)) + f(x), \qquad (1)$$

где H — линейный и F — линейный или нелинейный операторы из банахова пространства B в B, $x \in [\alpha, \beta]$. Решение ищется в виде $u(x) = Y(x)h$, где h — фиксированный вектор из B, а $Y(x)$ — линейный оператор из подпространства векторов $B_1 \subset B$, не зависящих от x, в B. Сначала изучается уравнение

$$\frac{du}{dx} = H(x)\, u \qquad (2)$$

и выясняется связь между обратимостью операторов $Y(x)$ ($Y(x)h$ — решение (2)) и единственностью решения задачи Коши для (2). Вводится понятие особенной точки (2), когда $Y(x_0)$ — необратимый оператор, и устанавливаются различные предложения об особенных точках. Выясняются условия разрешимости задачи Коши для (2) в особенных точках x_0 и устанавливаются предложения о поведении интегральных кривых уравнения (2) при $x \to x_0$. При этом вводится понятие особенного многообразия как множества векторов $\{b\}$ $b \in B_1$ для которых уравнение $Y(x_0)h = b$ относительно $h \in B_1$ имеет решение.

В гл. 2 изучаются линейные системы интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Путем использования свойств фундаментальной матрицы таких систем устанавливаются предложения о поведении интегральных кривых однородных систем в n-мерном фазовом пространстве. В гл. 3 устанавливаются необходимые и достаточные условия существования ограниченных, периодических и почти периодических решений линейных интегро-дифференциальных уравнений. При этом используются и некоторые общие предложения о решениях линейных операторных уравнений, которые устанавливаются в § 1 этой главы.

Основное содержание гл. 4 связано с кругом идей А. М. Ляпунова в теории устойчивости. Понятие и свойства характеристичных чисел переносятся на нормированные пространства и (в § 1) устанавливаются предложения о характеристичных числах решений линейных дифференциальных уравнений в таких пространствах, приводящие к оценке роста норм этих решений. Устанавливаются предложения об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, которые затем применяются к интегро-дифференциальным уравнениям. Изучаются нелинейные уравнения

$$\frac{du}{dx} = A(x)\, u + \Phi(x, u), \qquad (3)$$

где A — линейный и Φ — нелинейный операторы в банаховом пространстве, удовлетворяющие определенным условиям. Когда Φ удовлетворяет по u условию Липшица, устанавливаются предложения о единственности решения задачи Коши для уравнения (3), о сходимости последовательных приближений к решению, об устойчивости и асимптотической устойчивости решений. Предложения об ограниченности решений (теоремы 4. 3. 7. и 4. 3. 8.) для $x \in [a, +\infty]$ не используют условие Липшица. Аналогичные предложения устанавливаются для систем интегро-дифференциальных уравнений. В последних двух параграфах гл. 4 изучается вопрос об устойчивости решений уравнения $du/dt = A(t, x, u(\cdot))$, где A — оператор из B в B, удовлетворяющий дополнительным условиям, при помощи обобщенной функции (функционала) Ляпунова, и устанавливаются достаточные условия ограниченности решений задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков в гильбертовом пространстве.

В гл. 5 изучаются в банаховых пространствах линейные уравнения

$$(z-a)^i \frac{du}{dz} = H(z)\, u + \int_a^z K(z, t)\, u(t)\, dt + f(z), \qquad i = 0, 1$$

с голоморфными векторной и операторными функциями ($f(z)$, $H(z)$, $K(z, t)$) комплексных аргументов z и t. Классическим методом устанавливаются предложения о существовании единственного голоморфного решения, о продолжении этого решения и об особых точках решения, а также вид и свойства решений в зависимости от вида и свойств функций, входящих в уравнение. В последних параграфах (7 и 8) изучаются системы интегро-дифференциальных уравнений как с постоянными пределами, так и с постоянным контуром интегрирования.

В гл. 6 рассматриваются некоторые свойства произведений линейных операторов, которые применяются к изучению интегро-дифференциальных уравнений. В гл. 7 устанавливаются теоремы существования решений для систем нелинейных интегральных уравнений, к которым сводятся некоторые типы интегро-дифференциальных уравнений. Доказательство использует разложение матричного ядра по собственным функциям.

М. М. Вайнберг

См. также: 366, 369, 386, 565, 600, 873

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

483. Об одной вариационной задаче Гильберта. Никольский С. М., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 4, 573—575

Решается вариационная задача, являющаяся обобщением соответствующей двумерной задачи Гильберта (Gilbert D., Math. Ann., 1904, **59**, 161); кроме того, исследуется экстремальная функция этой задачи и даются различные ее характеристики в терминах, не связанных с вариационной постановкой вопроса.

Пусть Λ — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность в n-мерном евклидовом пространстве R^n. Пусть функция f определена и имеет обобщенные частные производные первого порядка на $R^n \setminus \Lambda$ и пусть $D[f] \equiv \int\limits_{R^n} \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 d(R^n)$; тогда если $D[f] < \infty$, то для почти всех точек $Q \in \Lambda$ существуют пределы

$$\lim_{P \to +Q} f(P) = f_+(Q), \quad \lim_{P \to -Q} f(P) = f_-(Q)$$

соответственно со стороны внутренней (положительной) и внешней (отрицательной) нормалей к поверхности Λ. Совокупность функций φ, определенных на Λ и таких, что существует функция f, определенная на $R^n \setminus \Lambda$, для которой $D[f] < \infty$ и $f_+ = \varphi$, обозначается через H. Пусть на Λ заданы функция $\varkappa(Q) \in H$ и непрерывно дифференцируемые функции $a(Q)$ и $b(Q)$, причем $a(Q) \neq 0$. Пусть, далее, Δ — $(n-1)$-мерный параллелепипед в R^n, не пересекающийся с Λ. Через $\mathfrak{M}$ обозначается совокупность таких функций f, что: 1) f определена вместе со своими обобщенными частными производными первого порядка в $R^n \setminus \Lambda$, причем $D[f] < \infty$; 2) $af_+ - bf_- = \varkappa$ на Λ; 3) $\int\limits_\Delta f d\Delta = 0$.

В случае $\varkappa = 0$ соответствующий класс $\mathfrak{M}$ обозначается через $\mathfrak{M}_0$. Доказывается, что в классе $\mathfrak{M}$ существует единственная функция u, реализующая минимум функционала $D[f]$ в классе $\mathfrak{M}$, при этом функция u гармоническая в $R^n \setminus \Lambda$. Доказывается также, что для того чтобы функция u реализовала $\min\limits_{\mathfrak{M}} D[f]$, необходимо и достаточно каждое из следующих условий:

а) $u \in \mathfrak{M}$ и $D[u,f] \equiv \int\limits_{R^n} \sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} dR^n = 0$

для всех $f \in \mathfrak{M}_0$;

б) $u \in \mathfrak{M}$, u — гармоническая функция в $R^n \setminus \Lambda$ и для всех $\varphi \in H$ имеет место

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_\Lambda \left[b \frac{\partial u(Q\delta)}{\partial n} - a \frac{\partial u(Q,-\delta)}{\partial n} \right] \varphi(Q)\, d\Lambda = 0,$$

$$\int\limits_{\sigma_\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 d\sigma_\rho = O(\rho^{1-\varepsilon}) \text{ при } \rho \to \infty,$$

где функция u в достаточно малой окрестности Λ представлена как функция точек $Q \in \Lambda$ и расстояния δ по нормали n к поверхности Λ.

В случае плоскости, т. е. при $n = 2$, имеет место еще и следующее условие:

в) функция u является гармонической функцией в $R^2 \setminus \Lambda$, $u \in \mathfrak{M}$ и для любой сопряженной к ней функции v для почти всех s (s—переменная длина дуги контура Λ) на Λ существуют предельные значения v_+ и v_- такие, что

$$\int_0^l \mu(s)\, ds = 0, \quad \nu(s) + \int_0^s \mu(t)\, dt + \lambda_0 = 0,$$

где $\mu(s) = a'v_- - b'v_+$, $\nu(s) = av_- + bv_+$, λ_0 — зависящая от v постоянная, l — длина контура Λ.

Кроме этого, формулируются несколько лемм, необходимых для доказательства указанных теорем, представляющих, впрочем, и самостоятельный интерес.

Л. Д. Кудрявцев

484. Вариационное исчисление без применения понятия интеграла. Зигель (Integralfreie Variationsrechnung. Siegel Carl Ludwig. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math-phys. Kl. IIa, 1957, № 4, S. 81—86) (нем.)

Работа содержит результат о гладкости решения вариационной задачи в параметрической форме с простыми интегралами.

Пусть функция $F(x, u)$ определена для всех $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из некоторой области и для всех $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и удовлетворяет следующим условиям: для всех действительных $\lambda > 0$ $F(x, \lambda u) = \lambda F(x, u)$; дифференцируема по u и положительна для $u \neq 0$; непрерывно дифференцируема по x; строго выпукла по u, т. е. для любых векторов u, v выполняется

$$F(x, u+v) \leqslant F(x, u) - F(x, v),$$

причем равенство достигается только в том случае, когда u, v имеют одинаковые направления. Тогда в задаче с неподвижными концами, если кривая C из области G дает минимум длине в финслеровой метрике, определяемой функцией $F(x, \dot{x})$, то C обладает непрерывно меняющейся касательной и удовлетворяет дифференциальному уравнению Эйлера. При доказательстве не используется понятие интеграла Лебега, так как финслерова длина кривой определяется предельным переходом с помощью полигонов, вписанных в данную кривую (интеграл Вейерштрасса), а первые вариации заменяются соответствующими конечными суммами.

Ю. В. Глебский

485. Замечания о вариационных задачах, неявных функциях и множителях Лагранжа. Шефке (Bemerkungen über Variationsrechnung, implizite Funktionen und Lagrangesche Multiplikatoren. Schäfke Friedrich Wilhelm), Math. Z., 1957, **67**, № 3, 252—266 (нем.)

В вариационных задачах с интегралами $\int\limits_{t_1} L(t, x, x')dt$ иногда приходится опускать предположение о дифференцируемости функции L по t. Автор замечает, что этот отказ от дифференцируемости обосновывается (даже в случае теории Гамильтона — Якоби) применением модифицированной теоремы о неявных функциях, в которой не требуется дифференцируемость по некоторым из независимых переменных. Автор формулирует и доказывает такую теорему в терминах пространства Банаха. Это является «теоремой в большом» в специальном смысле, которая позволяет определить решение в окрестности заданного компактного множества. Доказатель-

ство локальной теоремы, данное Хильдебрандтом (Hildebrandt) и референтом (Trans. Amer. Math. Soc., 1927, **29**, 127—153), можно слегка изменить и получить теорему автора «в малом». Однако доказательство автора для теоремы в большом, по-видимому, проще, чем доказательство, данное референтом для случая, когда предполагается выполненным требование о дифференцируемости по всем переменным (Trans. Amer. Math. Soc., 1927, **29**, 514—552). Автор применяет свою теорему также для вывода правила множителей в случае проблемы минимума с дополнительными условиями в пространстве Банаха. Его предположения в некотором отношении являются более сильными, чем у Голдстайна (Goldstine, Bull. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, 388—394; 1940, **46**, 142—149). В частности, автор делает предположение о существовании проекции пространства независимых переменных на подпространство. L. M. Graves

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 4, 429

486. О критических точках слабонепрерывного функционала в пространствах Банаха. Цкирия К. Е., Тбилисис математикис институтис шромеби. Сакартвелос ССР мецниереба академиа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та. АН ГрузССР, 1957, **24**, 89—110

Исследуется вопрос о существовании условно критических точек слабонепрерывного функционала $f(x)$ на гиперповерхности P из вещественного регулярного банахова пространства E с базисом. Предполагается, что $f(x)$ — дифференцируемые по Фреше функционал, определенный для $x \in E$. Гиперповерхность P дана системой уравнений $\varphi_i(x) = 0$ $(i = 1, ..., n)$, где $\varphi_i(x)$ — также дифференцируемые функционалы.

Задача на условный экстремум функционала $f(x)$ приводится к исследованию нелинейного операторного уравнения

$$L_f x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_{\varphi_i} x, \qquad (1)$$

где L_f и L_{φ_i} — градиенты соответственно функционалов $f(x)$, $\varphi_i(x)$; λ_i — множители Эйлера — Лагранжа.

В §§ 1—2 содержится постановка задачи и некоторые известные понятия и теоремы. В § 3 рассматривается случай $n = 1$, $E \equiv L_p (p > 1)$ и P — слабо замкнутая гиперповерхность. Доказывается существование условно критической точки $f(x)$ на P.

В § 4 исследуется случай $n = 1$, E — регулярное пространство Банаха с базисом, P дана уравнением $\varphi(x) = 1$, где $\varphi(x)$ дважды дифференцируемый выпуклый функционал Минковского. В § 5 доказана теорема существования условно критической точки $f(x)$ на P, когда n — любое натуральное число и L_f и L_{φ_i} удовлетворяют некоторым условиям. В § 6 при $E \equiv L_p$ указывается способ, упрощающий доказательства § 5.

Исследования автора являются обобщением некоторых результатов Люстерника — Шнирельмана и референта. Э. С. Цитланадзе

487. О существовании собственных функций для уравнения Шредингера. Жислин Г. М., Докл. АН СССР, 1957, **117**, № 6, 931—934

Исследуется строение окрестности нижней границы спектра оператора энергии для системы n электронов в поле неподвижного ядра

$$H_\Psi = -\sum_{i=1}^{n} a_i \Delta_i \Psi - \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\Psi}{r_i} + \sum_{i<j}^{1,n} c_{ij} \frac{\Psi}{r_{ij}}.$$

Здесь $\Psi = \Psi(P)$, $P = (x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$,

$$\Delta_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}, \quad r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

$$a_i, b_i, c_{ij} > 0, \; j, i = 1, ..., n.$$

На основании вариационных соображений показано, что если $b_i > \sum_{j \neq i}^{1,n} c_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$, то нижняя граница спектра принадлежит дискретному спектру и выше нее существует бесконечная последовательность собственных значений, кратность каждого из которых конечна, причем соответствующие собственные функции дифференцируемы любое число раз и удовлетворяют дифференциальному уравнению в каждой точке, не лежащей ни на одном из многообразий $r_i = 0$, $i = 1, ..., n$; $r_{ij} = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Л. Д. Фаддеев

488. Вариационное исчисление, дифференциальные формы и геодезические поля. Дедеккер (Calcul des variations, formes différentielles et champs géodésiques. Dedecker P.), Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 17—34 (франц.)

Автор излагает свою теорию многомерных вариационных задач, в которой применяются внешние дифференциальные формы, косые произведения и пучки (см. также Colloq. de topologie et géométrie différentielle, Strasbourg. 1952, № 3, Bibliothèque Nat. et Univ. Strasbourg, 1953).

Свободная вариационная задача на многообразии V_n формулируется при помощи p-форм w. Задача заключается в нахождении экстремальной цепочки (состоящей из сингулярных дифференциальных кубов), т. е. такой цепочки, для которой первая вариация в случае фиксированной границы равна нулю. Экстремальные многообразия находятся в виде интегралов так называемой первой ассоциированной системы из w. Связанная задача содержит форму w и идеал U из алгебры дифференциальных форм. Тогда вариации цепей должны быть интегралами идеала U для каждого значения параметра. Главное в теории является пространство G, являющееся расслоенным пространством над пространством V_n^p из p-касательных элементов в пространстве V_n, а также некоторая форма в G, экстремальные цепи которой проектируются на экстремали заданной в V_n связанной задачи.

Координаты в расслоенной форме образуют множители Лагранжа. Метод состоит в рассмотрении некоторых частных производных в качестве новых переменных и сложении их с дополнительными условиями, умноженными на множители Лагранжа; это означает, что новые переменные на самом деле являются частными производными (в обычном плоском случае этому соответствует y' как новая переменная и $dy - y'dx$ как дополнительное условие). Указывается также связь с инвариантным интегралом Э. Картана. В ходе доказательства автор обобщает все классические концепции в терминах косых произведений: геодезическое поле, лагранжиан, канонические координаты, гамильтониан, нерегулярный элемент, уравнения Гамильтона — Якоби (последние являются уравнениями в частных произведениях с $(p-1)$-формами в качестве переменных). Кратко указывается, как увязать существующие теории с теорией автора. H. Samelson

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 1, 50—51

489. Теорема единственности типа Бернштейна для минимальных поверхностей в цилиндрических координатах. Ниче (A uniqueness theorem of Bernstein's type for minimal surfaces in cylindrical coordinates.

Nitsche Johannes C. C.), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 6, 859—864 (англ.)

С. Н. Бернштейн доказал, что минимальная поверхность $z=z(x,y)$, однозначно проектирующаяся на всю плоскость xy, есть плоскость. Автор рассматривает минимальные поверхности, которые в цилиндрических координатах θ, r, z задаются уравнениями вида

$$r = f(z, \theta),$$

где f определена для всех z и θ, периодична по θ с периодом 2π, неотрицательна и дважды непрерывно дифференцируема.

Доказывается, что если сечения минимальной поверхности, допускающей такое задание, плоскостями $z=$ $=$ const,—замкнутые выпуклые кривые, то эта поверхность есть поверхность вращения и, следовательно, катеноид. А. В. Погорелов

490. Математические проблемы астронавтики. Лоден (Mathematical problems of astronautics. Lawden D. F.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 337, 168—179 (англ.)

Вначале рассматривается вопрос о законе движения точки переменной массы. Выводится уравнение И. В. Мещерского и закон К. Э. Циолковского (ссылки отсутствуют). Затем рассматривается движение ракеты без учета силы тяжести, вращения Земли и аэродинамических сил и ставится задача о наивыгоднейшем расходовании топлива при фиксированном времени взлета. Из вариации функционала

$$c \ln \frac{m_0}{m_A} = \int_0^T \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}\, dt$$

устанавливается дробно-линейный закон для тангенса угла тангажа. При учете горизонтальных и вертикальных сил, действующих на ракету, автор анализирует уравнения движения

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + u\frac{\partial f}{\partial y} + v\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

в плоскости годографа (u,v) на основе своей предыдущей работы (Lawden D. F., J. Amer. Rocket Soc., 1953, 23, 360). Обсуждаются некоторые частные задачи о траектории полета (переход с одной орбиты на другую). И. С. Аржаных, А. И. Зельтин

491 К. Вариационное исчисление. Байчаи (Variációszámitás. Bajcsay Pál (Müszaki Matematikai Gyakorlatok. C. II). Budapest, Tankönyvkiado, 1957, 86 l., 8.50 Ft.) (венг.)

Книга представляет собой учебник по вариационному исчислению, издана в серии «Пособии для студентов технических высших учебных заведений».

См. также: 228, 435, 820, 821, 822 **А. Kósa**

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

492. Об определении $0^\circ=1=\infty^\circ$. Паше (Zur Definition $0^0=1=\infty^\circ$ Paasche I.), Elem. Math., 1958, **13**, № 3, 61—64 (нем.)

493. Еще раз о сумме $\sum_{i=1}^{n} i^p$. Йонг (Nog iets over $\sum_{i=1}^{n} i^p$. Jongh P. C. de), Euclides (Nederl.), 1958, **33**, № 7, 215—219 (гол.)

494. Определение меры линейных точечных множеств. Берг (Ma bestimmung linearer Punktmengen. Berg Lothar), Math. Nachr., 1957, **16**, № 3—4, 195—205 (нем.)

В работе используются обозначения работы автора (РЖМат, 1957, 7953).

Пусть M — множество чисел x, параметр a_n которых удовлетворяет, самое большое для конечного числа значений n, соотношению $a_n = a_n^* + k$, где k — некоторое фиксированное натуральное число или нуль. Пусть M^* — множество всех чисел x, параметр a_n которых удовлетворяет соотношению $a_n = a_n^* + k$, самое большое для конечного числа значений n, которое может быть также неотрицательным целым числом k.

Доказывается: Множество M^* имеет меру 1, если все множества $M = M_k$ имеют меру 1, и меру 0, если только для одного k мера M_k равна нулю.

Приводятся также примеры, в которых множество M имеет меру 0 или 1. М. Д. Калашников

495. Последовательности итераций из n функций. Щедрова Н. С., Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та, 1957, вып. 2, 102—114

496. О сходимости $\Phi a_i/1$. Фаринья (Sur la convergence de $\Phi a_i/1$. Farinha João), Portugaliae math., 1954, **13**, № 1, 145—148 (франц.)

Рассматривается непрерывная дробь $\Phi a_i/1 = 1/1 + a_2/1 + a_3/1 + \ldots$, где a_k — функции комплексного переменного, определенные в некоторой области D. Теорема 1 устанавливает условия равномерной сходимости $\Phi a_i/1$ в D. Теорема 2 дает условие сходимости $\Phi a_i/1$ в случае, когда $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ($|a| < 1/4$). Отметим, что теорема 1 является частным случаем одной теоремы Скотта и Уолла (Scott, Wall, Trans. Amer. Math. Soc., 1940, 47, 155—172, стр. 163. теорема 3. 4). С. И. Зуховицкий

497. Об элементарных симметрических функциях. Кришная, Субрахманьям (On elementary symmetric functions. Krishnaiah P. V., Subrahmanyam N. V.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 3, 364—369 (англ.)

Пусть на (a, b) заданы три элементарные симметрические функции $u_1(x_1, x_2, x_3) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$, $u_2(x_1, x_2, x_3) = f(x_2)f(x_3) + f(x_3)f(x_1) + f(x_1)f(x_2)$, $u_3(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)f(x_2)f(x_3)$.

Известно (Харди Г. Х., Курс чистой математики Изд-во ин. лит., 1949, 334, пример 20); что если функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b), а между функциями u_i существует функциональное соотношение $\varphi(u_1, u_2, u_3) \equiv 0$, где φ — действительная дифференцируемая функция, то тогда

$$f(x) \equiv \text{const}. \qquad (A)$$

Устанавливаются менее жесткие достаточные условия, а также необходимые условия, для выполнения тождества (A). В качестве примера может служить теорема: Если $f(x)$ является действительной функцией и между элементарными симметрическими функциями $u_1, u_2, \ldots, u_n$ от $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ существует ква-

зифункциональное соотношение, то тогда множество значений функции $f(x)$ является нигде не плотным.

При этом говорят, что между функциями $u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ существует квазифункциональное соотношение, если всякий раз, когда система уравнений (с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$$

окажется совместной, найдется индекс $\lambda = \lambda(a_1 a_2, \ldots, a_n)$ такой, что система уравнений

$$u_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_\lambda,$$

$$u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i,\ i \neq \lambda,$$

будет совместной не больше чем для счетного множества значений u_λ.

Примечание референта. На стр. 366 в правой части (5) вместо $u_r(y, y_1, \ldots, y_n)$ должно стоять $u_r(y_1, \ldots, y_n)$. В. К. Дзядык

498. Об одном свойстве монотонных выпуклых функций. Секереш (On a property of monotone and convex functions. Szekeres G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 3, 351—353 (англ.)

Устанавливается, что всякая строго возрастающая функция $f(x)$, имеющая в (a, b) непрерывную вторую производную, представима в виде

$$f(x) = \psi[\varphi(x)],$$

где φ и ψ — монотонно возрастающие функции и φ выпукла, а ψ вогнута.

Если, кроме того, $f(x)$ ограничена, то φ может быть взята также ограниченной тогда и только тогда, когда при всех $d \in (a, b)$ сходится интеграл

$$\int_a^b e^{p(y)}\,dy,\ p(y) = \int_a^v [f''_+(t)/f'(t)]\,dt.$$

Примечание референта. На стр. 352 в соотношении

$$\frac{d}{dx}\lg\varphi'(x) \geqslant f''(x)/f'(x) \geqslant \frac{d}{dx}\lg\varphi'_0(x)$$

последняя часть неравенства неверна. Тем не менее рассуждения автора останутся справедливыми, если часть $\geqslant \frac{d}{dx}\lg\varphi'_0(x)$ опустить. В. К. Дзядык

499. Мультипроизводные и мультиинтегралы. Менгер (Multiderivatives and multi-integrals. Menger Karl), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 8, Part. 2, 58—70 (англ.)

В качестве обобщения обычной производной ${}_1Df(a)$ функции одного переменного $f(x)$ в точке a вводится понятие бипроизводной ${}_2Df(a, b)$ в паре точек a, b, определяемой как предел частного от деления приращения линейной интерполирующей при переходе от узлов a, b к узлам a', b' на $(ab - a'b')$

$$\text{при} \begin{cases} a' + b' - a - b = 0 \\ a' \to a \\ b' \to b \end{cases}$$

(значениями ${}_2Df$ являются линейные функции). Намечается определение мультипроизводной ${}_nDf(a_1, \ldots, a_n)$ в системе n точек $a_1, \ldots, a_n$ (значениями ${}_nDf$ являются полиномы $(n-1)$-й степени) и ставится вопрос об обратной операции — мультиинтегрировании.

П. И. Романовский

500. Асимптотическое разложение интегралов, содержащих параметр. Берг (Asymptotosche Entwicklung von Parameterintegralen. Berg Lothar), Z. angew. Math. und Mech., 1957, **37**, № 7-8, 246—247 (нем).

Пусть $k(s, t)$ — аналитическая функция от t в круге с центром $t = x(s)$ и пусть $G(s, t) = k(s, t)\,K(s, t)$. Тогда часто существует такое число α, что разложение

$$\int_0^\infty G(s, t)\,dt \sim \sum_{n=0}^\infty (n!)^{-1} k_n(s, x(s)) \int_\alpha^\infty K(s, t)(t - x(s))^n\,dt,$$

$$k_n = \frac{\partial^n k}{\partial t^n},$$

является асимптотическим при $s \to \infty$. Приводятся примеры. Г. К. Энгелис

501. Об интегралах $I = \int_0^{n/2} [f(x) - f(2x)]\cot x\,dx$.

Лагранж (Sur des intégrales $I = \int_0^{n/2} [f(x) - f(2x)]\cot x\,dx$. Lagrange J.), Mathesis, 1958, **67**, № 1—3, 8—10 (франц.)

502. Новый и общий метод вычисления несобственных интегралов. Ван Латем (Une méthode nouvelle et générale de calcul des intégrales généralisées. Van Laethem Marcel), Techn. tijdschr. U. I. Lv., 1956, **84**, № 2, 38—54 (франц., флам.)

В книге автора (РЖМат, 1957, 4110) предложен способ приближенного вычисления сходящихся интегралов вида $\int_a^b y\,dx$, где $y = y(x)$ — бесконечно дифференцируемая и положительная при $a \leqslant x < b$ функция, стремящаяся к бесконечности, когда $x \to b$. Этот способ состоит в разложении $b - x$ по степеням интеграла $\int_x^b y\,dx$ и последующем обращении полученного ряда. Указанный прием применяется для x, близких к b, интеграл же, распространенный на $[a, x]$, вычисляется как обычно.

В работе сущность метода не излагается, а приводятся лишь два численных примера, заимствованных из упомянутой книги. Ознакомление с последней необходимо для понимания работы. И. П. Натансон

503. Интегральное представление одного класса функций. Добрев (Интегрално представяне на една класа функции. Добрев Д.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1958, **3**, № 1, 43—50 (болг.; рез. русск., нем.)

Всякая функция $f(x, y)$, заданная на всей плоскости и такая, что

$$f(ax, ay) = |a|\,f(x, y),$$

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqslant f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2),$$

допускает представление

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y - sx|\,d\alpha(s) + A|x|,$$

где $A \geqslant 0$ и $\alpha(s)$ — возрастающая функция, для которой $\int_{-\infty}^{+\infty} |s|\,d\alpha(s) < +\infty$. И. П. Натансон

504. О решениях некоторого функционального уравнения. Байрактаревич (Sur les solutions d'une équation fonctionnelle. Bajraktarevic Mahmud. Hrvatsko Prirodoslovno Društvo. Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II. 1953, **8**, 297—300) (франц.)

Анастасиадис (Anastassiadis. Bull. Sci. Math., 1952, **76**, № 2, 148—160) явно определил единственную поло-

жительную функцию $f(x)$, $x>0$, которая является полуубывающей 1 или полувыпуклой 1 и которая удовлетворяет функциональному уравнению $f(x)f(x+1)=1/P(x)$, где $P(x)=(x+\rho_1)\dots(x+\rho_k)$ $(\rho_1,\dots,\rho_k\geqslant 0)$. Опуская ограничения $f(x)>0$ и $x>0$ автор усиливает этот результат. E. F. Beckenbach

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 962

505. Линейные функциональные уравнения. Янг (The linear functional equation. Young G. S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 1, 37—38 (англ.)

Доказана теорема: Если $F(x)$—решение уравнения $F(x+y)=F(x)+F(y)$, непрерывное на интервале $[a,b]$, то оно имеет вид $F(x)=mx$ для некоторых действительных чисел m. Решение уравнения $f(xy)=f(x)+f(y)$ есть $f(x)=k\log x$. Э. А. Чернышенко

506 К. Математический анализ. Бак (Advanced calculus. Buck R. Craighton. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1956, VIII, 423 pp., ill.) (англ.)

Курс математического анализа, рассчитанный на читателя уже изучавшего дифференциальное и интегральное исчисление по руководствам более элементарного характера. В связи с этим изложение не везде имеет систематический характер, и многие вопросы, преимущественно технического порядка, как, например, вывод формул дифференцирования, опускаются. Изложение ряда вопросов в методическом отношении оригинально. Важнейшие особенности этого рода ниже указываются.

В разделе дифференциального исчисления функций нескольких переменных на первый план выдвигается понятие отображения области пространства E_n в E_m определяется непрерывность отображения и на первых же порах доказывается, что прообразом открытого множества является открытое множество. Далее специально изучаются линейные отображения, что позволяет ввести естественным образом дифференциал отображения и матрицу Якоби. Для отображения устанавливается аналог формулы конечных приращений Лагранжа, используемый при доказательстве условий локальной обратимости отображения. Именно, пусть, например, $u=f(x,y,z)$, $v=g(x,y,z)$, $w=h(x,y,z)$—отображение класса C^1E_3 в E_3. Для пары точек $p''(x'',y'',z'')$, $p'(x',y',z')$ найдутся на сегменте $p'p''$, их соединяющем, три точки p_1,p_2,p_3 такие, что $(u''-u', v''-v', w''-w')$ будет получаться из $(x''-x', y''-y', z''-z')$ линейным преобразованием с матрицей

$$\begin{pmatrix} f_x'(p_1) & f_y'(p_1) & f_z'(p_1) \\ g_x'(p_2) & g_y'(p_2) & g_z'(p_2) \\ h_x'(p_3) & h_y'(p_3) & h_z'(p_3) \end{pmatrix}$$

Получаемая затем теорема о локальном обращении отображения применяется к вопросам функциональной зависимости и теории неявных функций.

Второй особенностью является включение в книгу элементов теории внешних форм Картана. Понятие о дифференциальных формах появляется в связи с теорией криволинейных и кратных интегралов. Например, форма $\omega=A(x,y)dx+B(x,y)dy$ вводится как функционал, определенный на гладких дугах γ: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$ равенством $\omega(\gamma)=\int_a^b [A(\gamma)\varphi'+B(\gamma)\psi']\,dt$.

Для дифференциальных форм вводится внешнее умножение, а затем внешнее дифференцирование. Эти понятия прилагаются к формулам Грина, Стокса, Гаусса, получающим единообразную форму записи.

Из других характерных черт изложения можно указать, что интегральное исчисление в книге начинается с теории двойного интеграла с тем, чтобы избежать смазывания существа понятия интеграла, имеющего место при быстром появлении формулы Ньютона—Лейбница. Для интегралов широко используются такие обозначения как $\iint_D f$, $\int_a^b f(x)$; этим подчеркивается, что правило замены переменной не имеет «автоматического» характера.

При сравнительно небольшом объеме книга содержит, не считая отсутствующих в ней вопросов элементарного характера, а также рядов Фурье, большую часть материала, входящего, например, в программы технических вузов с повышенным курсом математики. Книга снабжена тщательно выполненными иллюстрациями и значительным числом интересных упражнений с ответами и указаниями в конце книги. В. В. Рыжков

507 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. Изд. 6-е, испр. Банах (Rachunek różniczkowy i całkowy. T. 1. Wyd. 6 popr. Banach Stefan. Warszawa, PWN, 1957, 305 s., il., T. 1-2, 32 zł), Przew. bibliogr., 1957, **13**, № 41, 565 (польск.)

508 К. Дифференциальное и интегральное исчисление. 1-я часть, 3-е изд. Гронец (Diferenciálny a integrálny počet. 1. diel. 3. vyd. Hronec Jur. Bratislava, SVTL, 1957, 288 s., il., 22 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. Slov. knihy, 1957, 8, № 6, 183 (словацк.)

509 К. Справочник по анализу, разностным и дифференциальным уравнениям. Коган, Норман (Handbook of calculus, difference and differential equations. Cogan Edward J., Norman Robert Z. Englewood Cliffs, N. J. Prentice—Hall, Inc., 1958, XII, 263 pp., ill.) (англ.)

В справочнике, кроме материала по анализу и дифференциальным уравнениям, даны свойства часто используемых функций, а также таблицы значений некоторых трансцендентных функций и таблица интегралов. Имеется классификация дифференциальных уравнений и даются указания, как решать тот или иной класс уравнений. Приводятся таблицы для разностей, разностных уравнений и сумм. Книга предназначена для студентов, изучающих анализ и дифференциальные уравнения, а также для инженеров. В. К. Захаров

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

510. Об одном инвариантном свойстве альтернирующего процесса суммирования при возрастающей длине отрезков исходной последовательности. Паше (Über eine invariante Eigenschaft eines alternierenden Summationsprozesses bei wachsender Abschnittslänge der Ausgangsfolge. Paasche Ivan), Math. Ann., 1957, **134**, № 2, 95—100 (нем.)

Даются определения и изучаются некоторые типы преобразований — «процессы суммирования» (кратко обозначим B^k, A^k, C^k) над последовательностью натуральных чисел 1,2,3,4,...

Основная теорема B^k преобразует последовательность (1) в себе при $k\equiv 0$; $1 \bmod 4$ и в последовательность 1,—2, 3,—4,... при $k\equiv 2,3 \bmod 4$.

Описываются также свойства преобразований A^k и C^k. Замечены опечатки в формулах (2′). Библ. 7 назв. М. П. Щеглов

511. Об одном методе суммирования расходящихся рядов. Маравич (О једном поступку збирљивости дивергентних редова. Маравић Манојло), Зб. радова. Српска АН, 1957, кн. 55, 5—52 (сербо-хорв., рез. франц.)

Автор называет функцию $A(t)$ суммируемой методом G^x_θ к сумме A, если $\lim_{x\to\infty} G^x_\theta(x)=A$, где

$$G^x_\theta(x)=\int_0^x \left[1-e^{(t-x)x^{-\theta}}\right]^x dA(t) \quad (0<\theta<1,\ x>0).$$

1. Доказывается одна теорема абелева типа и теорема о выпуклости для метода G^x_θ.

2. Показывается, что $\sigma^k(x) = A + O(x^{k(\theta-1)})$ при $x\to\infty$ следует $\lim^{x\to\infty} G^x_\theta(x) = A$ для всех $\varkappa > k$, где $\sigma^k(x)$ — риссовские средние порядка k функции $A(t)$, а k — натуральное число.

3. Устанавливается равносильность методов $G^x_\theta(\varkappa>0)$ для ограниченных функций $A(t)$.

4. Показывается, что условие

$$\lim_{t\to\infty} \min_{t<\tau<t+\varepsilon t} \theta[A(\tau) - A(t)] \geqslant -w(\varepsilon)$$
$$(\lim_{\varepsilon\to 0} w(\varepsilon) = 0)$$

является тауберовым условием для метода G^x_θ.

5. Применяется метод G^x_θ к суммированию общих рядов Фурье. Г. Ф. Кангро

512. Две заметки о формальных степенных рядах. Абхьянкар (Two notes on formal power series. Abhyankar Shreeram), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, 7, № 5, 903—905 (англ.)

Статья состоит из двух независимых частей.

1. Пусть k — произвольное поле и пусть L_n — произвольное кольцо формальных рядов $k[[x_1, \ldots, x_n]]$ от n переменных с коэффициентами из k. m элементов $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ называются аналитически независимыми, если существует элемент

$$0 = H(Z_1, \ldots, Z_m) \in k[[Z_1, \ldots, Z_m]]$$

такой, что

$$H(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0.$$

В противном случае элементы $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ называются аналитически независимыми. Доказывается теорема: При $n>1$ в L_n содержится бесконечно большое число аналитически независимых элементов.

2. Пусть $k(x)$ — замкнутое алгебраическое поле с характеристикой $p\neq 0$. Устанавливается разложение на множители

$$Z^p - X^{p-1}Z - 1 = \prod_{i=0}^{p-1} (Z + iX - \sum_{i=0}^{\infty} X^{1-p^i}).$$

Д. П. Костомаров

513. Некоторые замечания о «функции запаздывания». Арато (Megjegyzések a «késés—függvénnyel» kapcsoltban. Arató Mátyás), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, 1, № 1-2, 217—221 (венг.; рез. русск., англ.)

514. Асимптотическое разложение функций, представимых рядами Лежандра. Алянчич (Développement asymptotique des fonctions représentables par les séries de Legendre. Aljančič S.), Publs Inst. math. Acad. serbe des sci., 1954, 6, 115—124 (франц.)

Доказана теорема: Пусть a_ν, $\nu = 0, 1, \ldots$ — вполне монотонная последовательность, а $b_\nu(x)$ допускает для всех $\nu = 0, 1, \ldots$ асимптотическое разложение вида

$$b_\nu(x) = \frac{p_0(\nu)}{q_0(x)} + \frac{p_1(\nu)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{p_m(\nu)}{q_m(x)} + o\left(\frac{1}{q_m(x)}\right), \quad x\to\infty,$$

по последовательности обратных величин функций $g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots$, стремящееся к бесконечности вместе с x, где $p_\mu(\nu)$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$ — многочлены от ν не более чем s-го порядка.

Если, кроме того, для целого $k \geqslant s$

$$q_m(x) \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \nu^{-1/2} \,|\, \Delta^{k+1} b_{\nu-k-1}(x) \,| \to 0, \quad x\to\infty,$$

то существует, для $0<\theta<\pi$

$$G(x, \theta) = \lim_{r=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_\nu(x) P_\nu(\cos\theta) r^\nu$$

и $G(x, \theta)$ допускает асимптотическое разложение вида

$$G(x, \theta) = \frac{\Pi_0(\theta)}{q_0(x)} + \frac{\Pi_1(\theta)}{q_1(x)} + \ldots + \frac{\Pi_m(\theta)}{q_m(x)} + o\left(\frac{1}{q_m(x)}\right),$$
$$x\to 0,$$

где $\Pi_\mu(\theta) = \lim_{r=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\mu(\nu) P_\nu(\cos\theta) r^\nu$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$

а $P_\nu(\cos\theta)$ — многочлены Лежандра.

Разложение (1) равномерно в $0<\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$.

В. К. Захаров

515. Локализация на сферах. Шапиро (Localization on spheres. Shapiro Victor L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 86, № 1, 212—219 (англ.)

Пусть Ω — единичная $(k-1)$-мерная сфера в евклидовом пространстве $k\geqslant 3$ измерений, а $Y_n(x)$ — сферическая функция порядка n, определенная на Ω, для которой $Y_n(x) = O(n^\beta)$ $(\beta\geqslant 0)$ равномерно по $x\in\Omega$.

Рассматривая ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x)$, автор называет функцией Римана, связанной с S, выражение

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^w Y_n(x) [n(n+p)]^{-w},$$

где $p = k-2$, а w — наименьшее целое число, превосходящее $(1+\beta)/2$. В этих обозначениях доказывается следующая теорема: Если функция Римана $F(x)$, связанная с S, принадлежит к классу C^{2w} в некоторой области D, расположенной на Ω, то в любой замкнутой области, содержащейся целиком внутри D, ряд S равномерно суммируем (C, α), $\alpha > p + 2w$, к сумме $\Delta^w F(x)$.

Здесь $\Delta^w = \Delta(\Delta^{w-1})$, Δ — оператор Лапласа на Ω, а под суммируемостью (C, α) ряда S понимается его суммируемость по Чезаро (Харди, Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951, стр. 125).

Полученный результат обобщает на ряды по сферическим функциям теоремы локализации, доказанные Риманом и Зигмундом для тригонометрических рядов (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.— Л., ГОНТИ, 1939, стр. 242). М. Б. Капилевич

516 К. Ряды [математические]. Элементарный очерк. Изд. 3-е, испр. и доп. Маркушевич А. И. М., Гостехиздат, 1957, 187 стр., илл., 3 руб.

Книга имеет целью в доступной форме познакомить читателя, имеющего математическую подготовку девяти классов средней школы, с основными свойствами рядов и способами изображения простейших функций рядами, не прибегая к формуле Тейлора. Приводятся некоторые сведения по истории математики.

Содержание книги: Гл. I. О функциях; Гл. II. Бином Ньютона; Гл. III. Бином Ньютона (Продолжение); Гл. IV. Что такое ряд? Гл. V. Признаки сходимости; Гл. VI. Бином Ньютона (Окончание); Гл. VII. Ряды для синуса и косинуса; Гл. VIII. Логарифмы и логарифмический ряд.

Впервые книга была издана двадцать лет назад. Третье издание содержит некоторые дополнения и изменения, которые не изменяют построения, характера, содержания книги. Книга не является учебником, автор хотел помочь молодому читателю, интересующемуся математикой и не боящемуся выкладок, проследовать путями, которые проложили Ньютон, Эйлер, Коши, Абель, Лейбниц, Даламбер. С. К. Шакулова

517 К. Ряды Фурье. Мартан, Сровнал (Fourierovy řady. Martan František, Srovnal Anto-

n i n. Praha, SNTL, 1955, 79 s., il., 5, 10 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 15, 373 (чешск.)

Книга представляет собой учебное пособие для студентов электротехнического факультета чешского втуза. В гл. I изложено вычисление коэффициентов Фурье периодической функции и вычисление коэффициентов разложения только по синусам или только по косинусам для непериодической функции. Гл. II. содержит основы теории рядов Фурье. Главным содержанием ее является доказательство теоремы Дирихле. В этой главе упоминается также и об ортонормальных системах функций на сегменте и о разложениях в ряды таких функций. В связи с этим изложен процесс ортогонализации Шмидта. Гл. III посвящена изложению основного численного метода для вычисления коэффициентов с помощью шаблонов.

Книга содержит много решенных примеров и упражнений. Содержание книги и изложение материала стандартные.

O. Koníček

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

518. О коэффициентах в некоторых асимптотических факториальных выражениях. I, II. Корпут (On the coefficients in certain asymptotic factorial expansions. I, II. Corput J. G. van der), Proc. Koninkl nederl. akad. wetensch., 1957, **A60**, № 4, 337—345; 346—351; Indagationes math., 1957, **19**, № 4, 337—345, 346—351 (англ.)

Для функции

$$g(z) = \frac{\Gamma(z-\sigma_1)\dots\Gamma(z-\sigma_s)}{\Gamma(z-\rho_0)\dots\Gamma(z-\rho_r)},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_s$, $\rho_0, \dots, \rho_r$ — постоянные, причем $s \leqslant r$, легко получается с помощью формулы Стирлинга для больших $|z|$ в секторе

$$-\pi + \varepsilon < \arg z < \pi + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \qquad (1)$$

асимптотическое представление вида

$$g(z) = \alpha^{\alpha z}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\frac{c_m}{\Gamma(\alpha z+\beta+m)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha z+\beta+M)}\right)\right\}.$$

Используя тот факт, что $g(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\frac{g(z+1)}{g(z)} = \frac{(z-\sigma_1)\dots(z-\sigma_s)}{(z-\rho_0)\dots(z-\rho_r)},$$

Райни (РЖМат, 1957, 4947) нашел рекуррентную формулу для определения коэффициентов c_m.

В порядке обобщения этих результатов ставится и решается задача: найти асимптотическое представление и получить рекуррентное соотношение между коэффициентами этого представления для функции $f(z)$, аналитической в секторе (1) и удовлетворяющей функциональному уравнению

$$\frac{f(z+1)}{f(z)} = \frac{A}{z^\alpha} + \frac{B}{z^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{z^{\alpha+2}}\right), \qquad (2)$$

где α — целое $\geqslant 1$. Уравнение (2) определяет $f(z)$ с точностью до множителя в форме произвольной периодической функции периода, равного единице. Чтобы $f(z)$ определялась с точностью до произвольного постоянного множителя, ставится требование: существуют такие числа $\varkappa$, μ и ν, что выражение

$$z^{-\mu z-\nu} f(z) e^{-\varkappa z}$$

вдоль всякого луча, параллельного положительной части действительной оси, стремится к одному и тому же конечному пределу $L \neq 0$.

Искомое асимптотическое представление имеет форму

$$f(z) = A^z \alpha^{\alpha z}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}\frac{c_m}{\Gamma(\alpha z+\beta+m)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha z+\beta+M)}\right)\right\}.$$

А. Ф. Леонтьев

519. Об эллиптических функциях Якоби. Ленц (Über die elliptischen Funktionen von Jacobi. Lenz Hanfried), Math. Z., 1957, **67**, № 2, 153—175 (нем.)

Предлагается новый вариант построения теории эллиптических функций Якоби и их обобщений для произвольно заданной сетки периодов. Дальнейшее развитие идей, принадлежащих Невиллю (Neville E. H., Jacobian elliptic functions, Oxford, 1951), позволяет получить прямой подход к теории эллиптических функций Якоби, в значительной степени не зависимый от общей теории Вейерштрасса.

Содержание статьи: Введение; § 1. Эллиптический интеграл 1-го рода; § 2. Отношение периодов; § 3. Эллиптические функции Якоби; § 4. Дзета- и тета-функции Якоби; § 5. Обобщение эллиптических функций Якоби.

Н. Н. Лебедев

520. Полиномы Бесселя. Аль-Салам (The Bessel polynomials. Al-Salam W. A.), Duke Math. J., 1957, **24**, № 4, 529—545 (англ.)

Полиномами Бесселя называются полиномиальные решения дифференциального уравнения

$$x^2y'' + (ax+b)y' - n(n+a-1)y = 0,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, a и b — произвольные параметры.

Рассматриваемые полиномы введены Кроллом и Фринком (Krall H., Frink O., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **65**, 100—115), и их исследованию посвящена обширная литература, цитированная в настоящей статье. Не ограничивая общности, можно считать $a = \alpha + 2$, $b = 2$. Тогда полином Бесселя будет

$$y = Y_n^{(\alpha)}(x) = {}_2F_0(-n,\ n+\alpha+1,\ -x/2).$$

Полиномы Бесселя образуют ортогональную систему функций на окружности единичного радиуса с весом

$$\rho(x,\ \alpha) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n-1)}\left(-\frac{2}{x}\right)^n.$$

В статье изучаются свойства полиномов Бесселя, в частности, получены новые интегральные представления, производящие функции и т. д. Доказаны теоремы, устанавливающие некоторые свойства, характерные для данного класса полиномов. Библ. 16 назв.

Н. Н. Лебедев

521. Об асимптотической оценке бесселевых функций первого рода, у которых порядок и аргумент приблизительно равны. Гаттески (Sul comportamento asintotico delle funzioni di Bessel di prima specie

di ordine ed argomento quasi uguali. Gatteschi Luigi), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 43, 97—117 (итал.; рез. англ.)

Сначала устанавливаются некоторые, хорошо известные, асимптотические оценки для бесселевых функций. Так, например, выводятся формулы Трикоми:

$$J'_\nu(\nu) = \frac{1}{2\sqrt{3}\,\pi}\left[\left(\frac{6}{\nu}\right)^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{6}{\nu}\right)^{4/3}\frac{\Gamma(1/3)}{30}\right] + \frac{2\vartheta}{\nu^2},$$

$$|\vartheta| < 1, \quad \nu \geqslant 6;$$

$$J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/3}\pi\nu^{1/3}} - \frac{9\theta}{\nu^{5/3}}, \quad 0 < \theta < 1, \quad \nu \geqslant 6;$$

$$Y_\nu(\nu) = \frac{-\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{-1/3}\pi\nu^{1/3}} + \frac{\theta_1}{\nu}, \quad |\theta_1| < 1, \quad \nu \geqslant 6.$$

Затем с помощью подстановки $x = \nu\exp 6^{-1/3}\nu^{-2/3}t$ уравнение Бесселя приводится к неоднородному уравнению Эйри

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{3}ty = c(t)\,y,$$

где $c(t) = 6^{-2/3}\nu^{-2/3}(2\cdot 6^{-1/3}\nu^{-2/3}t + 1 - \exp 2\cdot 6^{-1/3}\nu^{-2/3})$, и отсюда получают

$$J_\nu(\nu\exp 6^{-1/3}\nu^{-2/3}t) = \sqrt{\frac{t}{3}}\left\{\gamma_1 J_{-1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right] + \gamma_2 J_{+1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right]\right\} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\int_0^t (t\tau)^{1/2}\Delta(t,\tau)\,c(\tau)\,j_\nu(\nu\exp 6^{-1/3}\nu^{-2/3}\tau)\,d\tau,$$

$$\Delta(t,\tau) = J_{1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right]J_{-1/3}\left[2\left(\frac{\tau}{3}\right)^{3/2}\right] - J_{1/3}\left[2\left(\frac{\tau}{3}\right)^{3/2}\right]J_{-1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right].$$

Из этого выражения вытекает искомая асимптотическая оценка

$$J_\nu(\nu\exp 6^{-1/3}\nu^{-2/3}t) = \frac{1}{3}\left(\frac{t}{3}\right)^{1/2}\left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3}\left\{J_{-1/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right] + J_{2/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right]\right\} + \frac{3}{5}\left(\frac{t}{3}\right)^3\left\{J_{-4/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right] - J_{4/3}\left[2\left(\frac{t}{3}\right)^{3/2}\right]\right\}\frac{1}{\nu} + \varepsilon,$$

при $\nu \geqslant 6$ и $0 < t < 6^{1/3}\nu^{2/3}$

$$|\varepsilon| < \frac{9\pi + 5t + 0{,}16t^4 + 0{,}12t^5 + 0{,}1t^6 + 0{,}11t^8}{\pi\nu^{5/3}};$$

при $\nu \geqslant 6$ и $t < 0$

$$|\varepsilon| < \frac{9\pi - 5t + 0{,}16t^4 - 0{,}09t^5 + 0{,}07t^6 + 0{,}001t^8}{\pi\nu^{5/3}}\exp 8\left(-\frac{t}{3}\right)^{3/2}.$$

Н. С. Кошляков

522. Суммы некоторых рядов, содержащих функции Бесселя. Винти, Лезер (The sums of certain series involving Bessel functions. Vinti John P., Leser Tadeusz), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1957, 5, № 1, 15—31 (англ.)

Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье (по переменной z) функции

$$F(t, x_1, x_2, n, z) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\gamma(\psi)\exp[iaydy,$$

где

$$\psi = \pi - t - x_1\cos y - x_2\cos(z - ny), \quad \gamma(\psi) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right),$$

вычисляются двумя способами, используя соответственно соотношения

$$\gamma(\psi) = -\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\,l^{-1}\sin l\psi$$

и

$$\gamma(\psi) = \frac{1}{2}\psi - m(\psi)\,\pi.$$

Отсюда получается целый ряд соотношений, например:

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{-1}J_{vn+a}(lx_1)\,J_v(lx_2)\sin\left[lt + \frac{1}{2}\pi(v + vn + a)\right] = 0,$$

(v, n, a — целые, $|v| > 1$; t, x_1, x_2 — действительные. В остальных рассмотренных рядах либо $v = 0{,}1$, либо отсутствует третий или четвертый множитель общего члена ряда) Г. К. Энгелис

523. Некоторые формулы для произведения функций Бесселя и Лежандра. Рагаб (Some formulae for the product of Bessel and Legendre functions. Ragab F. M.), Math. Z., 1958, 68, № 4, 338—339 (англ.)

Найдено значение одного определенного интеграла, содержащего произведение гипергеометрических функций, которые, в частном случае, переходят в функции Бесселя и Лежандра. Н. Н. Лебедев

524. Об одном произведении лежандровых и бесселевых функций. Рагаб (On the product of Legendre and Bessel functions. Ragab F. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 26—31 (англ.)

Предметом заметки является доказательство и дальнейшее обобщение интегральных формул

$$\int_0^\infty \lambda^{-m/2}(1+\lambda)^{(m-\nu)/2}K_\nu(z(1+\lambda)^{1/2})\,P_n^m(1+2\lambda)\,d\lambda = \frac{z^{\nu-2m-2}}{2^{\nu-2m}\pi}\sum_{i,-i}\frac{1}{i}E(1+n+m, m-n, m-\nu+1 :: e^{i\pi}z^2/4), \quad (1),$$

$$R(1/4 + \nu/2 - n) > 0, \quad R(5/4 + \nu/2 + n) > 0, \quad R(1-m) > 0, \quad R(z) > 0;$$

$$\int_0^\infty \lambda^{-m/2}(1+\lambda)^{m/2-\nu/2}J_\nu(z(1+\lambda)^{1/2})\,P_n^m(1+2\lambda)\,d\lambda = \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(n-m+1)\,\Gamma(\nu-n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu-2n-2}{}_1F_2\left(\begin{matrix}m-n; & -z^2/4\\ \nu-n; & -2n\end{matrix}\right) + \frac{\Gamma(-2n-1)}{\Gamma(-m-n)\,\Gamma(1+n+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}{}_1F_2\left(\begin{matrix}1+m+n; & -z^2/4\\ 1+n+\nu; & 2+2n\end{matrix}\right), \quad (2)$$

где E есть функция Мак-Роберта.

Сначала доказывается вспомогательная формула

$$\frac{2\pi z^{\alpha+\beta-1}\,e^{-z}}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}\,E(1-\alpha,\ 1-\beta::z) =$$

$$=\sum_{i,-i}\ \frac{1}{i}\,E(\alpha,\beta::e^{i\pi}z),$$

а затем даются обобщения формул (1) и (2)

$$\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\nu/2}\,K_\nu\left(z(1+\lambda)^{1/2}\right)F(\alpha,\beta;\gamma;-\lambda)\,d\lambda=\Gamma(\gamma)\times$$

$$\times\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\alpha+2\beta+\nu-2\gamma-2}\sum_{i,-i}\ \frac{1}{i}\,E(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 1+\gamma-$$

$$-\nu-\alpha-\beta::e^{i\pi}z^2/4,),\ R(\gamma)>0,\ |\operatorname{amp} z|<\pi;$$

$$\int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}(1+\lambda)^{-\nu/2}\,J_\nu\left(z(1+\lambda)^{1/2}\right)F(\alpha,\beta;\gamma;-\lambda)\,d\lambda=\Gamma(\gamma)\times$$

$$\times\sum_{\alpha,\beta}\ \frac{\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\alpha-2\gamma+\nu}\times$$

$$\times\ {}_1F_2\left(\begin{matrix}1-\beta;\ -z^2/4\\ 1+\alpha-\gamma+\nu;\ \ 1+\alpha-\beta,\end{matrix}\right),$$

$R(\gamma)>0,\ R(5/4-\gamma+\nu/2+\alpha)>0,\ R(5/4-\gamma+\nu/2+\beta)>$

$>0,\ R(z)>0.$ Н. С. Кошляков

525. О четырехмерной сферической функции. Суэока Киёити, Сэйсан кэнкю, Seisan kenkyu, Monthly J. Inst. Industr. Sci., Univ. Tokyo, 1958, **10**, № 3, 55—57 (японск.)

526. О рядах Рейнвилла, содержащих полиномы Лежандра. Бхонсле (On a series of Rainville involving Legendre polynomials. Bhonsle B. R.), Proc. Amer. Maht. Soc., 1957, 8, № 1, 10—14 (англ.)

Пользуясь одной из формул Рейнвилла (Rainville, Bull. Amer. Math. Soc., 1945, 51, 268) $y^nP_n(y)=\sum_{k=0}^n a_{n,k}P_k(1-2y^2)$ и некоторыми другими частными результатами, относящимися к лежандровым полиномам, автор находит ряд интегралов, содержащих полиномы Лежандра. Так, например,

$$\int_0^1 x^{s+1}\,P_s(2x^2-1)\prod_{i=1}^{\gamma}P_{p_i}(x)\,dx=$$

$$=\frac{(s!)^2}{2^{s+1}(2s+1)!}\prod_{i=1}^{\gamma}\frac{(2p_i)!}{(p_i!)^2},$$

$$s=p_1+\ldots+p_\gamma,$$

$$\int_0^1 y^{n+1}\,J_0(xy)\,P_n(y)\,dy=\sum_{k=0}^n a_{n,k}\,J_{2k+1}(x).$$

М. Н. Олевский

527. Конечные формулы суммирования и сравнения для полиномов Лежандра и Якоби. Аль-Салам, Карлиц (Finite summation formulas and congruences for Legendre and Jacobi polynomials. Al-Salam W. A., Carlitz L.), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 2, 108—118 (англ.)

Статья содержит различные дополнительные результаты к аналогичным работам авторов по ортогональным полиномам. Так, для известной интегральной формулы Каталана

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{x(1+\cos\Phi)+i\sin\Phi\right\}^n d\Phi=P_n(x)$$

приводятся конечная формула суммирования

$$\frac{1}{t}\sum_{s=0}^{t-1}\left\{x\left(1+\cos\frac{2s\pi}{t}\right)+i\sin\frac{2s\pi}{t}\right\}^n=$$

$$=P_n(x)+\sum_{0<tk<n}\ \frac{n!}{(n+kt)!}\left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{k/2}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{k/2}\right\}P_n^{kt}(x)$$

и сравнение

$$2^{-n}\sum_{s=1}^{p-1}\left\{2x+(x+1)\ s+s^{-1}(x-1)\right\}^n\equiv$$

$$\equiv -P_n(x)-\sum_{0<n+2wk<n}\ \frac{n!}{(n+2wk)!}\left\{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{wk}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{wk}\right\}P_n^{2wk}(x)\ (\mathrm{mod}\ p),$$

где $p=2w+1$ есть произвольное простое число а $P_n(x)$ и $P_n^{kt}(x)$ означают соответственно полином Лежандра и присоединенную функцию Лежандра.

Аналогичные аналоги строятся и для интегральной формулы Бейтмана

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{x+(x^2+1)^{1/2}\cos\Phi\right\}^n\left(1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}e^{i\Phi}\right)^\alpha\left\{1+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2}e^{i\Phi}\right\}^\beta d\Phi=P_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ означает полином Якоби.

Полученные результаты обобщаются на случай полиномов

$$P_m^{(u,v,w)}(x,y,z)=\frac{(2m+u+v+w)!}{m!\,(m+u)!\,v!\,w!}\ x^{2m}\,F_4\left(-m,\right.$$

$$\left.-m-u;\ v+1,\ w+1;\frac{y^2}{x^2},\frac{z^2}{x^2}\right),$$

где $F_4[\alpha,\beta;\gamma,\gamma';y,z]$ означает функцию Аппеля

$$F_4(\alpha,\beta;\gamma,\gamma';y,z)=\sum_{j,k}\frac{(\alpha)_{j+k}(\beta)_{j+k}}{j!\,k!\,(\gamma)_j(\gamma')_k}\,y^jz^k.$$

Строятся сумматорные формулы и сравнения, соответствующие интегральной формуле

$$(2\pi)^{-3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(x\cos\alpha+y\cos\beta+$$

$$+z\cos\gamma)^n\cos p\alpha\cos q\beta\cos r\gamma\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma=$$

$$=2^{-n}x^p y^q z^r P^{(p,q,r)}_{\frac{1}{2}(n-p-q-r)}(x^2,y^2,z^2),$$

где $p+q+z\equiv n\pmod 2$. Н. С. Кошляков

528. Ряды, расположенные по полиномам Лежандра и Лагерра. Каулинг (Series of Legendre and Laguerre polynomials. Cowling V. F.), Duke Math. J., 1958, 25, № 1, 171—176 (англ.)

Известно, что ряд $\sum_0^\infty a_n P_n(z)$, расположенный по полиномам Лежандра $P_n(z)$, сходится внутри эллипса, фокусами которого являются точки ± 1. Аналогичная теорема существует и для разложения аналитической функции в ряд по полиномам Лагерра $L_n(z)$. Автор доказывает теоремы:

Теорема 1. Предположим, что для всех конечных значений t, включая и значение $t=-h$, функция $a(t)$ регулярна в области $B\leqslant\arg(t+h)\leqslant A$, где $0<A<\pi/2$, $-\pi/2<B<0$, и при достаточно больших t удовлетворяет условию $a(t)=O(e^{-t\log L})$, где $L>1$. Пусть, далее, C и C^1 — кривые, определяемые соответственно уравнениями

$$z=\frac{1}{2}(w^u+w^{-u}),\qquad z=\frac{1}{2}(v^u+v^{-u}),$$

где $w=\exp(-ie^{-iA})$, $v=\exp(ie^{-iB})$,

и D обозначает область, ограниченную кривыми C и C^1. Тогда функция $f(z)=\sum a(n)P_n(z)$ оказывается регулярной в области D.

Теорема 2. Предположим, что для всех конечных значений t, включая и значение $t=-h$, функция $a(t)$ оказывается регулярной в области $B\leqslant\arg(h+t)\leqslant A$, где $0<A\leqslant\pi/2$, $-\pi/2\leqslant B<0$, и при достаточно больших значениях t удовлетворяет условию $a(t)=O(e^{-L\sqrt{t}})$, где $L>0$. Тогда разложение $f(z)=\sum a(n)L_n(z)$, $z=re^{i\varphi}$ определяет функцию от z, регулярную в области $-A<\varphi<-B$.

Н. С. Кошляков

529. Аналитические выражения гипергеометрических функций через ряды полиномов. Ортс (Representación analítica de funciones hipergeométricas por series de polinomios. Orts J. M. a), Collect. math., 1957, **9**, № 3, 145—151 (исп.)

Гипергеометрическая функция

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1.2.3\cdots n\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра $\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(x)$, где коэффициенты a_n определяются формулами

$$a_n=(n+\frac{1}{2})\int_{-1}^{+1}F(\alpha,\beta,\gamma;x)P_n(x)\,dx\qquad(n=0,1,2,\ldots).$$

В частности,

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha}=\frac{1}{2^\alpha}\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(x),\qquad 0<\alpha<\frac{3}{4},$$

где

$$a_0=\frac{1}{1-\alpha},\quad a_1=\frac{3}{(1-\alpha)(2-\alpha)},$$

$$a_n=(2n+1)\,\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n+1-\alpha)}.$$

С помощью этого разложения и интегральной формулы

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1(1-tx)^{-\alpha}t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,dx,$$

$$R(\gamma-\beta)>0,$$

выводится представление

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\frac{1}{2^\alpha}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\sum_{n=0}^\infty a_n Q_n^{(\beta,\gamma)}(x),$$

где коэффициенты $\mu_n^{(k)}$ полинома

$$Q_n^{(\beta,\gamma)}(x)=\mu_n^{(0)}x^n+\mu_n^{(2)}x^{n-2}+\ldots \qquad (1)$$

связаны с коэффициентами $\lambda_n^{(k)}$ полинома Лежандра

$$P_n(x)=\lambda_n^{(0)}x^n+\lambda_n^{(2)}x^{n-2}+\ldots$$

посредством соотношений

$$\mu_n^{(k)}=\frac{\Gamma(\beta+n-k)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+n-k)}\lambda_n^{(k)}.$$

Доказывается равномерная сходимость полиномов (1) и исследуются частные случаи полученных формул при $\gamma=1$, $\alpha=1/2$, $\beta=1/2$. Н. С. Кошляков

530. Некоторые обобщенные гипергеометрические тождества типа Роджерса—Рамануджана. Сингх (Certain generalized hypergeometric identities of the Rogers—Ramanujan type. Singh V. N.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 1, 1011—1014 (англ.)

Автор показывает, что найденные Олдером (РЖМат, 1955, 3032) обобщения тождеств Роджерса—Рамануджана могут быть получены в качестве предельного случая одной общей формулы Сирса в теории гипергеометрических рядов (Sears D. B., Proc. London Math. Soc., 1951, 52, 467—483). Попутно получается явное выражение для фигурирующих в тождествах Олдера полиномов $G_{\kappa,\mu}(x)$.

М. Н. Олевский

531. Об одном операторном тождестве и гипергеометрической функции. Ливингстон (Sur une identité opérationnelle et la fonction hypergéométrique. Livingston Donald), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 25, 3007—3009 (франц.)

Известны 8 соотношений, выражающие производную n-го порядка от произведения вида $z^\kappa(1-z)^\lambda F(a,b,c;z)$

в форме $(z^p(1-z)^q F(a+\varepsilon_1 n, b+\varepsilon_2 n, c+\varepsilon_3 n; z), \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 0, -1, +1$ (РЖМат, 1955, 3285К, формулы 2.8 (20) — — 2.8 (27)). Автор, используя одно дифференциальное тождество и связи Куммера между гипергеометрическими функциями (там же, стр. 105), показывает, как из двух вышеупомянутых (наиболее очевидных) соотношений получаются остальные шесть. М. Н. Олевский

532. Вычисление некоторых интегралов и гипергеометрических сумм, представляющих интерес для физики. Мелвин, Свами (Evaluation of certain physically interesting integrals and hypergeometric sums. Melvin M. A., Swamy N. V. V. J.), J. Math. and Phys., 1957, **36**, № 2, 157—163 (англ.)

Для часто встречающегося в квантовой механике интеграла

$$\int_0^\infty z^p M_{k_1, c_1}(z) M_{k_2, c_2}(z)\, dz$$

($M_{k,c}(z)$ — функция Уиттекера), равного $\Gamma(q) F_A(q; -a_1, -a_2; 1+2c_1; 1+2c_2; 1, 1)$, где $q = c_1 + c_2 + p + 2$, $a_i = k_i - c_i - 1/2$, преобразованием функции Аппеля F_A дается при $a_1 > 0$ и целом, или $\nu_1 = q - a_1 > 0$ целом, выражение в виде обрывающегося ряда ${}_3F_2$.

М. Н. Олевский

533. Интегрирование E-функций по их параметрам. Рагаб (Integration of E-functions with regard to their parameters. Ragab F. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1957, **3**, № 2, 94—98 (англ.)

Вычислены 7 интегралов, содержащих E-функцию, произведение E-функций и произведение E-функций на Г-функции. В качестве примера приведем один из них:

$$\frac{1}{2\pi i}\int E(\alpha+\zeta, \gamma : : z)\, E(\beta-\zeta, \delta : : z)\, d\zeta =$$

$$= 2^{-\alpha-\beta} B(\gamma+\delta)\, E(\alpha+\beta, \gamma+\delta : : 2z);$$

путь интегрирования такой же, как и в известных интегралах типа Бернса. М. Н. Олевский

534. Некоторые полиномы Тушара, связанные с числами Бернулли. Карлиц (Some polynomials of Touchard connected with the Bernoulli numbers. Carlitz Leonard), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 188—190 (англ.)

Показано, что полиномы Q_n, введенные Тушаром (РЖМат, 1957, 6835) и обозначаемые в реферируемой статье через $\mathfrak{Q}_n$, связаны с полиномами F_n Бейтмана РЖМат, 1955, 3825, 4.7); именно

$$\mathfrak{Q}_n(z) = (-2)^n n! \binom{2n}{n}^{-1} F_n(2z+1).$$

Соотношение „символической ортогональности", связывающее $\mathfrak{Q}_n$ с числами Бернулли, доказывается с помощью использования известных свойств полиномов F_n

Г. К. Энгелис

535. О полиномах Тушара. Брафман (On Touchard polynomials. Brafman Fred.), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 2, 191—193 (англ.)

Для полиномов $Q_n(x)$, введенных Тушаром (РЖМат 1957, 6835) рекуррентным соотношением, дается следующее явное выражение:

$$Q_n(x) = \frac{(1+x)_n n!}{(1/2)_n 2^n} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, & -n, & -x \\ 1, & -n-x & \end{matrix}; 1\right),$$

$x \neq -N$, N — целое > 0. Получены также производящие функции для $Q_n(x)$. Другое выражение для полиномов $Q_n(x)$ и другая производящая функция для них даны в работе Уаймана и Мозера (РЖМат, 1957, 6460). См. также работу Карлица (реф. 534), в которой установлена связь между $Q_n(x)$ и $F_n(2x+1)$, где $F_n(x)$ — полином Бейтмана. М. Н. Олевский

536. Интегралы от произведений сфероидальных функций. Шефке (Integrale über Produkte von Sphäroidfunktionen. Schäfke Friedrich Wilhelm), Math. Z., 1957, **67**, № 3, 238—251 (нем.)

Исследуются волновые сфероидальные функции, представляющие решения уравнения.

$$[(1-z^2)y']' + \left[\lambda + \gamma^2(1-z^2) - \frac{\mu^2}{1-z^2}\right] y = 0,$$

где λ, γ и μ — произвольные вещественные или комплексные параметры. Полученные результаты являются дополнением к соответствующим разделам известной монографии Мейкснера и Шефке (РЖМат, 1956, 6663 К).

Автор рассматривает два типа интегральных соотношений, содержащих произведения волновых сфероидальных функций.

Исследован вопрос о выводе рекуррентных формул для специальных функций различных типов и показано, что общий метод, приводящий к рекуррентным соотношениям для цилиндрических и сферических функций, оказывается несостоятельным применительно к функциям высших типов (функции Матьё, волновые сфероидальные функции и т. д.). В связи с этим критикуется точка зрения Уиттекера (Whittaker E. T., J. London Math. Soc., 1929, **4**. 88—96) и Маркса (РЖМат, 1955, 1311, 4402), рассматривающих найденные ими соотношения как рекуррентные формулы для функций Матьё и волновых сфероидальных функций. Н. Н. Лебедев

537. Интегральные уравнения для эллипсоидальных волновых функций. Арскотт (Integral equations for ellipsoidal wave functions. Arscott F. M.), Quart. J. Math., 1957, **8**, № 31, 223—235 (англ.)

Под эллипсоидальными волновыми функциями понимаются однозначные двоякопериодические решения уравнения

$$w'' - (a + bk^2 \operatorname{sn}^2 z + qk^4 \operatorname{sn}^4 z)\, w = 0$$

с периодами $2K$ или $4K$ и $2iK'$ или $4iK'$.

Рассматриваемые решения существуют при условии, что параметры a и b выбраны как надлежащие функции от q. Они могут быть представлены в форме

$$w = \operatorname{sn}^r z \operatorname{cn}^s z \operatorname{dn}^t z F(\operatorname{sn}^2 z),$$

где $F(u)$ — целая функция u; r, s и t — числа, равные нулю или единице.

В зависимости от возможного сочетания показателей получается восемь типов волновых эллипсоидальных функций, которые при $q \to 0$ переходят в соответствующие функции Ламе.

Волновые эллипсоидальные функции принадлежат к более сложному классу функций, чем функции Ламе, Матье и волновые сфероидальные функции, которые могут быть определены как решения интегральных уравнений Фредгольма с ядрами простого вида.

Соответствующие уравнения для волновых эллипсоидальных функций неизвестны, хотя Моглихом (Möglich F., Ann. phys., 1927, **83**, 609—634) и Малуркаром (Malurkar S. L., Indian J. Phys., 1935, **9**, 45—80) построены для некоторых типов этих функций интегральные уравнения с двойными интегралами. Настоящая статья содержит распространение результатов Моглиха и Малуркара на волновые эллипсоидальные функции других типов и дает систематический способ отыскания ядер таких уравнений. Установлена связь между интегральными уравнениями Моглиха и Малуркара. Н. Н. Лебедев

538. Об обобщенной K-функции Бейтмана и присоединенной функции. Чакрабарти, Саркар (On the generalised K-function of Bateman and an allied function. Chakrabarty N. K., Sarkar G. K.), J. Math., 1953, **1**, № 2—3, 145—154 (англ.)

Исследуются свойства обобщенной K-функции Бейтмана

$$K^l_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}2^l\cos^l\theta\cos(x\operatorname{tg}\theta-n\theta)\,d\theta,\quad l>-1,$$

и родственной функции, определенной интегралом

$$T^l_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}2^l\cos^l\theta\sin(x\operatorname{tg}\theta-n\theta)\,d\theta,\quad l>-1.$$

Применяя методы операционного исчисления, авторы получают для рассматриваемых функций различные интегральные представления и разложения в ряды, теоремы сложения, находят значения некоторых определенных интегралов, содержащих функции $K^l_n(x)$, и т. д. Выведен также ряд рекуррентных соотношений для функций $T^l_n(x)$.

Примечание референта. В формуле, приведенной в статье для определения функции $K^l_n(x)$, содержится очевидная опечатка. Н. Н. Лебедев

539. О некоторых соотношениях, содержащих обобщенную K-функцию Бейтмана. Сривастава (On certain relations involving the generalised K-function of Bateman. Srivastava H. M.), Ganita, 1954, 5, № 2, 183—189 (англ.)

Для функции

$$P_{n,k}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^k\theta\cos(x\operatorname{tg}\theta-n\theta)\,d\theta$$

(x и n — действительные числа, $\operatorname{Re}k>-1$), обращающейся при $k=0$ в K-функцию Бейтмана (РЖМат, 1955, 3285 К), приводится производящая функция; даются выражения для некоторых определенных интегралов (преимущественно от элементарных функций) в виде рядов, содержащих $P_{n,k}(x)$. М. Н. Олевский

540. Функции Эйри. Ро (Les fonctions d'Airy. Rot André), Ann. télécommuns, 1957, **12**, № 10, 343—346 (франц.)

Работа содержит конспективное изложение теории функций Эйри и имеет целью заполнить соответствующий пробел в справочной литературе, изданной на французском языке. Библ. 20 назв.

Примечание референта. В указателе литературы отсутствует ссылка на работу Фока (Фок В. А., Таблицы функций Эйри, Инф. отд. НИИ—108, М., 1946). Н. Н. Лебедев

541. Функции, дополнительные к интегралам Френеля. Крейсиг (On the complementary functions of the Fresnel integrals. Kreyszig Erwin), Canad. J. Math., 1957, **9**, № 4, 500—510 (англ.)

Изучаются функции

$$c(z)=\int_z^\infty t^{-1/2}\cos t\,dt,\quad s(z)=\int_z^\infty t^{-1/2}\sin t\,dt,\quad z=x+iy,$$

$$c(z)=C-C(z),\quad s(z)=S-S(z),$$

где $C(z)=\int_0^z t^{-1/2}\cos t\,dt$, $S(z)=\int_0^z t^{-1/2}\sin t\,dt$,

$$C=\lim_{z\to\infty}C(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad S=\lim_{z\to\infty}S(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Устанавливаются формулы

$$\left.\begin{aligned}c(z)&=2^{-1}z^{-1/4}\{e^{-i\alpha(z)}W_{-1/4,\,1/4}(iz)+\\&\quad+e^{i\alpha(z)}W_{-1/4,\,1/4}(-iz)\},\\s(z)&=2^{-1}z^{-1/4}\{e^{-i\beta(z)}W_{-1/4,\,1/4}(iz)+\\&\quad+e^{i\beta(z)}W_{-1/4,\,1/4}(-iz)\},\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\arg z\neq\frac{\pi}{2},\\&\alpha(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{3\pi}{4}\right),\\&\beta(z)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}c(z)&=i^{1/2}\operatorname{Erf}(\sqrt{-iz})+i^{-1/2}\operatorname{Erf}(\sqrt{iz}),\\s(z)&=i^{-1/2}\operatorname{Erf}(\sqrt{-iz})+i^{1/2}\operatorname{Erf}(\sqrt{iz}),\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\arg z\neq\frac{\pi}{2},\\&\operatorname{Erf}(z)=\int_z^\infty e^{-t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Имеют место асимптотические выражения, справедливые для всех значений аргумента, исключая точки мнимой оси

$$c(z)\sim-z^{-1/2}[a(z)\cos z+b(z)\sin z],$$

$$s(z)\sim z^{-1/2}[b(z)\cos z-a(z)\sin z],$$

где $a(z)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(4m-3)}{(2z)^{2m-1}}$, $b(z)=1+$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(4m-1)}{(2z)^{2m}}$$

Доказана теорема о том, что функции $c(z)$ и $s(z)$ не имеют комплексных корней, указан способ вычисления нулей функций $c(z)$ и $s(z)$, даны таблица нулей изучаемых функций, таблица значений для действительных значений аргумента и таблица значений функции $c(z)$ для комплексного аргумента Л. Я. Цлаф

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

542. К вопросу выбора начальных условий функции $f(t)$ при изображении ее производной по Лапласу. Коничек (K otázce volby počátečních podmínek vě větě o obrazu derivace v Laplaceově transformaci. Koníček Oldřich), Slaboproudý obzor, 1957, **18**, № 8, 551—554 (чешск.)

Рассматривается лапласово преобразование производной функции $f(t)$ с учетом ее разрыва в точке $t=0$. Сравнивается изображение $L\{f(t)\}$ с учетом начальных условий $f(t)$ при подходе в указанной точке $t=0$ «слева» и «справа». Показываются примеры совпадения изображений при учете начальных условий при $t=0$. Г. М. Уланов

543. Об одной предельной теореме в теории трансформации Лапласа. Корпут (On a limit theorem in the theory of the Laplace transformation. Corput J. G. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 1, 1—4; Indagationes math., 1958, **20**, № 1, 1—4 (англ.)

Дёчем (Doetsch G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, 1943, гл. 10, § 3, 216—222) была доказана теорема: Если $F(t)\geqslant0$ при $t\geqslant0$ и ее лапла-

сова трансформанта $f(s)$ сходится при $\operatorname{Re} s > 1$, причем для $|\operatorname{Im} s| < a$

$$f(s) - \frac{A}{s-1} \qquad (A \geqslant 0)$$

равномерно сходится при $\operatorname{Re} s \to 1$ к предельной функции, то

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} F(t) = A,$$

если $F(t)$ — монотонная неубывающая функция t. Требуется также, чтобы для наперед заданного $\varepsilon > 0$ и для $x \leqslant x' \leqslant x + \delta(\varepsilon)$ функция $F(x)$ удовлетворяла неравенству $F(x) \leqslant (1+\varepsilon) F(x')$.

Доказывается, что требование монотонности $F(t)$ в теореме Дёча излишне. А. И. Лурье

544. Локальные операторы на преобразованиях Фурье. **Бранджес** (Local operators on Fourier transforms. Branges Louis de), Duke Math. J., 1958, 25, № 1, 143—153 (англ.)

Пусть $K(x)$ — некоторая комплекснозначная измеримая функция, заданная на вещественной оси, и $K(H)$ — овокупность абсолютно сходящихся преобразований Фурье $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} F(t)\, dt$, для которых абсолютно сходится также интеграл

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} K(t) F(t)\, dt. \qquad (1)$$

Среди операторов (1) автор выделяет те, которые обладают свойством локальности, т. е. те, которые переводят любую функцию $f(x)$ из $K(H)$, тождественно равную нулю в окрестности начала координат, в функцию $g(x)$, эквивалентную нулю в некоторой такой окрестности.

Устанавливается, что во всех тех случаях, когда $K(x)$ почти всюду на $(-\infty, \infty)$ совпадает с целой функцией первого порядка и минимального типа, оператор (1) является локальным. Если $K(H)$ содержит функцию, тождественно равную нулю на некотором интервале, то верно и обратное утверждение. А. Ф. Тиман

545. Теоремы обращения и представимости для одного обобщения преобразования Лапласа. **Саксена** (Inversion and representation theorems for a generalization of Laplace transformation. Saksena K. M.), Nieuw arch. wiskunde, 1958, 6, № 1, 1—9 (англ.)

Доказываются две теоремы, относящиеся к теории интегрального преобразования Мейера

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}xt} (xt)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2},m}(xt)\, \varphi(t)\, dt, \qquad (1)$$

$W_{\kappa,m}(x)$ — функция Уиттекера, $(k \pm m) < 1$, $m \geqslant 0$.

Теорема 1. Если $\varphi(t)$ ограничена в $(0 < t < \infty)$, то почти для всех положительных t

$$\varphi(t) = \lim_{q\to\infty} V_{q,t}[F(x)], \qquad (2)$$

где $V_{q,t}[f(x)]$ — дифференциальный оператор, определенный формулой

$$V_{q,t}[f(x)] = \frac{(-1)^q}{q!}\left(\frac{q}{t}\right)^{q-k-m+1} [x^{k+m} f(x)]^q_{x=q/t}$$

$$(q = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 2. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы заданная функция $F(x)$ представляла преобразование Мейера функции $\varphi(t)$, ограниченной в $(0 < t < \infty)$ с $0 < k + m < 1$, заключается в следующем:

1) $F(x)$ имеет производные любого порядка в $(0 < x < \infty)$;

2) $F(x) \to 0$, когда $x \to \infty$;

3) $|V_{q,x}[F(x)]| < M$ $(q = 1, 2, \ldots;\ 0 < x < \infty)$, M — некоторая постоянная.

Первая из указанных теорем представляет обобщение известного результата Уиддера (Widder D. V., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, 39, 244—298), получившего соответствующую теорему обращения для преобразования Лапласа $(k = -m)$. Н. Н. Лебедев

546. О некоторых результатах, содержащих обобщенные преобразования Лапласа. **Бхонсле** (On some results involving generalised Laplace's transforms. Bhonsle B. R.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, 48, № 1, 55—63 (англ.)

Доказываются 4 теоремы, относящиеся к преобразованию Мейера

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}px} (px)^{-k-1/2} W_{k+\frac{1}{2},m}(px) f(x)\, dx \qquad (1)$$

короче: $f(x) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \varphi(p)$), преобразованию Уиттекера

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} (2px)^{-1/2} W_{\kappa,m}(2px) f(x)\, dx \qquad (2)$$

и преобразованию Лапласа

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} f(x)\, dx$$

(короче: $\varphi(p) = f(x)$). Так, например, если $f(t) \xrightarrow[m]{k+\frac{1}{2}} \varphi(s$

и $f(s) = g(t)$, то (при некоторых ограничениях)

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} g(u)\, \chi(u, s)\, du, \text{ где}$$

$$\chi(u, s) = \frac{1}{s}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; -u/s); \quad a = 2 - k + m,$$

$$b = 2 - k - m,\ c = 2 - 2k.$$

При $k = m$ в (1) и $k = 1/4$, $m = \pm 1/4$ в (2), когда (1) и (2) совпадают с лапласовым преобразованием, доказанные теоремы обращаются в утверждения, установленные Хумбертом (Humbert P., Bull. Soc. math. France, 1937, 65, 119) и Динешчандра (Dineshchandra, Ganita), 1952, 3, 1). М. Н. Олевский

547. Формула обращения для интеграла Зоммерфельда. **Малюжинец Г. Д.**, Докл. АН СССР, 1958, 118, № 6, 1099—1102

Рассматриваются условия, при которых интегральное преобразование вида

$$F(r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{mr\cos\alpha} f(\alpha)\,d\alpha \qquad (1)$$

допускает обращение посредством формулы

$$f(\alpha)=-\frac{m\sin\alpha}{2}\int_0^{\infty} F(r)\,e^{-mr\cos\alpha}\,dr. \qquad (2)$$

Равенства (1) и (2) представляют собой формулы обращения для некоторого интеграла, встречаемого у Зоммерфельда в задаче о диффракции плоской волны на клине (Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М., ОНТИ, 1937, гл. XX).

Далее изучается функция $f(\alpha)$, удовлетворяющая некоторым общим условиям роста на бесконечности, регулярности и равенству вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{mr\cos\alpha} f(\alpha)\,d\alpha=0. \qquad (3)$$

Для удовлетворения равенству (3) при $r>0$ оказывается необходимым и достаточным, чтобы функция $f(\alpha)$ имела представление

$$f(\alpha)=f_1(\alpha)+\sin\alpha\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\,\nu\cos^{\nu-1}\alpha, \qquad (4)$$

где $f_1(\alpha)$ — произвольная четная функция и коэффициенты c_ν — произвольные постоянные, или, как следствие (4), чтобы функция $f(\alpha)$ удовлетворяла функциональному уравнению

$$f(\alpha)-f(-\alpha)=2\sin\alpha\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\,\nu\cos^{\nu-1}\alpha.$$

Рассмотренные свойства позволяют получать решения краевых задач в клиновидных областях при наличии производных любого порядка в краевых условиях, в частности задачи о дифракции звуковых волн на полубесконечной упругой пластине.

Изучается пример вынужденных колебаний в клиновидной области, возбуждаемых совместным действием некоторой волны, падающей из бесконечности, и источников, распределенных на гранях клина. Н. А. Бразма

548. Формула обращения для одной обобщенной трансформации. Молдон (An inversion formula for a generalized transform. Mauldon J. G.), Mathematika, 1957, 4, № 8, 146—155 (англ.)

Пусть λ — случайная переменная с распределением $F(\lambda)$. Обозначим

$$\varphi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(t-\lambda)^{-n}\,dF(\lambda).\ (\mathrm{Im}\,t\neq 0,\ n>0). \qquad (1)$$

Установлены следующие предложения:

1. Если $\varphi_n(t)$ определена формулой (1), λ_1 и λ_2 таковы, что

$$\int^{\lambda_j}\log|\lambda-\lambda_j|\,dF(\lambda)\ \ (j=1,2) \qquad (2)$$

сходится, тогда

$$F(\lambda_2)-F(\lambda_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left\{\varphi_n(\lambda_2+t)-\varphi_n(\lambda_1+t)\right\}t^{n-1}\,dt,$$

где интегрирование ведется вдоль мнимой оси.

2. Если $\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda|\,dF|\lambda|$ сходится и $\varphi_n(t)$ определена формулой (1), и если λ_1 удовлетворяет условию (2), тогда

$$F(\lambda_1)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-R-iR^a}^{-R+iR^a} t^{n-1}\varphi_n(\lambda_1+t)\,dt\left(\frac{n-1}{n}<a<1\right)$$

и

$$F(\lambda_1)=1-a+\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{Re^{-i\alpha\pi}}^{Re^{i\alpha\pi}} t^{n-1}\varphi_n(\lambda_1+t)\,dt)\,(0<a<1),$$

где в каждом случае путь интегрирования пересекает действительную ось, не касаясь ее, только в точке $t=0$ и удовлетворяет условию спрямляемости: величина $s(t)/|t|$ ограничена, $s=s(t)=\int_0^t|dt|$, где интегрирование ведется вдоль простой кривой C в плоскости t, соединяющей две несобственные точки $t=a$, $t=b$, $\mathrm{Im}\,a<0$, $\mathrm{Im}\,b>0$, лежащей в области $\delta\leqslant|\arg t|\leqslant\pi-\delta$ $\left(0<\delta\leqslant\frac{1}{2}\pi\right)$.

Л. Я. Цлаф

549 К. Преобразование Лапласа I. Основные свойства. Пирко (Laplaceova transformace. I. Základní vlastnosti. Pírko Zdeněk, Praha, Státní nakladatelství techn. literatury, 1957, 134 str., 29 obr., 8, 70 Kčs.) (чешск.)

Книга представляет собой учебное пособие для студентов электротехнического факультета Пражского политехнического института и посвящена изложению основных свойств преобразования Лапласа. В гл. I дано определение преобразования Лапласа и найдено изображение показательной функции. Гл. II содержит достаточные условия для осуществимости изображения. Автор рассматривает только кусочно-непрерывные функции показательного роста. Гл. III посвящена исследованию сходимости интеграла Лапласа и вопросу регулярности изображения. В гл. IV дано доказательство линейности преобразования. Основным содержанием гл. V является теорема запаздывания, теорема смещения и теорема подобия. Эта глава содержит указания для вычисления изображений импульсов конечной продолжительности с помощью теоремы запаздывания. Автор, к сожалению, не приводит теорему, данную А. И. Лурье (Операционное исчисление, М., 1950, стр.58) для вычисления изображений подобного рода функций, которая в значительной мере уменьшает трудность таких вычислений. Гл. VI посвящена теореме об изображении производной и ее применению для решения линейных дифференциальных уравнений. В гл. VII выведена теорема об изображении интеграла и показано ее применение для решения линейных интегральных уравнений определенных видов. В гл. VIII приведены вначале теоремы о пределах, далее в этой главе выведены условия, достаточные для того, чтобы регулярная функция была изображением непрерывного оригинала. Гл. IX посвящена теореме разложе-

ния для случая, когда изображение представляет собой дробно-рациональную функцию (так называемая вторая теорема разложения). В добавлении дано доказательство теоремы об изображении бесконечного ряда.

Автор, предполагает, что читатели знакомы с основами высшей математики. Приведение изображений отдельных функций проводится последовательно с помощью основных теорем, без непосредственного вычисления интеграла Лапласа. В тексте книги приведены решения различных примеров. Упражнения снабжены подробными указаниями, и книга содержит их решения. Не приведены многие основные теоремы. Все формулы обратного преобразования, содержащиеся в книге, являются только следствием тех теорем прямого преобразования, которые приведены в книге. Книга также не содержит таблиц преобразования. Не указаны, кроме добавления, новые результаты. O. Koníček

550 К. Преобразование Лапласа. II. Применение основных свойств в теоретической электротехнике. Пирко (Laplaceova transformace. II. Použití základních vlastností v elektrotechnice. Pírko Zdeněk. Praha, Státní nakladatelství techn. literatury, 1957, 174 str., 43 obr. 12, 90 Kčs.) (чешск.)

Книга представляет собой учебное пособие для студентов электротехнического факультета и посвящена применению основных теорем из первой части (реф. 549) в теоретической электротехнике. В гл. 1 изложено понятие операторного импеданса (адмитанса). В конце главы показано приведение импеданса данного двухполюсника к виду цепной дроби.

В гл. 2 рассматривается включение контура из последовательно соединенных сопротивлений, катушки индуктивности и конденсатора на постоянное напряжение и на «комплексное показательное напряжение e^{at}» (a — комплексное число) при нулевых и ненулевых начальных значениях. Гл. 3 посвящена исследованию включения контура из параллельно соединенных сопротивлений катушки индуктивности и конденсатора, а также схем со смешанным соединением параметров этого типа на постоянное и гармоническое напряжение. В гл. 4 определяется понятие устойчивости системы и излагается теорема Гурвица (без доказательства). Эту теорему автор называет теоремой Рауса—Гурвица, что может привести к замене с критерием Рауса, который иногда называют критерием Шура. В заключение главы автор приводит общий и численный анализ схемы со смешанным соединением параметров R, L, C, характеристическим уравнением которой является уравнение третьей степени. В гл. 5 изложено понятие цепи и метод контурных токов. Как пример приводится анализ цепей, состоящих из индуктивно связанных контуров. Наконец рассматриваются некоторые мостовые схемы. Гл. 6 содержит численный анализ цепи, состоящей из двух индуктивно связанных контуров. В добавлении рассматривается вопрос физической осуществимости начальных условий при помощи схем с переключателями. В книге имеется большое число решенных примеров и упражнений, снабженных подробными указаниями и результатами. Поэтому этой книгой можно пользоваться также в качестве справочника. O. Koníček

551. К. Преобразование Лапласа. Основы теории и применения. Ч. I. Ярох, Пирко, Вейт (Laplaceova transformace. Základy theorie a užiti. Část I. Jaroch Otakar, Pirko Zdeněk, Veit Jan. Praha, SNTL, 1955, 200 s., il., 7.50 Kčs.), Bibliogr. katalog. ČSR. České knihy, 1955, № 15, 372 (чешск.)

552 К. Элементы операционного исчисления. Лекции. 2 изд. Римский-Корсаков Б. С. Всес. заочн. энерг. ин-т. М., 1958, 126 стр., илл., беспл.

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

553. Химическая адсорбция. Батунер Л. М., Протасов А. М., Тр. Ленингр. хим.-фармацевт. ин-та, 1958, вып. 4, 34—43

554. О колебаниях упругого тела линейного поведения. Мандель (Sur les vibrations des corps visco-élastiques à comportement linéaire. Mandel Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 25, 2176—2178 (франц.)

Предлагается использовать преобразование Карсона для интегрирования динамических уравнений теории упругости. И. С. Аржаных

555. Сравнение нескольких методов получения временной характеристики линейных систем для единичного импульса или произвольного входа по данным частотных характеристик. Донеган, Хасс (Comparison of several methods for obtaining the time response of linear systems to either a unit impulse or arbitrary input from frequency—response data. Donegan James J., Huss Carl R. NACA Rept, 1957, № 1324, ii, 13 pp., ill.) (англ.)

556. Анализ нестационарных процессов в нелинейных системах. Смитс (Analyse temporelle de systèmes nonlinéaires. Smets Henri), Revue E, 1957, **2**, № 3, 59—66 (франц.; рез. флам.)

Дается общее представление о решении задачи о нестационарном процессе в нелинейной системе с помощью метода последовательных приближений, основанное на использовании интегралов Дюамеля. Приводится общая схема электрического прибора, позволяющего, по мысли автора, автоматизировать решение поставленной задачи. Г. М. Уланов

557. Дальнейшее исследование итерационных синусоидальных и косинусоидальных интегралов и их амплитудных функций с ссылкой на теорию антенн. Халлен (Further investigations into iterated sine- and cosine-integrals and their amplitude functions with reference to antenna theory. Hallen Erik. Acta politechn. Ser. Electr. Engng, 1955, **6**, № 5, 44 pp.) (англ.)

Работа является продолжением исследований автора над математическим аппаратом, описывающим приемные и передающие свойства антенн.

Рассматривается следующая последовательность интегральных выражений:

$$L(x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-j\xi}}{\xi}\, d\xi, \tag{1}$$

$$L^{01}(x) = \int_0^x \frac{L(\xi)}{\xi}\, d\xi, \tag{2}$$

$$L^{11}(x) = \int_0^x \frac{e^{j\xi} L(\xi)}{\xi}\, d\xi, \tag{3}$$

$$L^{001}(x) = \int_0^x \frac{L^{01}(\xi)}{\xi}\, d\xi, \tag{4}$$

$$L^{011}(x) = \int_0^x \frac{L^{11}(\xi)}{\xi}\, d\xi, \tag{5}$$

$$L^{101}(x) = \int_0^x \frac{e^{j\xi} L^{01}(\xi)}{\xi}\, d\xi, \tag{6}$$

$$L^{111}(x)=\int_0^x \frac{e^{-j\xi}L^{11}(\xi)}{\xi}\,d\xi \qquad (7)$$

При x действительном эти функции можно легко разделить на действительную и мнимую части: $L(x)=C(x)+jS(x)$; $L^{01}(x)=C^{01}(x)+jS^{01}(x)$; $L^{11}(x)=C^{11}(x)+jS^{11}(x)$, $L^{001}(x)=C^{001}(x)+jS^{001}(x)$ и т. д. Функция $S(x)$ является обычным синусоидальным интегралом, для которого существует много таблиц; функция $C(x)$ — „модифицированный" косинусоидальный интеграл, представляющий собой интегральную часть обычного косинусоидального интеграла с обратным знаком (Pedersen P. O., Ingeniørvid. skr., 1935, A, № 38, 48). Функции L^{01} и L^{11} с действительной и мнимой частью автор называет итерационными синусоидальными и косинусоидальными интегралами второго порядка L^{001}, L^{011}, L^{101}, L^{111} — третьего порядка. С выражениями (1) — (7) тесно связаны восемь функций, которые автор называет присоединенными амплитудными функциями:

$$l_0(x)=\gamma+\log x+j\pi/2=\log\gamma_1 x+j\pi/2,$$

где $\gamma=0{,}57721566$ ($\gamma_1=1{,}78107242$) есть константа Эйлера,

$$l(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-j(\xi-x)}}{\xi}\,d\xi, \qquad l^{01}(x)=\int_x^\infty \frac{l(\xi)\,e^{-j(\xi-x)}}{\xi}\,d\xi,$$

$$l^{11}(x)=\int_x^\infty \frac{l(\xi)}{\xi}\,d\xi, \qquad l^{001}(x)=\int_x^\infty \frac{l^{01}(\xi)\,e^{-j(\xi-x)}}{\xi}\,d\xi,$$

$$l^{011}(x)=\int_x^\infty \frac{l^{11}(\xi)}{\xi}\,d\xi, \qquad l^{101}(x)=\int_x^\infty \frac{l^{01}(\xi)}{\xi}\,d\xi,$$

$$l^{111}(x)=\int_x^\infty \frac{l^{11}(\xi)\,e^{-j(\xi-x)}}{\xi}\,d\xi.$$

В теории антенн L-функции входят в выражения для тока стоячей волны, а амплитудные функции — в выражения тока бегущей волны. Доказывается возможность (для действительных положительных значений x) представления L-функций в виде двух членов: апериодического и колебательного с апериодической амплитудой. Разложение L-функций на апериодическую и периодическую части, вообще говоря, не является единственным, если не сделать некоторых ограничений. Для больших значений x такое разложение может быть сделано единственным путем простого продолжения этих же функций, аналитических в окрестности действительной оси, до точки $x=0$, которая является особой точкой для амплитудных функций. Автор предлагает математикам найти более общие условия единственности разложения L-функций. Посредством разложения L-функции в ряд по степеням x и, частично, численного интегрирования составлены таблицы значений коэффициентов действительной и мнимой частей. В качестве примера приведен расчет цилиндрической антенны. Библ. 13 назв. Имеется 6 таблиц. Г. К. Москатов

См. также: 104, 235, 319, 326, 327, 347, 394—397, 406, 409, 481, 549 К, 861, 874, 890, 892, 899, 903

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

558. К одной теореме Гротендика. Комура (On a theorem of A. Grothendieck. Komura Yukio), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1957, 7, № 2, 169—170 (англ.)

Пусть E — локально выпуклое пространство и $\mathfrak{S}$ — покрывающее его семейство абсолютно выпуклых ограниченных подмножеств. Гротендик показал (C. r. Acad. sci., 1950, 230, 605—606, 1562), что если эти множества замкнуты, то совокупность $\hat{E}'$ всех линейных форм на E, непрерывных на каждой $S\in\mathfrak{S}$, совпадает с пополнением E', наделенного $\mathfrak{S}$-топологией (т. е. топологией равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{S}$). Устанавливается, что условие замкнутости множеств $S\in\mathfrak{S}$ можно заменить требованием, чтобы для любых двух S_1, $S_2\in\mathfrak{S}$ существовало $S\in\mathfrak{S}$ такое, что $S_1\cup S_2\subset S$.

Д. А. Райков

559. Экстремальное строение выпуклых множеств. II. Кли (Extremal structure of convex sets. II. Klee V. L., Jr), Math. Z., 1958, 69, № 1, 90—104 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 7888. Точка p подмножества X линейного топологического пространства называется достижимой в X, если имеется замкнутая гиперплоскость, опорная к X в точке p и пересекающаяся с X только в точке p. Автор доказывает (теорема 2.1): Если C есть выпуклый компакт в линейном нормированном пространстве E, то множество экстремальных точек C содержится в замыкании множества достижимых точек C и замкнутая выпуклая оболочка множества достижимых точек C совпадает с C.

Эта теорема содержится в теореме I статьи референта (Докл. АН СССР, 1948, 59, № 6). Основным результатом статьи автор считает следующее обобщение указанной теоремы (теорема 2.3): Если C является локально компактным выпуклым подмножеством нормированного линейного пространства E, не содержащим прямых линий, то C совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой объединения достижимых точек и достижимых лучей C; при этом достижимым лучом C называется замкнутая полупрямая $\rho\subset C$ такая, что $\rho=H\cap C$ для некоторой (замкнутой) гиперплоскости H, опорной к C.

Д. П. Мильман

560. Некоторые классы гомоморфизмов локально выпуклых хаусдорфовых пространств. Депри (Quelques classes d'homomorphismes d'espaces localement convexes séparés. Deprit André), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, 43, № 4, 252—272 (франц.)

Через E и F обозначаются линейные локально выпуклые хаусдорфовы пространства. Линейное непрерывное отображение u пространства E в F называется гомоморфизмом из E в $u(E)$, если это отображение, рассматриваемое как отображение из $E/\ker u$ в $u(E)$, имеет непрерывное обратное отображение (через $\ker u$ обозначается множество всех нулей u). Гомоморфизм u из E в $u(E)(\subset F)$ называется α-гомоморфизмом, если $u(E)$ замкнуто и имеет топологическое дополнение в F (РЖМат, 1956, 2861 К, 3163 К), а подпространство $\ker u$ имеет конечную размерность. Гомоморфизм u из E в $u(E)$ называется β-гомоморфизмом, если $u(E)$ замкнуто и имеет топологическое дополнение в F конечной размерности, а $\ker u$ имеет топологическое дополнение в E.

Гомоморфизмы, являющиеся одновременно α- и β-гомоморфизмами, называются σ-гомоморфизмами. Класс

σ-гомоморфизмов ввел и рассмотрел Шефер (РЖМат, 1957, 7941).

Для α- и β-гомоморфизмов доказываются теоремы, аналогичные предложениям, установленным Шефером для σ-гомоморфизмов. Например:

Для того чтобы линейное непрерывное отображение u пространства E в F было α-(β-) гомоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы существовало линейное непрерывное отображение v пространства F в E такое, что

$$vu = I + k \quad (uv = I + k),$$

где I — тождественное отображение в E, а k — вполне непрерывное или конечномерное линейное отображение.

Исследуются также отображения, сопряженные к α-, β-, σ-гомоморфизмам в исходной и слабой топологиях.

Примечание референта. Доказанные предложения являются обобщениями таких же предложений для операторов, действующих в банаховых пространствах (см., например, Аткинсон Ф. В., Матем. сб., 1951, 28, № 1, 3—14; Гохберг И. Ц., Докл. АН СССР, 1951, 76, № 1, 9—12; № 4, 477—480). И. Ц. Гохберг

561. Некоторые классы эндоморфизмов локально выпуклых хаусдорфовых пространств. Депри (Quelques classes d'endomorphismes d'espaces localement convexes séparés. Deprit André), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1957, Sér. 1, 71, № 2, 89—101 (франц.)

Пусть E — локально выпуклое хаусдорфово линейное топологическое пространство. Гомоморфизм u (реф. 560), отображающий E в свою часть, называется эндоморфизмом. Эндоморфизм u называется ν-(соответственно λ-) эндоморфизмом, если он является α-(соответственно β-) эндоморфизмом и если существует такое натуральное число p, что $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$ (соответственно $u^p(E) = u^{p+1}(E)$). Эндоморфизмы, являющиеся одновременно ν- и λ-эндоморфизмами, называются эндоморфизмами Рисса. Они изучались автором ранее (РЖМат, 1958, 3891). Устанавливается ряд предложений о ν- и λ-эндоморфизмах. Например:

Для того чтобы линейное непрерывное отображение u пространства E в себя было ν-(λ-) эндоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы u можно было представить в виде $u = u_1 + u_2$, где линейное непрерывное отображение u_1 имеет непрерывное обратное слева (справа), u_2 — конечномерное отображение и $u_1 \cdot u_2 = u_2 \cdot u_1$.

Рассматривается также связь между ν- и λ-эндоморфизмами в исходной и слабой топологиях. Отыскиваются условия, при которых сопряженный оператор к данному является ν- или λ-эндоморфизмом.

Примечание референта. Автору, по-видимому, неизвестны работы С. М. Никольского (Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, 7, № 3, 147—166), М. А. Гольдмана и С. Н. Крачковского (Докл. АН СССР, 1952, 86, № 1), референта (Докл. АН СССР, 1955, 101, № 1, 9—12), в которых установлены такие же предложения для линейных операторов, действующих в банаховом пространстве. И. Ц. Гохберг

562. Однородность бесконечномерных параллелепипедов. Кли (Homogeneity of infinite-dimensional parallelotopes. Klee V. L., Jr), Ann. Math., 1957, 66, № 3, 454—460 (англ.)

Топологическое пространство называется однородным относительно семейства $\mathfrak{S}$ принадлежащих ему множеств, если, каково бы ни было $S \in \mathfrak{S}$ всякий гомеоморфизм μ множества S на $\mu S \in \mathfrak{S}$ может быть продолжен до самогомеоморфизма пространства. Доказывается (основная теорема), что если K — выпуклое компактное бесконечномерное множество в нормированном пространстве и Z — счетное замкнутое подмножество множества K, то всякий гомеоморфизм Z в K может быть продолжен до гомеоморфизма K на себя. Эта теорема является обобщением устанавливаемого автором свойства однородности гильбертова параллелепипеда P (P есть множество точек $x = (x^1, x^2, \ldots)$ из l^2 таких, что $|x^n| \leqslant 1/n$ для каждого n) относительно его счетных замкнутых подмножеств. Кроме того, делается ряд дополнительных замечаний (включая доказательство того, что существует только один изотопический класс гомеоморфизмов P в P) и формулируются некоторые нерешенные проблемы. С. Н. Крачковский

563. Согласованность алгебраических и топологических структур; группы и топологические векторные пространства. Годман (Compatibilité des structures algébriques et topologiques; groupes et espaces vectoriels topologiques. Godement M.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1957, 37, № 187, 13—19 (франц.)

Доклад для учителей, посвященный простейшим понятиям теории топологических линейных пространств, до теоремы о продолжении линейных функционалов включительно (Седьмой из докладов топологического цикла, организованных Французским математическим обществом совместно с Ассоциацией учителей математики).

Д. А. Райков

564. Принцип сжатых отображений в метрических пространствах. Бохте (Princip skrčenih slik v metričnih prostorih. Bohte Zvonimir), Obz. mat. in fiz., 1956—1957, 5, № 4, 145—149 (словенск.)

Изложение принципа сжатых отображений в метрических пространствах с доказательством и примерами, приводимыми обычно в учебной литературе.

В. Э. Лянце

565. К одной теореме о неподвижной точке. Деляну (Asupra unei teoreme de punct fix. Deleanu Aristide), Comun. Acad. RPR, 1957, 7, № 10, 839—844 (рум.; рез. русск., франц.)

Обобщается теорема о неподвижной точке в полных метрических пространствах на случай общих метрических пространств (Ghika Al., Bul. stiint. Acad. RPR., Sec. mat. si fiz., 1950, 2, № 8).

Теорема. Пусть E — полное общее метрическое пространство и $\delta(x, y)$ $(x, y \in E)$ — общее расстояние в E, являющееся неотрицательной функцией от t, $t \in T$. Если отображение $f(\lambda)$ пространства E в себя удовлетворяет условию

$$\delta(f(x), f(y)) \leqslant \mu(t)\,\delta(x, y) \qquad (x, y \in E),$$

где $\mu(t)$ — неотрицательная функция, $\mu(t) < 1$ $(t \in T)$, то существует одна и только одна точка $x_0 \in E$ такая, что $f(x_0) = x_0$.

В качестве приложений этой теоремы приводятся теоремы существования решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка и существования решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода для случая, когда искомая функция на отрезке принимает значения в полном хаусдорфовом локально выпуклом топологическом векторном пространстве. К. М. Фишман

566. О применимости теории Фредгольма к некоторым линейным топологическим пространствам. Фишман К. М., Валицкий Ю. Н., Докл. АН СССР, 1957, 117, № 6, 943—946

Пусть B_r — семейство банаховых пространств, зависящих от параметра r $(\alpha < r \leqslant \beta)$, такое, что если $\alpha < r' < r \leqslant \beta$, то B_r — плотный линеал в $B_{r'}$ и $\|f\|_{r'} \leqslant \|f\|_r$ для любого $f \in B_r$. Тогда множество $\mathfrak{A}_r = \prod_{r' < r} B_{r'}$ $(\alpha < r \leqslant \beta)$ плотно в $B_{r'}$ $(r' < r)$; оно становится полным линейным топологическим пространством, если линейные действия имеют в нем тот же смысл, что и в каждом $B_{r'}(r' < r)$, а сходимость означает сходимость в каждом $B_{r'}(r' < r)$. Пространством, сопряжен-

ным с $\mathfrak{A}_r$, является $\mathfrak{A}^*_r = \sum_{r'<r} B^*_{r'}$; линейные действия в нем определены, как и в $B^*_{r'}$; топология рассматривается слабая и сильная. Пусть A — линейный непрерывный оператор, отображающий B_r в себя ($\alpha < r \leqslant \beta$), причем его действие не зависит от r; тогда сопряженный с ним оператор A^* будет действовать в B^*_r тоже независимо от r. Таким образом, A и A^* можно рассматривать соответственно на $\mathfrak{A}_r$ и $\mathfrak{A}^*_r$; это будут линейные непрерывные операторы (A^* непрерывен по обеим топологиям), действие которых не зависит от r. Доказывается, что если к оператору A в каждом B_r применима теория Фредгольма, то это имеет место и в каждом $\mathfrak{A}_r$ ($\alpha < r \leqslant \beta$); кроме того, если на $\mathfrak{A}_r$ существуют A^{-1} и A^{*-1}, то они непрерывны (A^{*-1} по обеим топологиям). Пусть G — область комплексной плоскости (λ) такая, что оператор $A_\lambda = I - \lambda B$ (где B — линейный непрерывный оператор на B_r, действие которого не зависит от r) разложим на сумму конечномерного и обратимого операторов в каждом B_r, и пусть существует значение $\lambda_0 \in G$, для которого оператор A_λ обратим в B_r. Доказывается, что тогда в любой замкнутой части области G число значений λ, для которых оператор A_λ необратим в $\mathfrak{A}_r$, конечно; эти значения одни и те же для всех r. Приводится пример, реализующий рассматриваемую схему. С. Н. Крачковский

567. Некоторые примеры пространств типа (F) и (DF). Амэмия (Some examples of (F) and (DF) spaces. Amemiya Ichiro), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 4, 169—171 (англ.)

Даны примеры, отвечающие на вопросы 1, 4 и частично 5 Гротендика (РЖМат, 1958, 8985). В § 1 показано существование пространства типа (F), не обладающего устойчивой ограниченностью (говорят, что пространство E типа (F) обладает устойчивой ограниченностью, если для каждого ограниченного множества $B \subset E$ и каждого подпространства E_0, плотного в E, существует ограниченное множество $A \subset E_0$, замыкание которого содержит B). В § 2 дан пример такого рефлексивного пространства типа (F), что в сопряженном с ним пространстве существует ограниченное множество, на котором сильная топология не метризуема. В § 3 дан пример борнологического пространства типа (DF), второе сопряженное с которым не является борнологическим. С. Н. Крачковский

568. Одно свойство гомоморфизмов пространств Фреше. Депри (Une propriété des homomorphismes d'espaces de Fréchet. Deprit André), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 11, 834—837 (франц.)

Сложение гомоморфизма пространства Фреше E в пространство Фреше F с конечномерным гомоморфизмом E в F дает снова гомоморфизм E в F. Д. А. Райков

569. Выпуклость пространств Орлича. Милнс (Convexity of Orlicz spaces. Milnes Harold Willis), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 3, 1451—1483 (англ.)

Изучаются условия строгой и равномерной выпуклости пространств Орлича в широком смысле.

Пусть $v = \varphi(u)$ $(u \geqslant 0)$ — неубывающая, непрерывная слева функция, $\varphi(0) = 0$. Через $\psi(v)$ обозначается функция, „обратная" к $\varphi(u)$, определенная равенствами $\psi(0) = 0$, $\psi(v) = u$, если $\varphi(u) = v$ и u является точкой непрерывности функции $\varphi(u)$; $\psi(v) = \psi(v-0)$; если $\varphi(u) \neq \varphi(u+0)$, то $\psi(v) = u$ для всех $v \in [\varphi(u), \varphi(u+0)]$. Если $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = l$, то $\psi(v) = \infty$ для всех $v \geqslant l$. Через $\Phi(u)$ и $\Psi(v)$ $(u, v \geqslant 0)$ обозначаются неопределенные лебеговы интегралы от функций $\varphi(u)$ и $\psi(v)$: $\Phi(u) = \int_0^u \varphi(t)\,dt$, $\Psi(v) = \int_0^v \psi(t)\,dt$.

Пусть Δ — пространство с σ-конечной неатомической мерой μ. Для каждой μ-измеримой функции $f(x)$ определяется норма

$$\|f\|_\Phi = \sup \int_\Delta |f(x)|\, g(x)\, d\mu,$$

где верхняя грань берется для всех таких $g(x) \geqslant 0$, что $\int_\Delta \Psi(g)\,d\mu \leqslant 1$. Через $L_\Phi = L_\Phi(\Delta, \mu)$ обозначается совокупность всех μ-измеримых функций $f(x)$, для которых $\|f\|_\Phi < \infty$. Пространства Орлича, определенные таким образом, содержат все пространства L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Основная теорема: Для того чтобы пространство L_Φ было равномерно выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) функции $\psi(v)$ и $\Psi(v)$ непрерывны; 2) существует такая постоянная $N > 0$, что $\Phi(2u)/\Phi(u) \leqslant N$, $\Psi(2v)/\Psi(v) \leqslant N$ при всех $u, v \geqslant 0$, если $\mu\Delta = \infty$, и при достаточно больших u, v, если $\mu\Delta < \infty$; 3) для каждого положительного $\varepsilon < 1/4$ существует такая постоянная $R_\varepsilon > 0$, что $\varphi(u)/\varphi((1-\varepsilon)u) > R_\varepsilon$ при всех $u > 0$, если $\mu\Delta = \infty$, и при достаточно больших u, если $\mu\Delta < \infty$.

Примечание референта. Отметим работу Люксембурга (Luxemburg W. A. J, Banach function spaces, Thesis, Delft, 1955), в которой получены условия равномерной выпуклости пространств Орлича, нормированных другим образом. Я. Б. Рутицкий

570. Пространства Орлича векторных полей. Динкуляну (Spatii Orlicz de cîmpuri de vectori. Dinculeanu Nicolae), Studii si cercetări mat. Acad. RPR, 1957, 8, № 3-4, 343—412 (рум.; рез. русск., франц.)

Подробное изложение результатов, большинство из которых было опубликовано ранее автором без доказательств (РЖМат, 1958, 6897, 6898). Я. Б. Рутицкий

571. Признак устойчивости базиса в пространствах Банаха. Вейц Б. Е., Тр. Мурманского высш. мореходн. уч-ща, 1957, вып. 1, 147—151

Результаты работы содержатся в предложении, сформулированном в книге «Математика в СССР за 30 лет» (М.—Л., Гостехиздат, 628—629). Ю. А. Казьмин

572. Заметка о банаховых пространствах функций. Эллис (A note on Banach function spaces. Ellis H. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 75—81 (англ.)

Используются обозначения и терминология статьи автора и Гальперина (РЖМат, 1954, 4489).

Пусть $(X \times Y, S \times T, \mu \times \nu)$ обозначает пополнение декартова произведения σ-конечных и полных пространств с мерой (X, S, μ) и (Y, T, ν) — по терминологии книги Халмоша (РЖМат, 1954, 3653, К). Если λ есть функция длины в (X, S, μ), B — банахово пространство вещественных функций на Y, измеримых T, то каждый элемент в $L^\lambda(B)$ есть функция f_x от $x \in X$, которая при каждом значении x является функцией $f_x(y) = f(x, y)$ от $y \in Y$. Автор рассматривает случай, когда $B = L^\Delta$, где Δ — также функция длины. Исследуется связь $L^\lambda(B)$ при $B = L^\Delta$ с $L^{\lambda\Delta}$, где $L^{\lambda\Delta}$ — пространство функций $f(x, y)$, измеримых в $S \times T$, для которых $\lambda\Delta(f) = \lambda[\Delta(f)] < \infty$ определяет норму ($\lambda\Delta$ также оказывается функцией длины).

Доказывается (теорема 1.1), что $L^\lambda(L^\Delta)$ всегда эквивалентно некоторому подпространству $L^{\lambda\Delta}$. Дается критерий эквивалентности $L_\lambda(L_\Delta)$ самому пространству $L^{\lambda\Delta}$, из которого, в частности, вытекают следствия

1) Если L^Δ сепарабельно либо рефлексивно, то $L^{\lambda\Delta}$ эквивалентно $L^\lambda(L^\Delta)$; 2) $L^{\lambda\Delta}$ сепарабельно, (рефлексивно) тогда и только тогда, когда L^λ и L^Δ сепарабельны (рефлексивны). Д. П. Мильман

573. Представление линейных функционалов посредством последовательностей функций. Уэстон (The representation of linear functionals by sequences of functions. Weston J. D.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 123—125 (англ.)

Пусть X — нормированное векторное пространство, Y — сепарабельное подпространство сопряженного пространства X^*. Доказывается, что каждому ограниченному линейному функционалу z на Y соответствует последовательность $\{x_n\}$ элементов из X такая, что: 1) $\|x_n\| \leqslant \|z\|$, 2) $z(y) = \lim_{n\to\infty} y(x_n)$ для любого $y \in Y$. Отмечаются две известные теоремы, которые являются частными случаями этого предложения; первая получается, если положить $X = C$, $Y = L$, вторая, — если $X = L$, $Y = C$. С. Н. Крачковский

574. Общие теоремы о линейном ограниченном операторе и его сопряженном. Тейлор, Халберг (General theorems about a bounded linear operator and its conjugate. Taylor Angus E., Halberg Charles J. A.), J. reine und angew. Math., 1957, **198**, № 1-2, 93—111 (англ.)

Дается систематическое изложение общих теорем, связанных с обратимостью линейных ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах. Исходя из этих теорем, авторы указывают некоторую классификацию операторов. Новых результатов статья не содержит. И. Ц. Гохберг

575. Об одном свойстве ядра линейного оператора. Маркус А. С., Уч. зап. Кишеневск. ун-та, 1957, **28**, 25—28

Пусть A — линейный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве E. Через Φ обозначается связная компонента множества всех комплексных чисел λ, для которых оператор $A - \lambda I$ нормально разрешим и уравнение $(A - \lambda I)x = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений. Через $N(A - \lambda I)$ обозначается конечномерное подпространство, базисом которого являются нуль-элементы конечных строк из канонической таблицы нуль-элементов оператора $A - \lambda I$ (РЖМат, 1955, 3845; 1956, 5972). Всюду в Φ, за исключением, быть может, некоторого множества Γ, состоящего из изолированных точек, $N(A - \lambda I) = 0$. Ядром оператора $A - \lambda I$ называется $K(A - \lambda I) = \bigcap_{j=1}^{\infty}(A - \lambda I)^j E$.

Доказывается, что для всех $\lambda \in \Phi$ прямая сумма $K(A - \lambda I) \dotplus N(A - \lambda I)$ постоянна (т. е. она не зависит от λ). Для точек $\lambda \in \Phi - \Gamma$ это предложение установлено ранее референтом и автором (РЖМат, 1956, 6686, 6687). Во втором параграфе приводится обобщение сформулированного выше предложения. И. Ц. Гохберг

576. Замечание об одной теореме Хадвигера. Стейнберг (Note on a theorem of Hadwiger. Steinberg R.), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 4, 775—777 (англ.)

Теорема Хадвигера, о которой здесь идет речь, заключается в следующем: Равенство Парсеваля

$$(x,y) = \sum_\alpha (x,u_\alpha)(u_\alpha,y).$$

(где x, y, u_α — векторы гильбертова пространства H над полем вещественных или комплексных чисел и круглая скобка означает скалярное произведение векторов) выполняется для любых двух векторов x и y в том и только в том случае, если $\{u_\alpha\}$ можно рассматривать как ортогональную проекцию на H ортонормированного базиса содержащего H гильбертова пространства K. В работе дано простое доказательство этой и нескольких родственных ей теорем. И. М. Яглом

577. Алгебры непрерывных линейных отображений одного гильбертова пространства в другое. Гика (Algebre de transformări liniare si continue ale unui spatiu hilbertian în altul. Ghika Al.), Comun. Acad. RPR, 1957, **7**, № 10, 831—834 (рум.; рез. русск., франц.)

Пусть H и I — гильбертовы пространства, $(x|x')$, $(y|y')$ — скалярные произведения в них, T — линейное непрерывное отображение H в I и W — частично изометричное отображение H в I такое, что $T = WW^*T = TW^*W$ и W^*T является положительным самосопряженным оператором в H. Через $L_{W^*,C}(HI)$ обозначается банахова алгебра всех линейных непрерывных отображений H в I по отношению к умножению $A \circ B = AW^*B$.

Теорема. Подалгебра $\mathfrak{A}_{W^*,C}(T)$ алгебры $L_{W^*,C}$, порожденная элементами W и T, изоморфна банаховой алгебре $C(K)$ всех непрерывных комплексных функций на отрезке $K = [0, \|T\|]$. Этот изоморфизм $A \to f^A$ обладает свойствами:

$$1)\ f^{A+B} = f^A + f^B,\quad 2)\ f^{A\circ B} = f^A f^B,\quad 3)\ f^{\lambda A} = \lambda f^A,$$

$$4)\ f^{A^\circ} = \overline{f^A}\ (A^\circ = WA^*W),\ 5)\ \|f^A\| = \|A\|\ (AB \subset \mathfrak{A}_{W,*C}(T),$$

λ — комплексное) и 6) $(Ax|y) = \int_0^\infty f^A(t)\,d(W_t x|y)$ $(x \in H$, $y \in I)$, где W_t является W-спектральным семейством T (РЖМат, 1958, 10017).

Опечатка: на странице 831 в последней строке должно быть T_T вместо T. К. М. Фишман

578. Полиномиальная полнота в локально мультипликативно выпуклых алгебрах. Уорнер (Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras. Warner Seth), Duke Math. J., 1956, **23**, № 1, 1—11 (англ.)

Топология I алгебры E называется локально мультипликативно выпуклой, если I является локально выпуклой топологией векторного пространства E и существует фундаментальная система идемпотентных окрестностей нуля, т. е. таких окрестностей U, что $U^2 \subset U$. Пусть $h(x, y) = x \circ y$, $x, y \in E$ — какая-нибудь ассоциативная композиция, для которой единицей служит нулевой элемент алгебры E. Алгебра E называется h-полной в (x, y), где $x, y \in E$, если для каждого фильтра Коши такого, что $F \circ x \to 0$ и $y \circ F \to 0$, фильтр F сходится к некоторому элементу E. Алгебра E, h-полная в (x, y) для всех $x, y \in E$, называется h-полной. Алгебра E называется h-алгеброй (Q-алгеброй, в терминологии Капланского, если $h(x, y) = x \circ y = x + y - xy$), когда множество всех $x \in E$, для которых существуют такие y, $z \in E$, что $x \circ y = z \circ x = 0$, является окрестностью нуля в E.

Доказывается, что всякая h-алгебра является h-полной. Изучаются некоторые свойства локально мультипликативно выпуклых алгебр, связанные с h-полнотой, аналогичные соответствующим свойствам нормированных колец (существование окрестности единицы в нормированном кольце, состоящей из регулярных элементов). Статья является одной из глав диссертации автора. Пояснения некоторых обозначений, используемых автором, содержатся, по-видимому, в других главах. Поэтому чтение статьи затруднительно. В. Э. Лянце

579. О некоторых функциональных уравнениях в комплексном гильбертовом пространстве L^2. Бэдеску (Asupra unor ecuatii functionale din spatiul Hilbert complex L^2. Bădescu Radu), Studii si cercetări mat., 1956, **7**, № 3-4, 273—290 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается уравнение Фредгольма второго рода

$$\Phi(z) - \mu\Theta[\Phi(z)] = \psi(z),$$

где $\psi(z)$ и искомый элемент $\Phi(z)$ принадлежат сепара-

бельному гильбертову пространству E комплексных функций комплексной переменной z, определенных в некоторой области D, суммируемых с квадратом вдоль спрямляемого контура $C \subset D$, а оператор Θ является диагональным (Натансон Н. П., Уч. зап. ЛГУ, 1948, вып. 15, 174—187) вполне непрерывным линейным оператором в E.

Известные свойства данного уравнения и его решений выводятся автором методами теории аналитических функций. Приводятся также некоторые примеры, иллюстрирующие изложенное. К. М. Фишман

580. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. Бродский М. С., Лившиц М. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 1, 3—85

Дается обзор работ по теории несамосопряженных операторов, причем в основном рассматриваются работы, использующие понятие характеристической матрицы-функции, введенной одним из авторов (РЖМат, 1954, 5660).

В гл. I вводится определение характеристической матрицы-функции линейных операторов, дается метод построения операторов по данной характеристической матрице-функции, а также доказывается теорема умножения характеристических матриц-функций.

В гл. II доказывается возможность мультипликативного представления характеристической матрицы-функции. Отмечается, что впервые такое представление было получено В. П. Потаповым (РЖМат, 1958, 289). Пользуясь мультипликативным представлением характеристической матрицы-функции, авторы показывают, что операторы некоторого достаточно широкого класса могут быть унитарным преобразованием приведены к треугольному виду, и строят соответствующую треугольную модель.

В гл. III рассматриваются диссипативные операторы. Авторы называют оператор A диссипативным, если $(A-A^*)/i \geqslant 0$. Для диссипативных операторов, спектр которых сосредоточен в нуле, находится необходимое и достаточное условие одноклеточности (Оператор называется одноклеточным, если из любых двух его инвариантных подпространств одно является частью другого). Указывается связь между одноклеточностью оператора и единственностью решения некоторой обратной задачи для систем дифференциальных уравнений. Кроме того, в гл. III рассматриваются вопросы полноты конечномерных инвариантных подпространств оператора A, а также излагаются некоторые результаты референта по приведению к диагональному виду несамосопряженных операторов с непрерывным спектром.

В гл. IV показывается, что характеристическая матрица-функция совпадает с матрицей рассеяния, введенной Гейзенбергом. Связь между матрицей рассеяния и характеристической матрицей-функцией дает возможность истолковать результаты теории несамосопряженных операторов в терминах теории промежуточных систем. Л. А. Сахнович

581. Спектральная теория для одного класса ненормальных операторов. II. Гоншор (Spectral theory for a class of non-normal operators. II. Gonshor Harry), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 97—102 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 6488.

Изучается строение кольца $C(A, A^*)$, порожденного в равномерной операторной топологии оператором A и ему сопряженным A^* в сепарабельном гильбертовом пространстве, причем A есть J_2-оператор (относительно определений и обозначений см. РЖМат, 1957, 6488). Для формулирования результатов в пространстве Q всех троек (λ, μ, a) (см. там же) определяется подпространство Q_∞ троек $(\lambda, \mu, 0)$, спектр A, по определению, лежит в произведении $Z \times Q_\infty$ комплексной плоскости Z и подпространства Q_∞, т. е. состоит из точек вида $p = (z; \lambda, \mu, 0)$. Доказывается, что $C(A, A^*)$ алгебраически изоморфно и изометрично алгебре функций $g(p)$, заданных на спектре K оператора A и обладающих следующими свойствами: $g(p)$ есть непрерывная комплекснозначная функция, числовая при $p = (z; 0, 0, 0) \in K \cap Z$ и матричная (2-го порядка) при $p = (0; \lambda, \mu, 0) \in K \cap Q_\infty$, причем существует непрерывная комплекснозначная функция $f(z)$ такая, что $g(p) = f(z)$ в первом случае и

$$g(p) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\mu) \end{bmatrix}$$ во втором случае.

М. К. Фаге

582. Спектральная теория дифференциального оператора четвертого порядка. Круликовский Н. Н., Докл. 7-й Научн. конференции, посвящ. 40-летию Великой Октябрьской соц. революции. Вып. 2. Томск, Томский ун-т, 1957, 4

Рассматривается дифференциальный оператор

$$Lu = \frac{d^4u(x)}{dx^4} + p(x)\,u(x)$$

с особенностями функции $p(x)$ на концах интервала (a,b). Автор сообщает, что им проведено исследование указанного оператора с помощью методов спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. А. В. Штраус

583. К теории редукции гильбертовых пространств. Лептин (Zur Reduktionstheorie Hilbertscher Räume. Leptin Horst), Math. Z., 1958, **69**, № 1, 40—58 (нем.)

Основной результат: Всякое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ изоморфно пространству L^2 суммируемых с квадратом функций на некотором пространстве X с мерой. При этом X есть подпространство пространства вида $S \times D$, где S и D — пространства с мерой и D дискретно. Устанавливаемый изоморфизм между $\mathfrak{H}$ и L^2 обладает следующим свойством: если в $\mathfrak{H}$ задана полная булева алгебра P перестановочных между собой проекторов (Stamm), то в L^2 алгебре P соответствует алгебра проекторов, определяемых как операторы умножения на характеристические функции измеримых множеств из S. Пространство S определяется по заданному $\mathfrak{H}$ однозначно с точностью до эквивалентности. При этом S и S' называются эквивалентными, если существует изоморфизм между $L^2(S)$ и $L^2(S')$, при котором характеристические функции измеримых множеств из S соответствуют характеристическим функциям измеримых множеств из S' и обратно.

Автор отмечает, что его результаты уже встречались в литературе в эквивалентных формулировках. В частности, та же задача рассматривалась в работе Тома (РЖМат, 1958, 7907). Б. З. Вулих

584. Редукция линейных функционалов на кольцах операторов. Лептин (Reduktion linearer Funktionale auf Operatorringen. Leptin Horst), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1958, **22**, № 1-2, 98—113 (нем.)

Работа примыкает к предыдущей (реф. 583). Рассматриваются гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, состоящее из суммируемых с квадратом функций на некотором пространстве X с мерой, и некоторое кольцо A ограниченных операторов на $\mathfrak{H}$. Изучается возможность представления линейных функционалов, заданных на A, в виде интегралов по S (см. обозначения в реф. 583) от функций точки, непрерывных почти всюду на S. Такие функционалы автор называет редуцируемыми. Указывается ряд свойств функционала, эквивалентных редуцируемости. Б. З. Вулих

585. Неизоморфные аппроксимативно конечные факторы. Уайдом (Nonisomorphic approximately finite factors. Widom Harold), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 3, 537—540 (англ.)

Фактор M типа II_1 называется аппроксимативно конечным (A), если для любых заданных $A_1, \ldots, A_n \in M$ и $\varepsilon > 0$, существует такой подфактор $N \subset M$ типа I, содержащий элементы $B_1, \ldots, B_n$ такие, что $\|B_i - A_i\| < \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n$. Фактор M аппроксимативно конечен (B), если он содержит попарно перестановочные подфакторы N_α типа I такие, что кольцо, порожденное этими подфакторами, совпадает с M. Доказывается, что существуют факторы, аппроксимативно конечные (A), но не (B). В. Э. Лянце

586. Об обращении дифференцируемых отображений. Неванлинна (Über die Umkehrung differenzierbarer Abbildungen. Nevanlinna F.) Suomalais. tiedeakat. toimituks, 1957, Sar. AI, № 245, 14 S.) (нем.)

Результаты, полученные в реферируемой работе, являются развитием соответствующих результатов Р. Неванлинны (РЖМат, 1957, 2257).

Рассматриваются два действительных полных гильбертовых пространства R_x и R_y и отображение $y(x)$ шара $\|x\| < \rho_0$ пространства R_x в пространство R_y. Предполагается, что: 1) отображение $y(x)$ дифференцируемо в шаре $\|x\| < \rho_0$ 2) $\inf \|y'(0)h\| = \mu > 0$ и оператор $y'(0)$ взаимно однозначно отображает пространство R_x на все пространство R_y. Вводится норма оператора $y'(x) - y'(0)$ по формуле

$$\|y'(x) - y'(0)\| = \sup_{\|h\|=1} \|y'(x)h - y'(0)h\|.$$

Рассматривается функция $\varphi(\rho) = \sup_{\|x\| < \rho} \|y'(x) - y'(0)\|$ и предполагается еще, что $\varphi(+0) < \mu$. Из этого следует, что существует радиус $\rho_x > 0$ такой, что при $\|x\| < \rho_x$ имеет место $\inf_{\|h\|=1} \|y'(x)h\| \geqslant \mu - \varphi(\rho) > 0$. В этих предположениях доказывается, что отображение $y = y(x)$ ($y(0) = 0$) отображает шар $\|x\| < \rho_x$ пространства R_x взаимно однозначно на некоторую область G_y пространства R_y, причем в области G_y обратное отображение дифференцируемо, а для оператора производной имеет место формула $x'(y) = [y'(x)]^{-1}$. Далее доказывается, что область G_y содержит шар $|y| < \int_0^{\rho_x} [\mu - \varphi(\rho)]\, d\rho = \rho_y$ и что радиусы ρ_x и ρ_y, вообще говоря, не могут быть увеличены без каких-либо дополнительных требований. Л. Д. Кудрявцев

587. Дифференциальное исчисление для неметрических структур. Фишер (Differentialkalkül für nichtmetrische Strukturen. Fischer H. R. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1957, Sar. AI, № 247, 15 S.) (нем.)

В работе проводится построение основ дифференциального исчисления для топологических групп без предположения выполнения второй аксиомы счетности и, следовательно, при отсутствии, вообще говоря, возможности метризации рассматриваемой группы. Дается определение дифференцируемости (соответственно слева и справа) в данной точке отображения φ топологической группы G в топологическую группу G' с помощью определенной аппроксимации в малом отображения φ гомоморфизмами группы G в G'. При этом существенную роль для определения в нужном смысле указанной аппроксимации играет понятие квазиметрики.

Доказывается, например, что отображение, дифференцируемое в некоторой точке, является непрерывным в этой точке; устанавливается правило дифференцирования суперпозиции отображений, а для абелевых групп и правило дифференцирования суммы отображений. В случае локально выпуклых действительных векторных пространств устанавливаются соответствующие обобщения теоремы Ролля, теоремы Лагранжа о среднем значении, разложения функции в ряд Тейлора, теоремы о фикспунктах и теоремы о неявных функциях. Как указывается автором, его результаты являются развитием соответствующих идей Фреше и Р. Неванлинны для случая нормированных пространств. Л. Д. Кудрявцев

588. Дифференциальное исчисление для неметрических структур. II. Дифференциальные формы. Фишер (Differentialkalkül für nicht-metrische Strukturen. II: Differentialformen. Fischer H. R.), Arch. Math., 1958, 8, № 6, 428—443 (нем.)

Часть I см. реф. 587.

Рассматривается локально выпуклое полное топологическое векторное пространство E над полем вещественных чисел R. Вводится понятие интеграла непрерывного отображения R в E, доказывается его дифференцируемость по верхнему пределу, строятся основы теории дифференциальных форм в E и изучаются интегралы от дифференциальных форм. Л. Д. Кудрявцев

589. О теореме Борсука. Альтман (On a theorem of K. Borsuk. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, 5, № 11, 1037—1040, LXXXVI (англ.; рез. русск.)

Пусть f — непрерывное отображение банахова пространства X в себя. Говорят, что f является ε-отображением (соответственно ε-отображением в узком смысле) ($\varepsilon > 0$) на множестве $X_1 \subset X$, если из $f(x_1) = f(x_2)$ (соответственно из $\|f(x_1) - f(x_2)\| < \eta$, где η — некоторое положительное число) вытекает $\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$ для $x_1, x_2 \in X_1$.

Доказывается, что если $f(x) = x - F(x)$, где F — вполне непрерывный оператор, действующий на X, и если для каждой точки $x \in X$ существует замкнутый шар $S(x, \varepsilon_x)$ радиуса $\varepsilon_x > 0$ с центром в x, на котором f является ε_x-отображением в узком смысле, то множество $f(X)$ открыто; если, кроме того, для каждой точки $x \in X$ существуют сколь угодно малые шары $S(x, \varepsilon_x)$ то f — открытое отображение; в обоих случаях $f(X) = X$, если нижняя грань чисел η_x, отвечающих шарам $S(x, \varepsilon_x)$, положительна. С. Н. Крачковский

590. Новое доказательство теоремы об инвариантности области в пространствах с выпуклыми окрестностями. Альтман (Une nouvelle preuve du théorème de l'invariance du domaine dans les espaces à voisinages convexes. Altman Mieczyslaw), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 14, 2094—2095 (франц.)

Пусть X — векторное пространство с выпуклыми окрестностями, G — открытое множество в X. Отображение $F: G \to X$ называется локально вполне непрерывным, если для любой точки $x \in G$ существует симметричная выпуклая открытая окрестность V_x нуля такая, что: 1) замыкание $\overline{V}_{(x)}$ множества $V_{(x)} = x \otimes V_{(x)}$ содержится в G, 2) множество $F(\overline{V}_{(x)})$ компактно. Доказывается, что если $f(x) = x - F(x)$, где F локально вполне непрерывно, и если f локально взаимно однозначно, то $f(G)$ открыто в X. Отмечается, что эта теорема доказывалась другими авторами при различных предположениях относительно пространства X. Доказательство, проводимое в реферируемой заметке, использует данное автором обобщение теоремы Борсука об антиподах на пространства с выпуклыми окрестностями. С. Н. Крачковский

591. О непрерывных отображениях открытых множеств в банаховых пространствах. Гранас А., Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, 6, № 1, 25—29 (рез. англ.)

Пусть O — открытое множество в банаховом пространстве X, f — непрерывное отображение O в X, обладающее тем свойством, что для каждого $x \in O$ существует содержащийся в O замкнутый шар радиуса $\varepsilon_x > 0$ с центром в x такой, что f является на нем ε_x-отобра-

жением (реф. 589). Доказывается, что если f имеет вид $f(x) = x - F(x)$, где F — вполне непрерывный оператор на O, то $f(O)$ открыто в X. Доказательство основано на применении обобщенной М. А. Красносельским (Укр. матем. ж., 1951, 3, № 2) теоремы Борсука об антиподах. Формулируется ряд теорем (которые обобщают теорему Брауэра — Шаудера об инвариантности области, а также теоремы Борсука о непрерывных отображениях евклидова пространства), вытекающих из этого основного результата. С. Н. Крачковский

592. Об одной теореме Тейлора. Фогел (On a theorem by A. E. Taylor. Foguel Shaul R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 325 (англ.)

По теореме Г. А. Сухомлинова (Матем. сб., 1938, **3**, 353—358) и Боненблуста и Собчика (Bohnenblust H. F., Sobczyk A., Bull. Amer. Math. Soc., 1938, **44**, 91—93) линейный ограниченный функционал f, определенный на линейном подмножестве M комплексного линейного нормированного пространства B, может быть продолжен с сохранением нормы до линейного ограниченного функционала F, определенного на всем пространстве B. Тейлор (Taylor A. E., Duke Math. J., 1939, **5**, 538—547) доказал, что если сопряженное пространство B^* строго выпукло, то указанное продолжение осуществимо единственным образом.

Автор доказывает обратную теорему: Если сопряженное пространство B^* не является строго выпуклым, то существует такой линейный ограниченный функционал f, определенный на некотором линейном подмножестве пространства B, что линейное продолжение f на все пространство B с сохранением нормы не единственно.

А. С. Маркус

593. Об условиях разрешимости задачи Чаплыгина. Цалюк З. Б. (в подлиннике З. В.), Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 129—130

Формулируются три теоремы из работы Н. В. Азбелева и автора (реф. 594). А. Н. Балуев

594. О задаче Чаплыгина. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 1, 3—12 (рез. англ.)

Задачей Чаплыгина называется задача отыскания в K-пространстве X элемента z, удовлетворяющего неравенству $z \geqslant x$ или $z \leqslant x$, где x — решение функционального уравнения $P(x) = 0$. Доказываются три теоремы о решении задачи Чаплыгина для абстрактных уравнений. Для линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(x) - \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, y^{(k)}(x) = f(x)$$

устанавливается необходимый и достаточный критерий положительности (вместе с производными) решения при условии $f(x) \geqslant 0$. Для нелинейного уравнения

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$$

указываются достаточные условия, при которых из неравенства $z^{(n)}(x) \geqslant f(x, z, \ldots, z^{(n-1)})$ следует, что $z^{(k)} \geqslant y^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. А. Н. Балуев

595. Об общей теории наилучшего приближения. Хиршфельд (Sur la théorie générale des meilleures approximations. Hirschfeld Rudi), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 10, 1485—1488 (франц.)

Пусть E — пространство Банаха, $G \subset E$ — замкнутое подпространство, x — произвольный элемент E. Положим $\| x - A_G x \| = \inf_{g \in G} \| x - g \|$. A_G автор называет оператором аппроксимации. Будем говорить, что: 1) E обладает свойством (E), если $A_G x \in G$ существует при любом G для каждого $x \in E$; 2) E обладает свойством (U), если $A_G x$ определяется единственным образом; 3) E обладает свойством (L), если оператор A_G является линейным.

В статье приводится несколько теорем (без подробного доказательства), в которых указываются необходимые или достаточные условия того, чтобы пространство E обладало перечисленными выше свойствами. Так, для выполнения (E) достаточно, но не необходимо, чтобы E было рефлексивным (теорема 1). Для выполнения (U) необходимо и достаточно, чтобы E было строго выпуклым (теорема 3). Свойство $\| A_G x \| \leqslant \| x \|$, а также свойство (L) являются в известном смысле характеристическими для гильбертовых пространств (теоремы 4 и 5). В. Н. Никольский

596. Связь между методом наискорейшего спуска и методом Ньютона. Альтман (Connection between the method of steepest descent and Newton's method. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 11, 1031—1036, LXXXVI (англ.; рез. русск.)

Устанавливается связь между обобщенным методом Ньютона-Канторовича (РЖМат, 1958, 3084, 3085) и методом наискорейшего спуска, разработанным Л. В. Канторовичем для линейных уравнений (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89 — 185). Показано, что первый метод является обобщением второго. Этот первый метод применяется в реферируемой статье. Пусть в шаре $S(\| x - x_0 \| \leqslant r)$ гильбертова пространства H задан дифференцируемый по Фреше оператор $P(x)$ со значениями в H и $Q(x) = \left(P'(x)\right)^* P(x)$. Предполагается, что $Q(x)$ имеет производную Фреше $Q'(x)$, причем в S $\| Q'(x) \| \leqslant K$ и $\| \left(P'(x)\right)^* y \| \geqslant B^{-1} \| y \|$ для всякого $y \in H$.

Теорема 1. Пусть $B^2 K < 1$, $\| x_1 - x_0 \| = \| P(x_0) \|^2 \| Q(x_0) \|^{-1} \leqslant \eta_0$ и $r = \| \eta_0 \left(1 - B\sqrt{K}\right)^{-1}$ Тогда последовательные приближения

$$x_{n+1} = x_n - \| P(x_n) \|^2 \| Q(x_n) \|^{-2} Q(x_n)$$

сходятся к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$ и $\| x_n - x^* \| \leqslant \alpha^n (1 - \alpha)^{-1} \eta_0$, где $\alpha = B\sqrt{K}$.

Теорема 2. Пусть в S $\| P(x) \| \leqslant D$, $\| P'(x) \| \leqslant E$, $\| P''(x) \| \leqslant K_0$, $B^2(E^2 + K_0 D) < 1$ и $r = \eta_0 \left[1 - B\sqrt{E^2 + K_0 D}\right)^{-1}$. Тогда имеет место утверждение теоремы 1, где $\alpha = B\sqrt{E^2 + K_0 D}$.

Установлены и другие предложения. М. М Вайнберг

597. О приближенном решении операторных уравнений в пространствах L^p. Альтман (On the approximate solutions of operator equations in L^p spaces. Altman M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 12, 1099—1103, XCI (англ.; рез. русск.)

Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор из $L^p = L^p(a, b)$ в L^p, $1 < p \leqslant 2$, дифференцируемый по Фреше в шаре $S(\| x - x_0 \| \leqslant r)$, и $f(x) = \left(P'(x)\right)^*$ sign $P(x) |P(x)|^{p-1}$ имеет в S производную Фреше $f'(x)$. Предполагается, что в S $\| f'(x) \| \leqslant K$ и $\| P'(x) y \| \geqslant B^{-1} \| y \|$ для всякого $y \in L^q$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Теорема 1. Пусть $B^p K < 2p^{p-1}$, $\| x_1 - x_0 \| = \| P(x_0) \|^p (p \| f(x_0) \|)^{-1} \leqslant \eta_0 \leqslant 1$ и $r = \eta_0 (1 -$

$-B\left(p^{-1}/q\right)(K/2)^{1/p}\Big)^{-1}$. Тогда последовательные приближения

$$x_{n+1} = x_n - \| P(x_n) \|^p p^{-1} \| f(x_n) \|^{-1} y_n, \qquad (1)$$

где $y_n = \operatorname{sign} f(x_n) \, | f(x_n) |^{1/(p-1)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, сходятся к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$, причем $\| x_n - x^* \| \leqslant \eta_0 \alpha^n (1-\alpha)^{-1}$, где $\alpha = Bp^{-1/q}(K/2)^{1/p}$.

Теорема 2. Пусть $\| f(x_0) \|^{-1} \leqslant B_0$, $\| x_1 - x_0 \| = \| P(x_0) \|^p (p \| f(x_0) \|)^{-1} \leqslant \eta_0$, $\| P(x_0) \|^p (p \| f(x_0) \|^2)^{-1} \leqslant B_0 \eta_0 K = h_0 \leqslant 1/2$ и $r = (1 - \sqrt{1-2h_0}) h_0^{-1} \eta_0$. Тогда последовательные приближения (1) сходятся к решению $x^* \in S$ уравнения $P(x) = 0$ и $\| x_n - x^* \| \leqslant 2^{1-n} (2h_0)^{2^n - 1}$.

Имеются опечатки. М. М. Вайнберг

598. Заметка о методе Альтмана решения нелинейных уравнений в пространствах L^p. Шептыцкий (A remark on the method of M. Altman of solving nonlinear equations in L^p-space. Szeptycki P.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, Cl. 3, **5**, № 12, 1109—1112, XCI (англ.; рез. русск.)

Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор из пространства L^p в L^p, дважды дифференцируемый по Фреше, и $f(x) = \| P(x) \|^p$, где $p > 2$. Доказывается, что

$$\| f''(x) \| \leqslant p \| P(x) \|^{p-1} \| P''(x) \| + p(p-1) \| P(x) \|^{p-2} \| P'(x) \|^2.$$

Эта оценка применяется при доказательстве предложения: Пусть в шаре $\| x - x_0 \| \leqslant r$ выполняются условия: 1) $\| g(x_0) \|^{-1} \leqslant B_0$, $\| P(x) \| \leqslant K_0$, $\| P'(x) \| \leqslant K_1$,

$$\| P''(x) \| \leqslant K_2, \quad \text{где} \quad g(x) = [P'(x)]^* \left(\operatorname{sign} P\left(x(t)\right) | P\left(x(t)\right) |^{p-1}\right);$$

2) $\| x_1 - x_0 \| = \| P(x_0) \|^p [p \| g(x_0) \|]^{-1} \leqslant \eta_0$;

3) $B_0 \eta_0 \left(K_0^{p-1} K_2 + (p-1) K_0^{p-2} K_1\right) = h_0 \leqslant 1/2$,

$$r = \left(1 - \sqrt{1-h_0}\right) h_0^{-1} \eta_0.$$

Тогда последовательные приближения $x_{n+1} = x_n - \| P(x_n) \| [p \| g(x_n) \|]^{-1} y_n$, где $y_n = \operatorname{sign} g\left(x_n(t)\right) | g\left(x_n(t)\right) |^{\frac{1}{p-1}}$, сходятся к решению x^* уравнения $P(x) = 0$, причем $\| x_n - x^* \| \leqslant 2^{1-n} \left(2h_0\right)^{2^n - 1} \eta_0$.

Это предложение улучшает теорему 2 работы Альтмана (реф. 597). М. М. Вайнберг

599. Исправление к работе «Некоторые теоремы теории чебышевских приближений в пространстве Гильберта». Зуховицкий С. И., Матем. сб., 1957, **43**, № 4, 504

Автор указывает, что в формулировку теоремы 3′ его работы (РЖМат, 1956, 5339) должны быть внесены изменения. В. Н. Никольский

600. О теории Л. В. Канторовича приближенных методов анализа. Линь Цюнь, Кэсюэ цзилу, Sci. Rec., 1958, **2**, № 3, 92—97

В заметке несколько упрощен и уточнен метод Л. В. Канторовича (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185, гл. 2). Добавлено несколько применений метода к решению интегральных уравнений, дающих известные ранее результаты. Результаты приводятся без доказательств.

Теорема 1. Пусть: 1) существуют числа ε_1, ε_2, ε_3 такие, что для решения $\overline{x_0}$ приближенного уравнения $\| H(\lambda \overline{H}\, \overline{x_0} + y) - \overline{H} \varphi(\lambda \overline{H}\, \overline{x_0} + y) \| \leqslant \varepsilon_1 \| \lambda \overline{H}\, \overline{x_0} + y \| + \varepsilon_2 \| x_0 \| + \varepsilon_3$, 2) $\varphi \overline{H}$ вполне непрерывен 4) для $K = I - \lambda H$ существует K^{-1},
5) $q = \| K^{-1} \| \cdot | \lambda | \cdot (\varepsilon_1 + \| \varphi \| \varepsilon_2) < 1$.
Тогда $\overline{K}^{-1}$ тоже существует, причем

$$\| x^* - (\lambda \overline{H}\, \overline{x_0} + y) \| = O\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\},$$

где x^* — решение точного уравнения.

Аналогично формулируется теорема 2, дающая на основании результатов приближенного решения сведения о разрешимости точного уравнения и близости приближенного и точного решений.

Э. Б. Карпиловская

601. Чебышевское приближение в локально компактных пространствах. Брам (Chebychev approximation in locally compact spaces. Bram Joseph), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 133—136 (англ.)

Дается обобщение классической теоремы Чебышева, характеризующей полиномы наилучшего приближения. Это обобщение не является новым (РЖМат, 1957, 1597, вторая теорема на стр. 156; Ремез Е. Я., Про методи найкращого, в розумінні Чебишова, наближенного представлення функцій, Київ, 1935). Библиография отсутствует. Ю. А. Шашкин

602. Замечание об одном определении топологических K-линеалов. Коман (Poznámka k jedné definici topologických K-lineálů. Koman Milan), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 2, 156—159 (чешск.; рез. русск. нем.)

Приводится пример K-линеала, одновременно являющегося нормированным линейным пространством, в котором все структурные операции непрерывны, но не справедлива теорема: (T_2) для любой окрестности нуля U существует окрестность нуля V такая, что $0 \leqslant a \leqslant b \in V \Rightarrow a \in U$. Отмечается, что утверждение (T_2) эквивалентно требованию (T_1), чтобы соответствие $x \to x$ было равномерно непрерывным. В данном K-линеале можно легко построить пример непрерывного линейного функционала, который не является регулярным. Из этого, следовательно, видно, что одной непрерывности структуры операций в K-линеалах с топологией недостаточно для сохранения других важных свойств.

V. Pták

603. Заметка об объеме унитарного симметричного пространства. Секереш (A note on the volume of the unitary symmetrical space. Szekeres G.), J. Indian Math. Soc., 1955, **19**, № 3-4, 129—132 (англ.)

Доказывается, что объем многообразия всех унитарных симметрических $n \times n$-матриц равен

$$2^{n(n+3)/4} \prod_{r=1}^{n+1} \pi^{r/2} \, [\Gamma(r/2)]^{-1}.$$

М. А. Наймарк

604. Меры на замкнутых подпространствах гильбертова пространства. Глисон (Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. Gleason Andrew M.), J. Math. and Mech., 1957, **6**, № 6, 885—693 (англ.)

Под мерой на замкнутых подпространствах гильбертова пространства понимается функция μ, которая сопоставляет каждому замкнутому подпространству неотрицательное действительное число такое, что если $\{A_i\}$—счетное множество взаимно ортогональных подпространств, имеющее замкнутую линейную оболочку B, то

$$\mu(B) = \sum \mu(A_i).$$

Легко видеть, что для любого положительного полуопределенного самосопряженного оператора T с конечным следом функция

$$\mu(A) = \operatorname{trace}(TP_A),$$

где P_A — ортогональный проектор на A, является мерой на замкнутых подпространствах. В работе доказывается, что для сепарабельного гильбертова пространства размерности не менее трех каждая мера на замкнутых подпространствах может быть представлена в таком виде. Л. Д. Фаддеев

605. Заметка о группах, обладающих и не обладающих полным банаховым средним значением. Фёльнер (Note on groups with and without full Banach mean value. Følner Erling), Math. scand., 1957, 5, № 1, 5—11 (англ.)

Заметка примыкает к двум предыдущим статьям автора (РЖМат, 1956, 578; 1957, 7167). Доказывается, что если группа G не обладает полным банаховым средним значением (определение см. РЖМат, 1957, 7167), то всякая ограниченная функция $h(x)$ на G может быть равномерно аппроксимирована функциями от x вида

$$\{h_1(x) - h_1(xa_1)\} + \ldots + \{h_n(x) - h_n(xa_n)\},$$

где h_j — ограниченные функции на G и a_j — элементы из G. Приводится также усиление этой теоремы, заключающееся в замене всюду выше ограниченных функций функциями из некоторого семейства ограниченных функций, обладающего определенными свойствами. Кроме того, показывается, что для группы с полным банаховым средним значением можно построить функционал, обладающий обычными свойствами верхнего среднего значения. Ю. М. Березанский

606. Одно расширение понятия распределения. Румьё (Une extension de la notion de distribution. Roumieu Charles), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 4, 520—521 (франц.)

Пусть дана последовательность чисел $M_0, M_1, \ldots,$ для которых $0 < M_\nu \leqslant \infty$; $M_0 < \infty$; $M_\nu^2 \leqslant M_{\nu-1} M_{\nu+1}$; $\sum_{\nu=0}^{\infty} (M_\nu)^{-1/\nu} < \infty$. Автор вводит векторное пространство $D(\{M_\nu\}, I, k)$ функций f, определенных и бесконечно дифференцируемых на прямой, равных нулю вне отрезка I, для которых

$$\|f\| = \sup_{t,\nu} |f^{(\nu)}(t) k^{-\nu} M_\nu^{-1}| < \infty. \qquad (1)$$

Далее, $D(\{M_\nu\}) = \bigcup_{I,k} D(\{M_\nu\}, I, k)$ (с индуктивной топологией); $D'(\{M_\nu\})$ — двойственное пространство (пространство обобщенных распределений), снабженное сильной топологией. Вводится также пространство $E(\{M_\nu\})$ бесконечно дифференцируемых на прямой функций, для которых на каждом отрезке I имеет место (1) с $k = k(f, I)$. Двойственное пространство $E'(\{M_\nu\})$ состоит из обобщенных распределений с конечным носителем. Без доказательства сообщаются основные свойства введенных пространств. Отметим, например, следующие: если $S \in D'(\{M_\nu\})$, то $S' \in D'(\{M_{\nu-1}\})$; если $S \in D'(\{M_\nu\})$, $f \in E(\{M_\nu\})$, то $Sf \in D'(\{M_\nu\})$; если $S \in D'(\{M_\nu\})$, $T \in E'(\{N_\nu\})$ и $R_{\lambda+\nu} \leqslant H a^\lambda \beta^\nu M_\lambda N_\nu$ (H, α, β — постоянные), то $S*T \in D'(\{R_\nu\})$; если $S \in D'(\{M_\nu\})$, $f \in D(\{R_\nu\})$, то $S*f \in E(\{N_\nu\})$; $D(\{M_\nu\})$ плотно в $D'(\{M_\nu\})$. Указывается также разложение элементов $E'(\{M_\nu\})$ в ряды вида $\sum_{\nu=0}^{\infty} C^\nu \mu_\nu$.

А. Д. Мышкис

607. Преобразование Фурье обобщенных распределений. Румьё (Transformation de Fourier, des distributions généralisées. Applications. Roumieu Charles), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 5, 678—680 (франц.)

Обозначения см. в реф. 606. Предполагается дополнительно, что $\overline{\lim}_{\nu\to\infty} \nu^{-2} \ln M_\nu < \infty$; тогда при $S \in D'(\{M_\nu\})$ также $S' \ni D'(\{M_\nu\})$. Вводится векторное пространство $\mathfrak{S}(\{M_\nu\})$ бесконечно дифференцируемых на прямой функций f, для которых

$$|t|^\lambda |f^{(\nu)}(t)| \leqslant A k^\nu h^\lambda M_\nu M_\lambda \quad (\lambda, \nu = 0, 1, \ldots; A = A(f), k = k(f), h = h(f))$$

(с естественной топологией); двойственное пространство $\mathfrak{S}'(\{M_\nu\}) \subset D'(\{M_\nu\})$. Обычное преобразование Фурье $f(t) \to F(u)$ осуществляет автоморфизм $\mathfrak{S}(\{M_\nu\})$; преобразование Фурье L элементов $\mathfrak{S}'(\{M_\nu\})$ вводится при помощи равенства Парсеваля и осуществляет автоморфизм $\mathfrak{S}'(\{M_\nu\})$. Без доказательства сообщаются некоторые свойства этого преобразования; в частности, приведена точная асимптотическая характеристика (при $u \to \pm\infty$) преобразований Фурье элементов $E'(\{M_\nu\})$ и $D(\{M_\nu\})$, (эти преобразования являются целыми функциями). Указано, что отсюда следует: 1) сегмент-носитель $\varphi * \psi$ ($\varphi, \psi \in E'(\{M_\nu\})$ является суммой сегментов-носителей φ и ψ; 2) если $\varphi \in E'(\{M_\nu\})$, то $\varphi = L^{-1}\{\Pi_{\nu=1}^{\infty} (1 + i M_{\nu-1} u / M_\nu)\} * \mu$, причем носитель меры μ ограничен слева; 3) необходимое и достаточное условие (приводится со схемой вывода) того, что для данного $\varphi \in E'(\{M_\nu\})$ существует $\rho \in D'(\{M_\nu\})$ (носитель ρ ограничен слева), для которого $\varphi * \rho = \delta$ (мера Дирака). А. Д. Мышкис

См. также: 246, 328, 334, 351, 366, 370, 384, 411, 485, 486, 773, 860, 887

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

608. Об «обоснованиях» теории вероятностей. Бреньи (Sur les «fondements» de la théorie des probabilités. Breny H.), Rev. questions scient., 1958, **19**, avr., 161—190 (франц.)

Отмечая существующие различия во взглядах на теорию вероятностей и на понятие вероятности, автор выделяет три направления: 1) «частотники» — определяющие вероятность через понятие частоты, 2) «неабсолютные частотники» (Мизес и его школа); 3) субъективисты (например, Финетти).

Подчеркивается, что различие не касается «расчетной» части теории вероятностей, а относится только к методологическим вопросам. Рассматривая структуру физико-математических теорий в целом и особенно связь абстрактного и конкретного в них, автор приходит к выводу, что теория вероятностей есть физическая тео

рия, у которой имеется математическая модель. Вероятность является параметром этой физической теории. Автор считает, что такая точка зрения объединяет различные взгляды. Библ. 19 назв. Л. Е. Майстров

609. Расширение формализма алгебры логики на вероятности. Руш (Extension aux probabilités du formalisme de l'algèbre logique. Rouche N.), Revue HF, 1956, **3**, № 5, 179—182 (франц.)

Подчеркивается аналогия между операциями алгебры логики (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание) и элементарными свойствами вероятностей. Указывается, как нужно изменить совершенную нормальную дизъюнктивную форму, чтобы вместо логических переменных можно было подставить вероятности их осуществления и таким образом получить вероятность осуществления сложного высказывания. M. Rosenblatt-Roth

610. Теория вероятностей в некоторых топологических пространствах. Лавендомм (Calcul des probabilités dans certains espaces topologiques. Lavendhomme René), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1956, Sér. I, **70**, № 1, 9—36; № 2, 124—163 (франц.)

Цель работы — распространить классические предложения теории вероятностей, центральной предельной теоремы и теоремы В. И. Гливенко о сходимости эмпирического закона распределения к теоретическому, на случайные величины, определенные на банаховых пространствах, с усилением результатов, полученных в этом направлении Форте и Мурье (РЖМат, 1953, 350; 1955, 359; 1954, 1726; 1955, 2329).

В гл. I строится общая теория меры на нормальных топологических пространствах X. Рассматривается линейное подпространство U векторного пространства U_0 всех ограниченных по норме непрерывных отображений пространства X в банахово пространство X'. От U требуется, чтобы оно вместе с каждой функцией $u(x)$ содержало все непрерывные функции $v(x)$, для которых $|v(x)| \leqslant |u(x)|$, в него вводится определенным образом псевдотопология (а в дальнейшем и эквивалентная ей в некотором смысле настоящая топология) и строится соответствующее ему пространство RU всех определенных на X действительных функций $f(x)$, для которых $f(x)y \in U$ при $y \in X'$. Мерой, определенной на U, называется всякий элемент m пространства M, сопряженного пространству RU, т. е. непрерывный линейный функционал на RU, или, что то же, непрерывный линейный оператор из U в X', линейно продолжающий такой функционал. Мера называется положительной, если этот функционал переводит неотрицательные функции в неотрицательные числа. Затем естественным образом определяется понятие измеримого множества и измеримой функции и показывается, что такое определение меры совпадает с классическим определением меры как вполне аддитивной функции множеств, т. е. доказывается обобщение теоремы Рисса, причем соответствующий мере оператор, дающий значение меры на измеримых функциях, отвечает интегралу в смысле Бохнера.

Далее используется теорема Стона—Какутани, согласно которой существуют алгебраический и топологический изоморфизмы пространства классов почти всюду совпадающих суммируемых функций на пространстве X и пространства непрерывных функций на некотором естественно отвечающем ему компакте при соответствующих определениях понятия сходимости функций в этих двух случаях. Пользуясь этим предложением, автор переносит теорему Дини об аппроксимации верхней грани и теорему Вейерштрасса—Стона об аппроксимации произвольной непрерывной функции полиномами от достаточно широкого класса данных функций на функции, суммируемые относительно меры m при соответствующем изменении понятия аппроксимации.

В гл. II рассматриваются свойства ограниченных мер, т. е. мер, принадлежащих пространству M_0, отвечающему всему пространству U_0 (в этом случае пространство X имеет конечную меру, а каждая ограниченная измеримая функция суммируема), и показывается, что в случае метрического пространства X топология пространства M_0 есть непосредственное обобщение топологии, предложенной Ю. В. Прохоровым (Успехи матем. наук, 1953, 8, № 3, (55), 165—167, определение 2 и замечание к нему).

В гл. III в дополнение к понятию характеристического функционала в смысле А. Н. Колмогорова вводится понятие характеристической меры Fm, отвечающей данной мере m, определенной для банахова пространства X: Fm есть мультипликативное произведение $e^{-ix^*x}\, m$ (в смысле Лорана—Шварца), где x^*—произвольный элемент банахова пространства, сопряженного с пространством X, а x^*x — скалярное произведение элементов x^* и x. С помощью аппроксимационных теорем, доказанных в конце гл. I, исследуется поведение характеристической меры и характеристического функционала при предельном переходе и при композиции независимых случайных величин (т. е. конечных мер) и показывается, что по ним можно восстановить меру m. Это позволяет доказать аналог центральной предельной теоремы для нормированных сумм одинаково распределенных независимых случайных величин (мер) в банаховом пространстве.

Наконец, в последней гл. IV полученные результаты применяются к оценке разности между эмпирическим и теоретическим законами распределения. Почти достоверная сходимость эмпирического распределения $m_n(e)$ к теоретическому распределению $m(e)$ была доказана в цитированных выше работах Форте и Мурье для произвольных метрических сепарабельных пространств. Автор рассматривает разность между ними как случайный элемент со значениями в банаховом пространстве мер M, применяет к нему центральную предельную теорему из предыдущей главы и находит характеристическую функцию предельного закона распределения величины $\sqrt{n}\,[m_n(e) - m(e)]$ и характеристическую функцию распределения квадрата ее нормы, что ранее было сделано лишь для случая действительной прямой, т. е. лишь для обычных одномерных случайных величин.

К сожалению, в работе имеется много серьезных ошибок, ставящих исследования автора под сомнение, хотя, по-видимому, их можно исправить введя соответствующие коррективы в некоторые формулировки и доказательства. Так, уже определение 1 псевдосходимости непрерывных функций как одновременной ограниченности и равномерной сходимости не годится для построения меры в некомпактном случае (и, значит, для банаховых пространств), так как тогда не проходит доказательство леммы 1 предложения 1 (стр. 16); по-видимому, надо отбросить требование равномерности, излишнее для теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла (стр. 31), хотя кое-где в других местах доказательства придется немного переделать. Далее, неверно определяется интеграл Бохнера (гл. I, § 2), так как построенные здесь функции, вопреки утверждению автора, не являются ступенчатыми, но это, по-видимому (по крайней мере в сепарабельном случае) можно исправить. Наконец, термин почти равномерная сходимость понимается автором неверно, что приводит к неправильному определению нормы в теореме Стона—Какутани (стр. 35), а значит, и к неправильному пониманию аппроксимации в обобщенных теоремах Дини и Вейерштрасса—Стона. Подобные ошибки встречаются и дальше. М. Ф. Бокштейн

611. Многомерное распределение комплексных нормальных величин. Вудинг (The multivariate distribution of complex normal variables. Wooding R. A.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 212—215 (англ.)

Впервые выражения для распределения нескольких нормальных действительных случайных величин с корреляцией было введено Браве (1846); с тех пор это распределение рассматривалось многими авторами, в частности Пирсоном (1896) и Крамером (1937). Приложения этого распределения включают случаи, когда компонентами многомерного распределения являются действительные случайные функции от времени, следующие нормальному закону, как, например, в случайном шуме (Rice S. O., Bell System Techn. J., 1944, 23, 282—332; 1945, 24, 46—156). Логический шаг — получить эквивалентное распределение множества комплексных случайных величин, у которых действительные и мнимые части распределены нормально. В статье устанавливается, что если действительные и мнимые части x_n, y_n удовлетворяют ковариационным соотношениям

$$E(x_m, x_n) = E(y_m, y_n),\ E(x_m, y_n) = -E(x_n, y_m),$$

то распределение N комплексных случайных величин $v_n = x_n(t) + iy_n(t)$ $(1 \leqslant n \leqslant N,\ t$ — выборочный параметр) имеет простую форму

$$\pi^{-N} \mid L \mid^{-1} \exp(V^{1*}L^{-1}V),$$

где L — ковариационная матрица Эрмита, а $V = X + iY$ — комплексный вектор,

$$X = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)),$$

$$Y = (y_1(t), y_2(t), \ldots, y_N(t)).$$

По резюме автора

612. О корреляционных таблицах с заданными крайними распределениями Фреше (Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1956, 242, № 20, 2426—2428 (франц.)

Вообще говоря, не только существует бесконечное множество корреляционных таблиц с заданными крайними распределениями, но эти таблицы могут значительно отличаться друг от друга. Пусть X и Y — два случайных числа (одновременно реализуемые в каждом испытании некоторой категории) $H(x, y) = P[X < x$ и $Y < y]$, $F(x) = P[X < x]$, $G(y) = P[Y < y]$, $H_0(x, y) = \max[F(x) + G(y) - 1, 0]$, $H_1(x, y) = \min[F(x), G(y)]$. Говорят, что функция распределения $H(x, y)$ задает „корреляционную таблицу", крайние распределения которой определяются функциями частных распределений $F(x)$ и $G(y)$. Наша задача — выяснить, что можно сказать о $H(x, y)$, если $F(x)$ и $G(y)$ известны. Автор показал, что, если $F(x)$ и $G(y)$ заданы, то 1) всегда существует по крайней мере одно решение задачи $H(x, y)$; 2) решение будет единственным только в том случае, когда или X или Y принимают „почти наверное" (presque surement) постоянное значение; 3) $H_0(x, y)$ и $H_1(x, y)$ — решения задачи; 4) $H_0(x, y)$ и $H_1(x, y)$ — соответственно наибольшее и наименьшее решения.

В настоящей статье автор делает два, важных для приложения, добавления, хотя из предшествующего они и могут показаться тривиальными; 5) каждая функция распределения $K(x, y)$, заключенная между $H_0(x, y)$ и $H_1(x, y)$, есть решение; другого решения (по 4)) не существует; 6) за исключением тривиального случая 2), существует бесконечно много решений.

Резюме автора

613. О поведении среднего наблюдений. Барра (Du comportement de la moyenne d'un échantillon. Barra Jean-Reni). C. r. Acad. Sci., 1957, **244**, № 15, 2002—2004 (франц.)

Известные факты об асимптотическом поведении средних $S_n = \frac{1}{n}\sum X_i$ n независимых наблюдений некоторой случайной величины X дополняются следующими теоремами:

Теорема I. Пределом по вероятности для S_n может служить только некоторое число.

Теорема II. Необходимым и достаточным условием сходимости распределения S_n, $n \to \infty$, к предельному распределению служит наличие производной справа (или слева) при $t = 0$ у характеристической функции $\varphi(t)$ величины X. При этом предельным будет закон Коши.

Указываются достаточные условия для наличия производной справа у функции $\varphi(t)$. Н. А. Сапогов

614. Еще об обобщениях теоремы Г. Крамера. Линник Ю., Скитович В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 1, 39—44 (рез. англ.)

Теорема о разложении нормального закона на независимые слагаемые тесно связана с теоремой Скитовича о независимости линейных форм независимых случайных величин. Обе теоремы обобщаются на случай использования «отрицательных вероятностей». Посредством соответствующих примеров показывается, что это самое широкое обобщение из всех возможных.

Резюме автора

615. Проблема устойчивости для теоремы Г. Крамера. Сунь Энь-хоу, Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1957, № 1, 7—18 (кит.; рез. англ.)

Пусть $p_i(x)$ — плотности вероятностей независимых величин X_i, $i = 1, 2$, $p(x)$ — плотность вероятностей суммы $X_1 + X_2$, $\varphi(x)$ — плотность нормального распределения со средним 0 и дисперсией 1 и $0 < \varepsilon < 1$. Доказывается теорема: если 1) $p_i(x)$ непрерывны, $i = 1, 2$,

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} |p_i(x + h) - p_i(x)|\,dx = O(h^2)$, $h \to 0$, $i = 1, 2$,

3) $p_i(x) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\right)$, $|x| \to \infty$, $i = 1, 2$,

4) $\sup_x |p(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$,

K — абсолютная постоянная и $\varphi_1(x)$ — плотность вероятностей надлежаще определенного нормального распределения, то

$$\sup_x |p_1(x) - \varphi_1(x)| \leqslant K\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/8}.$$

Доказательство основано на работе референта (Сапогов Н. А., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1951, **15**, 205—218). Н. А. Сапогов

616. Предельная проблема для ранжированных величин. Лоэв (Ranking limit problem. Loève Michel), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 2. Berkeley-Los Angeles, 1956, 177—194 (англ.)

Рассматривается последовательность серий независимых случайных величин X_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $n = 1, 2, \ldots$, с функциями распределения $F_{nk}(x)$, причем $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Через $X^*_{n1} \leqslant X^*_{n2} \leqslant \ldots \leqslant X^*_{nk_n}$ обозначаются переменные данной серии n, ранжированные по величине их значений. При условии, что существуют функции распределения $F_n(x)$, для которых в смысле слабой сходимости $F_{nk} - F_n \to 0$ равномерно по k, описывается класс предельных законов $(n \to \infty)$ для величин X^*_{nr} как с фиксированным, так и переменным индексом r. Например (теорема 2), для фиксированного значения r класс предельных законов для X^*_{nr} представляется законами с функциями распределения

$\int_0^L \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t}dt$, где $L = L(x) \geqslant 0$—неубывающие функции. Далее аналогично изучаются предельные распределения многомерных величин $(X^*_{nr_1}, X^*_{nr_2}, \ldots, X^*_{nr_s})$. В заключение указываются уточнения полученных результатов при дополнительном предположении, что величины X_{nk} равномерно бесконечно малы. В отличие от реферируемой работы в работах других авторов на ту же тему (Гнеденко Б. В., Ann. Math. 1943, **44**, 423—453; Смирнов Н. В., Тр. матем. ин-та АН СССР, 1949, **25**) точно перечисляются предельные законы, соответствующие случаю $F_{nk}(x) = F(a_n + b_n x)$.

Н. А. Сапогов

617. Об асимптотической независимости связанных случайных величин. Бюльман (Sur l'indépendance asymptotique des variables aléatoires liées. Bühlmann Hans), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 5, 490—493 (франц.)

Рассматривается треугольная последовательность серий случайных величин X_{nk}, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$, которые называются асимптотически независимыми, если $F_{\Sigma_n}(x) - F_{X_{n1}}(x) * F_{X_{n2}}(x) * \ldots * F_{X_{nn}}(x) \to 0$, $n \to \infty$, где $\sum_n = \sum X_{nk}$ и $F_X(x)$ — функция распределения величины X. Предполагается, что $\sum_k M\,|X_{nk}|^{2+\delta} \to 0$, $n \to \infty$ (для некоторого $\delta > 0$). Указывается в аналитической и геометрической формах условие, при выполнении которого соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} M\,|M(X_{nk}|\sum_{j=1}^{k-1} X_{nj})| \to 0 \text{ и}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M\,|M(X_{nk}^2|\sum_{j=1}^{k-1} X_{nj}) - M(X_{nk}^2)| \to 0,\ n \to \infty,$$

известные как достаточные для асимптотической независимости X_{nk}, становятся также и необходимыми.

С. А. Сапогов

618. К теории рекуррентных событий. I. Бачелет (Zur Theorie der wiederkehrenden Ereignisse. I. Batschelet Eduard), Arch. Math., 1957, **8**, № 3, 184—191 (нем.)

Рассматривается схема Бернулли с вероятностью успеха p. Событие E происходит при ν-м испытании, если частота наступления успеха в первых ν испытаниях равна заданной несократимой дроби $H = z/t$. Отмечается, что E — рекуррентное, t-периодическое событие (Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., Изд-во ин. лит., 1952). Устанавливаются рекуррентные соотношения для некоторых вероятностей, связанных с событием E; в случае $H = p = 1/2$ выписываются явные формулы. Доказывается, что событие E достоверно тогда и только тогда, когда $H = p$.

М. И. Ядренко

619. Матричные формулы для вычисления времен ожидания при случайном обслуживании вызовов. Ле-Руа (Formules matricielles du calcul du délai d'attente dans le cas des appels desservis au hasard. Le Roy Jean), Ann. télécommuns, 1957, **12**, № 1, 2—19 (франц.)

Используются матричные обозначения для вывода закона распределения времени ожидания в телефонии, когда вызовы обслуживаются случайно. В части 1 (общего характера) вводятся обозначения, приводятся матричные формулы, используемые в части 2, и устанавливается разложение закона распределения, основанное на полиномах Лагерра. «Выравнивание» распределения производится по моментам, причем функции, подвергаемая выравниванию и выравненная, имеют в начале координат точку касания любого порядка. Приводится пример, соответствующий точке касания второго порядка и четырем моментам.

В части 2 для изучаемой вероятности устанавливаются формулы, позволяющие исчислять необходимые элементы выравнивания в соответствии с формулами, полученными в части 1. В этой части в матричном виде приводится формула Риордана. В кратком заключении изложен числовой пример. Резюме автора

620. Общие теоремы о разложении базгранично делимых законов. I. Формулировки. Три основные леммы. Необходимые условия. Линник Ю. В., Теория вероятностей и ее применения, 1958, **3**, № 1, 3—40 (рез. англ.)

Рассматривается класс I_0 безгранично делимых законов, допускающих разложение только на безгранично делимые законы. Функции $G_-(u)$ и $G_+(u)$ в формуле Леви для канонического представления логарифма характеристической функции $\ln \varphi(t)$ безгранично делимого закона F

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_{-\infty}^{0} q(u, t)\, dG_-(u) + \int_{0}^{\infty} g(u, t)\, dG_+(u),$$

где $q(u, t) = \exp itu - 1 - itu(1 + u^2)^{-1}$, называются пуассоновым спектром. Говорят, что F имеет гауссову компоненту, если $\gamma > 0$.

Доказывается теорема: Если безгранично делимый закон имеет гауссову компоненту и принадлежит к I_0, то $G_-(u)$ и $G_+(u)$ имеют лишь конечное или счетное множество точек роста (конечный или счетный пуассонов спектр). В этом случае $\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=-N}^{M} \lambda_m (\exp it\mu_m - 1)$ для конечного спектра и

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \lambda_m g(t, \mu_m)$$

для счетного спектра, причем $\lambda_m \geqslant 0$ $(m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\lambda_0 = 0$; μ_m при $m = 1, 2, \ldots$ совпадает с рядом чисел $\ldots, \kappa_{-2}k_{-1}\mu, k_{-1}\mu, \mu, k_1^{-1}\mu, k_1^{-1}k_2^{-1}\mu, \ldots$, а при $m = -1, -2, \ldots$ с рядом чисел $\ldots, l_{-2}l_{-1}\nu, l_{-1}\nu, \nu, l_1^{-1}\nu, l_1^{-1}l_2^{-1}\nu, \ldots$ здесь k_i и l_i — натуральные числа, большие единицы. Если $dG_-(u) = 0$ при $u < a < 0$ и $dG_+(u) = 0$ при $u > b > 0$ (пуассонов спектр ограничен), то это необходимое условие является и достаточным.

Формулируются еще следующие теоремы.

Характеристические функции $\Psi(t)$ всех компонент безгранично делимого закона с ограниченным пуассоновым спектром, сосредоточенным на $[a, b]$, имеют вид:

$$\ln \Psi(t) = P(it) + t^2 \int_a^b e^{itu}\, \Phi(u)\, du,$$

где $P(z)$ — полином не более, чем третьей степени, а $\Phi(u)$ — вещественная функция, $\Phi(u) \in L^2[a, b]$.

Пусть безгранично делимый закон имеет ограниченный пуассонов спектр, сосредоточенный на $[a, b]$, и его характеристическая функция $\varphi(t)$ имеет вид (пуассонов спектр рационален правее a):

$$\ln \varphi(t) = \beta it - \gamma t^2 + \int_a^0 h(u, t)\, dG_1(u) + \int_0^a h(u, t)\, dG_2(u) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\exp(ita_j\mu/q) - 1),$$

где $0 \leqslant a < b$, $\lambda_j > 0$, $\mu > 0$; a_j и q — целые, $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, $a_1\mu/q > \alpha$, $h(u,t) = \exp itu - 1 - itu$, $G_1(u)$ и $G_2(u)$ — неубывающие функции, ограниченные вне $[-\varepsilon, \varepsilon]$ при любом $\varepsilon > 0$, так что сумма $\int_{-\varepsilon}^{0} u^2\,dG_1(u) + \int_{0}^{\varepsilon} u^2\,dG_2(u)$ ограничена при $\varepsilon > 0$ и стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$. Тогда все компоненты закона имеют характеристические функции $\psi(t)$ вида

$$\ln\psi(t) = P(it) + t^2\int_{a}^{\alpha} e^{itu}\Phi(u)\,du + \sum_{n=1}^{q}(\alpha_n + \beta_n it)(\exp(itn\mu/q) - 1),$$

где $P(x)$ — полином не более чем третьей степени; α_n, β_n — вещественные числа, $\Phi(u)$ — вещественная функция, $\Phi(u) \in L^2[a, \alpha]$.

Из последней теоремы следует, в частности, что композиция законов Пуассона и Гаусса разлагается только на подобные же композиции (РЖМат, 1958, 3929; 6927). И. П. Кубилюс

621. Самовосстанавливающиеся стохастические процессы. Смит (Regenerative stochastic processes. Smith W. L.), Proc. Roy. Soc., 1955, A232, № 1188, 6—31 (англ.)

Пусть t_i $(i = 1,2,\ldots)$ — одинаково распределенные неотрицательные независимые случайные величины с функцией распределения $F(t)$. Положим $\mu_2 = M\{t_i^2\}$. Пусть t_0 — неотрицательная случайная величина, не зависимая от t_i $(i \geqslant 1)$. Положим $T_{-1} = 0$ и $T_k = t_0 + t_1 + \ldots + t_k$ $(k = 0,1,2,\ldots)$.

Для всех $t \geqslant 0$ обозначим через η_t наибольшее целое число k такое, что $T_{k-1} \leqslant t$. Пусть $\{x_t, 0 \leqslant t < \infty\}$ — стохастический процесс, принимающий значения в некотором абстрактном пространстве $\mathfrak{X}$, на котором определено борелевское поле B x-множеств A; z — абстрактная случайная величина, принимающая значения в некотором абстрактном пространстве $\mathfrak{z}$ (z истолковывается как „первоначальное положение" при $t = 0$).

Предполагается, что z не зависимо от t_i $(i \geqslant 1)$, но не обязательно от t_0. Процесс x_t называется равновесным процессом относительно $\mathfrak{z}$ по a, если для всех $z \in \mathfrak{z}$, $a \in A$ существует функция $\Phi_a(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$, зависящая только от a (но не зависящая от z), такая, что $P\{x_t \in a \mid z; \tau_t > 0, T, \eta_t\} = \Phi(t - T_{\eta_t})$. Автор изучает условия существования $\lim_{t\to\infty} P\{x_t \in a \mid z\}$ и среди других доказывает следующую теорему: Если $\{x_t\}$ — равновесный процесс, $F(t)$ не есть решетчатое распределение, $P\{t_0 < \infty\} = 1$, функция $\Phi_a[1 - F(t)] \in L_1(0,\infty)$ и монотонна в $(0,\infty)$, тогда для всех $z \in \mathfrak{z}$ и $a \in A$

$$\lim_{t\to\infty} P\{x_t \in a \mid z\} = \frac{1}{\mu_1}\int_0^{\infty} \Phi_a(u)[1 - F(u)]\,du.$$

Результаты применимы к полумарковским и кумулятивным процессам. Процесс $\{x_t, 0 \leqslant t < \infty\}$ называется полумарковским, если $\mathfrak{X} = \mathfrak{z}$ — пространство положительных целых чисел, B содержит только точки $\{\mu\}$ $(\mu = 1,2,\ldots)$, функция x_t непрерывна справа, временные разности между последовательными переходами — независимые положительные случайные величины с произвольной функцией распределения.

Обозначим через R_μ событие „переход в состояние μ." Если R_μ непериодично, $m_{\mu\mu}$ — среднее время ожидания в состоянии μ — конечно и переход происходит при $t = 0$, то $\lim_{t\to\infty} P\{x_t = \mu \mid x_0\} = Q^{\mu}\frac{m_{\mu\mu}}{l_\mu}$, где Q_μ — вероятность, что при заданном x_0 R_μ осуществится в конечное время и l_μ — среднее время возвращения для R_μ. Действительнозначный процесс $\{w_t\}$ называется кумулятивным, если $w_{T_\eta} - w_{T_{\eta-1}}$ $(\eta = 1,2,\ldots)$ — одинаково распределенные независимые случайные величины, а w_t с вероятностью 1 имеет ограниченную вариацию в каждом конечном t-интервале. Автор определяет асимптотическое поведение $M\{w_t\}$ и $D\{w_t\}$ при $t \to \infty$ и показывает, что w_t имеет асимптотически нормальное распределение, если $\mu_2 < \infty$ и $M\{(w_{T_\eta} - w_{T_{\eta-1}})^2\} < \infty$. Также находится асимптотическое распределение для многомерного кумулятивного процесса. L. Takács

622. О производящем параметриксе стохастического процесса. Иосида (On the generating parametrix of the stochastic processes. Yosida Kosaku), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 4, 240—244 (англ.)

Пусть X — локально компактное пространство и L — борелевское кольцо, порожденное открытыми множествами из X. Однородная по времени цепь Маркова характеризуется переходной функцией $G(x,E)$; однородный по времени процесс Маркова — переходной функцией $P(t,x,E)$. Пусть $C(X)$ — банахово пространство, состоящее из линейного множества ограниченных действительных функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \sup|f(x)|$, причем $C(\lambda)$ содержит все непрерывные функции множеств, носители которых компактны и содержатся внутри X. Пусть $\tilde{P}$ — класс марковских процессов, которые характеризуются переходными вероятностями $P(t,x,E)$, удовлетворяющими условию непрерывности [$\lim_{t\to 0} P(t,x,X - V(\lambda)) = 0$ для всякой окрестности] и такие, что $(P_tf)(x) = \int_X P(t,x,dy)f(y)$ определяет линейный оператор из $C(X)$ в $C(X)$. Пусть $\boldsymbol{G}$ — класс цепей Маркова, которые характеризуются переходными вероятностями $G(x,E)$ такими, что: 1) $(Gf)(\lambda) = \int_X G(x,dy)f(y)$ определяет взаимно однозначное отображение $C(x)$ на линейное сильно плотное пространство $C(x)$ и 2) для всякого α $(0 < \alpha < 1)$ линейный оператор $\alpha I + (1-\alpha)G$ определяет взаимно однозначное отображение $C(X)$ на $C(X)$ так, что линейный оператор $G_\alpha = G(\alpha I + (1-\alpha)G)^{-1}$ из $C(X)$ в $C(X)$ определяется марковской цепью $G_\alpha(x,E)$ через $(G_\alpha f)(x) = \int_x G_\alpha(x,dy)f(y)$.

Теорема. Для

$$P(t,x,E) \in \tilde{P} \leftrightarrow G(x,E) = \int_0^{\infty} e^{-tp}(t,xE),dt \in \boldsymbol{G}.$$

Наоборот, всякая $G(x,E) \in \boldsymbol{G}$ определяет некоторую $P(t,x,E) \in \tilde{P}$ линейным оператором

$$P_tf = \lim_{\alpha\to 0} \exp[t(G - I)(\alpha I + (1-\alpha)G^{-1}]$$

(сильный предел; равномерная сходимость во всяком замкнутом интервале t) так, что

$$(P_tf)(x) = \int_X P(t,x,dy)f(y),$$

$$G(x,E) = \int_0^{\infty} e^{-t}P(t,x,E)\,dt.$$

$G(x,E)$ есть производящий параметрикс марковского процесса $P(t,x,E)$. M. Rosenblatt-Roth

623. Стохастическая сходимость полумартингалов. Криккеберг (Stochastische Konvergenz von Semimartingalen. Krickeberg Klaus), Math. Z., 1957, **66**, № 5, 470—486 (нем.)

Статья является добавлением к другой статье автора (РЖМат, 1958, 5921). Пусть B — булева σ-алгебра с единицей E и нулем $\varnothing$, μ — конечная строго положительная мера в B и F — система всех B-измеримых функций (значения $\pm\infty$ не исключаются); понятие функции разумеется в смысле Каратеодори, и обыкно-

венные структурные операции в F обозначаются символами $\vee$ и $\wedge$. Далее пусть Θ — направленное (вверх) множество (относительно отношения упорядочения $\leqslant$). Подмножество $A\subset\Theta$ называется терминальным, если существует $T\in\Theta$ такое, что $\sigma\in A$ для $T\leqslant\sigma$.

Для последовательности $(f_\sigma\in F;\ \sigma\in\Theta)$ символ χ (или $\hat{\chi}$) означает множество всех $h\in F$ таких, что для всякой $h'\in F$, $h'\geqslant h$, $\{h'=h\}=\{h=\infty\}$, имеет место $\mu(\{h'<f_\sigma\})\underset{\sigma}{\to}0$ (или $\limsup_\sigma\{h'<f_\sigma\}=\varnothing$); определяется $\operatorname{slimsup}_\sigma f_\sigma=\wedge\chi$, $\operatorname{limsup}_\sigma=\wedge\chi$, аналогично — для lim inf. Принято говорить, что (f_σ) сходится стохастически (или по направлению) к $f\in F$, если $\operatorname{sliminf}_\sigma f_\sigma=\operatorname{slimsup}_\sigma f_\sigma=f$ (или если $\operatorname{liminf}_\sigma f_\sigma=\operatorname{limsup}_\sigma f_\sigma=f$). Доказывается, что сходимость по направлению равносильна обыкновенной сходимости, т. е.

$\operatorname{liminf}_\sigma f_\sigma=\vee_{T\in\Theta}\wedge_{\tau<\sigma}f_\sigma$, $\operatorname{limin}f_\sigma f_\sigma=\wedge_{T\in\Theta}\vee_{T<\sigma}f_\sigma$,

и что при предположении конечных f_σ, f стохастическая сходимость равносильна $\mu(\{|f_\sigma-f|>\eta\})\underset{\sigma}{\to}0$ для $\eta>0$, т. е. сходимости по мере.

Пусть последовательность под-σ-алгебр $(B_\sigma\subseteq B;\ \sigma\in\Theta)$ возрастает, т. е. $B_\sigma\subseteq B_\sigma$ для $\sigma\leqslant T$. Последовательность $(f_\sigma\in F;\ \sigma\in\Theta)$ называется мартингалом, если существуют $\int_E f_\sigma d\mu$ (не обязательно конечные) и $\int_A f_T d\mu=\int_A f_\sigma d\mu$ для $T\leqslant\sigma$ и всех $A\in B_T$, и называется полумартингалом, если знак $=$ заменить на $\leqslant$. Главные результаты статьи: Если (f_σ) — полумартингал и последовательность $(\int_E|f_\sigma|d\mu;\ \sigma\in\Delta)$ ограничена для некоторого терминального $\Delta\in\Theta$, то (f_σ) сходится стахостатически; доказывается также достаточное условие для сходимости по направлению. Если (f_σ) — мартингал и последовательность $(\int_E f_\sigma^+ d\mu;\ \sigma\in\Delta)$ ограничена для некоторого терминального $\Delta\subset\sigma$, то (f_σ) сходится стохастически. M. Jiřina

624. Спектральный анализ временных рядов. Дженкинс, Пристли (The spectral analysis of time series. Jenkins G. M., Priestley M. B.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 1—12. Discuss., 47—63 (англ.)

Дается общий обзор методов построения оценок спектральной функции, спектральной плотности, корреляционной функции и средней спектральной плотности по полосе частот стационарных процессов $x(t)$ (главным образом с абсолютно непрерывной спектральной функцией) по выборочной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассматриваемые оценки являются функциями статистик

$$C_s=\frac{1}{n-[s]}\sum_{t=1}^{n-[s]}x_tx_{t+[s]},\quad r_s=\frac{C_s}{C_0}$$

и периодограммы

$$I_n(\omega_l)=2\sum_{s=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)C_s\cos\omega_l s.$$

Приведены некоторые (сглаженные) оценки спектральной плотности, имеющие вид $\sum_s\lambda_s(\omega)r_s\cos\omega s$, с различными весовыми функциями $\lambda(\omega)$, которые выбираются так, чтобы сделать оценки состоятельными; оценки средней спектральной плотности по полосе частот, например

$$f_D(\omega)=\frac{1}{2\varepsilon\pi}\int_{\omega-}^{\omega+}I_n(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{1+2\sum_{s=1}^{n-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)C_s\cos\omega s\,\frac{\sin s\varepsilon}{s\varepsilon}\right\};$$

оценки спектральной функции, имеющие вид

$$F_n(\omega)=\frac{1}{\pi}\left[\omega+2\sum_{l=1}^{m}\lambda_sC_s\,\frac{\sin\omega s}{s}\right].$$

Приводятся распределения оценок, характеристики распределений (среднее, дисперсия и т. п.). Рассматриваются также применения метода доверительных интервалов. Сообщается об использовании электронных цифровых машин для вычисления рассматриваемых оценок. Доказательства не приводятся. Кратко сообщается о работах, в которых рассматриваются процессы со смешанным спектром. Библ. 39 назв. В. П. Швальб

625. О состоятельных оценках спектра стационарных временных рядов. Парзен (On consistent estimates of the spectrum of a stationary time series. Parzen Emanuel), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 2, 329—348 (англ.)

Строятся оценки для некоторых характеристик вероятностных процессов вида $x(t)=y(t)+m(t)$, $-\infty<t<\infty$, где $m(t)$ — неслучайная, но неизвестная функция, а $y(t)$ — стационарный в широком смысле процесс с $Ey(t)=0$, имеющий суммируемую корреляционную функцию $R(v)=Ey(t)y(t+v)$ со спектральной плотностью $f(\omega)$. Предполагается еще, что $E|y(t)|^4$ существует для всех t и $P(v_1, v_2, v_3)=Ey(t)y(t+v_1)y(t+v_2)y(t+v_3)$ является функцией только v_1, v_2, v_3.

Определяются: выборочная функция процесса $Y_T(t)=\hat{x}(t)-m_T$ при $0\leqslant t\leqslant T$, $Y_T(t)=0$ при $t<0$ и $t>T$, где $x(t)$ — наблюденные значения $x(t)$ для $0\leqslant t\leqslant T$, m_T — наилучшая в среднем квадратичном оценка $m(t)$; выборочная корреляционная функция

$$R_T(v)=\frac{1}{T}\int_0^{T-|v|}Y_T(t)Y_T(t+|v|)dt,\ |v|<T,$$

$$R_T(v)=0,\quad |v|\geqslant T;$$

выборочная спектральная плотность

$$f_T(u)=\frac{1}{T}\left|\int_0^T Y_T(t)e^{-it\omega}\,dt\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}R_T(v)e^{-iv\omega}dv.$$

Доказывается, что $\lim_{T\to\infty}T^{1/2}|ER_T(v)-R(v)|=0$. Для спектральной плотности предлагается оценка:

$$\hat{f}_T^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}e^{-iv\omega}\,k(B_Tv)\,R_T(v)dv,$$ где B_T — последовательность, сходящаяся к нулю и такая, что $B_TT\to\infty$ при $T\to\infty$, а $k(z)$ — ограниченная функция с интегрируемым квадратом и $k(0)=1$.

Доказывается, что

$$\lim_{T\to\infty}TB_TE[(f^*(\omega_1)-Ef^*(\omega_1))(f^*(\omega_2)-Ef^*(\omega_2))]=$$

$$=f^2(\omega)\int k^2(z)dz\,\{1+\delta(0,\omega_1)\}\,\delta(\omega_1,\omega_2),$$

где $\delta(\omega_1,\omega_2)=1$ при $\omega_1=\omega_2$, $\delta(\omega_1,\omega_2)=0$ при $\omega_1\neq\omega_2$, $\omega_1\geqslant0$, $\omega_2\geqslant0$; предел является равномерным для лю-

бого $\varepsilon > 0$, если $\omega_1 \geqslant \varepsilon$, $\omega_2 \geqslant \varepsilon$. Степень приближения $f_T^*(\omega)$ к $f(\omega)$ характеризует следующая теорема: Если q таково, что $\int |v|^q \, R(v)dv < \infty$; последовательность B_T такова, что $0 < \lim_{T\to\infty} TB_T^{1+2q} < \infty$, $k^{(r)} = \lim_{z\to\infty} \frac{1+k(z)}{|z|^r}$, причем r является наибольшим показателем, для которого предел существует, конечен и отличен от нуля, то равномерно по ω

$$\lim_{T\to\infty} B_T^{-2q} |Ef_T^*(\omega) - f(\omega)| = \begin{cases} |k^{(q)} f^{(q)}(\omega)|^2, & q = r, \\ 0, & q < r. \end{cases}$$

В работе также выводится формула для средней квадратичной ошибки оценки $f_T^*(\omega)$ и рассматривается задача интерполяции спектральной плотности $f(\omega)$.

В. П. Швальб

626. О статистической оценке переходных вероятностей в цепях Маркова. Смирнов Н. В., Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 47—48

Для простой цепи Маркова с $(s+1)$ состояниями E_i и положительной матрицей $P = \|p_{ij}\|$ переходных вероятностей находится явное выражение для вероятности $P^n(\|m_{ij}\|)$ наблюдать совокупность переходов m_{ij} от E_i к E_j в отрезке из n испытаний, образующих заданную матрицу $M = \|m_{ij}\|$.

Показывается, что для проверки простой гипотезы, фиксирующей матрицу P, целесообразно использовать критерий

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s+1} \sum_{j=1}^{s+1} \left[\frac{m_{ij}}{m_i} - p_{ij}\right]^2 \frac{np_i}{p_{ij}},$$

асимптотически следующий закону χ^2 с $s^2 + s$ степенями свободы.

Резюме автора

627. Положительные зональные функции на сферах. Бохнер (Positive zonal functions on spheres. Bochner S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 12, 1141—1147 (англ.)

Рассматривается система ортогональных на $[-1, 1]$ относительно веса $\left(\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\gamma-1/2} d\xi\right)^{-1} (1-x^2)^{\gamma-1/2}$, $\gamma > 0$, многочленов $P_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, нормированных условием $P_n(1) = 1$. Последовательность чисел $\{c_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ называется положительно определенной, если при любом целом $M > 0$ и любых вещественных a_n из $\sum_0^M a_n P_n(x) \geqslant 0$ следует $\sum_0^M a_n c_n P_n(x) \geqslant 0$. Теорема 2 гласит, что последовательность $\{c_n\}$ положительно определена тогда и только тогда, когда $c_n = \int_{-1}^{1} P_n(x)\, dH(x)$, где $H(A)$ — неотрицательная ограниченная σ-аддитивная функция множества. Последовательность непрерывных функций $\{c_n(t)\}$, $0 \leqslant t < \infty$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, называется однородным (стохастическим) процессом, если: 1) для любого t последовательность чисел $\{c_n(t)\}$ положительно определенная, 2) $c_n(u+v) = c_n(u)\, c_n(v)$, 3) $c_0(t) = 1$ и 4) $c_n(0) = 1$. Основной результат (теорема 3) гласит, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы последовательность $\{c_n(t)\}$ образовывала однородный процесс, состоит в существовании на полуоткрытом интервале $-1 \leqslant x < 1$ σ-аддитивной функции множества $G(A)$ с условием $\int_{-1}^{1-0} dG(x) < \infty$ и постоянной $\sigma \geqslant 0$, для которых

$$C_n(t) = \exp\left\{-t\sigma(n+2\gamma) - t\int_{-1}^{1-0} \frac{1-P_n(y)}{1-y}\, dG(y)\right\}.$$

При этом σ и $G(A)$ определяются единственным образом. Отмечается, что из теоремы 3 следует положительность некоторых решений на $(-1, 1)$ уравнения диффузии

$$(x^2-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (2\gamma+1)x\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Н. А. Сапогов

628. Случайная дезориентация двух кубов. Хандском (On the random disorientation of two cubes. Handscomb D. C.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 85—88 (англ.)

Даны два идентичных симметричных тела (например, кубы) с независимыми случайными ориентациями. Всегда несколькими способами можно повернуть одно из тел около некоторой оси, проходящей через его центр тяжести, так, что оно приведется в такую же ориентацию, как и другое тело. Наименьший необходимый угол вращения называется дезориентацией d двух тел. В этих условиях в статье изучается распределение d. Если игнорировать симметрию, то относительная ориентация тел задается единственным образом (по модулю 2π) одним вращением; требуемое наименьшее вращение есть комбинация этого вращения с некоторым вращением вокруг оси симметрии тела. Используя только этот факт и строя случайные ортогональные матрицы для описания вращений, Макензи и Томпсон получили методом Монте-Карло оценку распределения d для кубов. В настоящей статье показывается, как другим способом можно точно получить это распределение. Резюме автора

629. Заметка о совпадении некоторых случайных функций. Уэйсс (A note on the coincidence of some random functions. Weiss George H.), Quart. Appl. Math., 1956, **14**, № 1, 103—107 (англ.)

Пусть имеются системы S_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, каждая из которых может случайно оказаться в двух состояниях I и II независимо одна от другой; l_k, m_k — времена непрерывного пребывания S_k в состояниях I и II соответственно, $\alpha_k(l_k)$, $\beta_k(m_k)$ — соответствующие плотности вероятности. Для распределения времени, в течение которого все n систем находятся в состоянии I, нужно знать вероятность того, что S_k находится в состоянии I $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в момент t. Эта вероятность $\eta_k(t)$ выражается через известные плотности: $\alpha_k(l_k)$, $\beta_k(m_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Примечание референта. Независимость систем S_k предполагается, но не указывается.

M. Rosenblatt-Roth

630. Оптимальные фильтры для независимого измерения двух связанных между собой искаженных сигналов. Бендат (Optimum filters for independent measurements of two related perturbed messages. Bendat Julius S.), IRE Trans. Circuit Theory, 1957, **4**, № 1, 14—19 (англ.)

Пусть имеется два сигнала $s_1(t)$ и $s_2(t)$, второй из которых является производной некоторого порядка первого сигнала, или же значением первого сигнала в некоторый запаздывающий момент времени, или же (самый общий случай) связан с сигналом $s_1(t)$ некоторой линейной операцией с известной передаточной функцией $H(p)$. Сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ наблюдаются независимо друг от друга, причем наблюдения эти сопровождаются ошибкой $n_1(t)$ и соответственно $n_2(t)$, где $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — стационарные случайные процессы (может быть, взаимно коррелированные) с известными функциями корреляции (или спектрами). Требуется дать оптимальный метод оценки значений обоих сигналов, использующий всю информацию, получаемую при наблюдении и того и другого из них.

Рекомендуется поступать следующим образом. Пусть в первую очередь нас интересует оценка сигнала $s_2(t)$. В таком случае прежде всего процесс $s_1(t)+n_1(t)$ следует преобразовать линейной системой с передаточной функцией $H(p)$; при этом на выходе системы мы получаем процесс $s_2(t)+l_2(t)$, где $l_2(t)=H(p)n_1(t)$. Вычитая этот процесс из известного нам процесса $s_2(t)+n_2(t)$, мы получаем линейную комбинацию двух шумов $n_2(t)-l_2(t)$. Зная функции корреляции (включая и совместную функцию корреляции) шумов $n_1(t)$ и $n_2(t)$, а следовательно, и $l_2(t)$ и $n_2(t)$, можно воспользоваться теорией Винера оптимальной фильтрации стационарных случайных процессов и построить линейный фильтр (передаточную функцию которого мы обозначим через $E(p)$) такой, что если на вход этого фильтра подать процесс $n_2(t)-l_2(t)$, то на выходе получается процесс $-l_2(t)+\delta_2(t)$, для которого средний квадрат отклонения $\delta_2(t)$ от процесса $-l_2(t)$ будет наименьшим из всех возможных. Прибавляя затем этот процесс $-l_2(t)+\delta_2(t)$ к имеющемуся у нас процессу $s_2(t)+l_2(t)$, мы получим процесс $s_2(t)+\delta_2(t)$, дающий оптимальную (в определенном смысле) оценку сигнала $s_2(t)$; для получения этой оценки, очевидно, используются данные измерений обоих процессов $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Для получения дополнительной оценки первого сигнала $s_1(t)$ процесс $s_2(t)+l_2(t)$ пропускается через фильтр с передаточной функцией $Y_1(p)=Y(p)H^{-1}(p)$ такой, что $s_{1x}(t)=Y(p)s_1(t)$ является приемлемой для нас оценкой сигнала $s_1(t)$; на практике в ряде случаев следует полагать $Y(p)=1$, т. е. $Y_1(p)=H^{-1}(p)$, тогда $s_{1x}(t)=s_1(t)$; далее, для уменьшения ошибки $l_1(t)=Y(p)n_1(t)$, возникающей на выходе этого последнего фильтра, к процессу на выходе добавляется процесс $-l_2(t)+\delta_2(t)$, также пропущенный через фильтр с передаточной функцией $Y_1(p)$, после чего ошибка $l_1(t)$ уменьшается до $\delta_{1x}(X)=Y_1(p)\delta_2(t)$. Таким образом, окончательно получаются оценки и первого и второго сигнала с ошибками $\delta_2(t)$ и $\delta_{1x}(t)$, причем в обоих случаях для получения оценок используются результаты наблюдений обоих сигналов. Если нас в первую очередь интересует оптимальная оценка сигнала $s_1(t)$ (а получение оценки $s_2(t)$ является побочной задачей), то следует во всех предыдущих рассуждениях заменить $s_1(t)$ на $s_2(t)$ (и наоборот), а $H(p)$— на $H^{-1}(p)$ (и наоборот). Специально рассматривается важный случай, когда $Y(p)\equiv 1$; для этого случая в предположении, что шумы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ взаимно некоррелированы, находится условие, при котором замена $s_1(t)$ на $s_2(t)$ и $H(p)$ на $H^{-1}(p)$ не меняет среднеквадратичной ошибки получаемых оценок сигналов $s_2(t)$ и $s_1(t)$.

В качестве иллюстрации подробно рассматривается частный случай (имеющий практическое значение для теории автоматического управления прицельной стрельбой), в котором $s_1(t)=\frac{d}{dt}s_2(t)$, а $n_1(t)$ и $n_2(t)$ — взаимно некоррелированные стационарные случайные процессы со спектральными плотностями, равными соответственно

$$G_{n_1n_1}(\omega)=\frac{K_1b_1^2}{\omega^2+b_1^2} \text{ и } G_{n_2n_2}(\omega)=\frac{K_2b_2^2}{\omega^2+b_2^2}.$$

Для этого случая отдельно рассматриваются задачи оптимальной оценки $s_2(t)$ и оптимальной оценки $s_1(t)$.

А. М. Яглом

631. Применение последовательных методов к наименьшим квадратичным фильтрам с постоянной памятью. Блум (Fixed memory least squares filters using recursion methods. Blum Marvin), IRE Trans. Inform. Theory, 1957, 3, № 3, 178—182 (англ.)

Пусть $y(t)=P(t)+N(t)$ — входной сигнал линейного фильтра. Здесь $P(t)$ — полином по t степени K, $N(t)$ — белый шум, относительно которого предполагается, что он стационарен и эргодичен и что для всех t $E(N(t))=0$.

Наблюдения производятся каждые T единиц времени, и задача заключается в том, чтобы в момент времени $t=mT$ оценить наилучшим образом L-ю производную $P(t)$ для момента времени $t=(m+\alpha)T$.

Предполагается, что фильтр имеет постоянную память длины n, т. е. что выходящий в момент $t=mT$ сигнал Z_m связан с выходными сигналами соотношением

$$Z_m=\sum_{u=1}^{n}C_u\,y_{u+m-n} \text{ для } m=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (1)$$

(здесь $E(Z_m)=\frac{dL}{dtL}P(t)|_{t=(m+\alpha)T}$, $y_{u+m-n}=y(u+m-n)$, а веса C_u не зависят от m и выбираются так, чтобы $E(Z_m-E(Z_m))^2$ принимало минимальное значение).

Выводится рекуррентная формула, позволяющая для больших n и малых K вычислять Z_m проще, чем при помощи уравнений (1).

Б. Н. Гартштейн

632. К соотношению неопределенности для действительных сигналов. Кей, Силверман (On the uncertainty relation for real signals. Kay I., Silverman R. A.), Inform. and Control, 1957, 1, № 1, 64—75 (англ.)

Для действительных нормированных сигналов $f(t)$ рассматривается известное соотношение неопределенности, связывающее неопределенность сигнала по времени с неопределенностью по частоте. За меру неопределенности по частоте берется $(\Delta\omega_+)^2$ — дисперсия функции $|F_+(\omega)|^2$, где

$$F_+(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt, & \omega\geqslant 0,\\ 0, & \omega<0.\end{cases}$$

Под дисперсией функции $g^2(x)$ авторы понимают величину

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2g^2(x)\,dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty}xg^2(x)\,dx\right)^2.$$

За меру неопределенности по времени берется $(\Delta t_+)^2$ — дисперсия функции $|f_+(t)|^2$, где $f_+(t)$ — преобразование Фурье $F_+(\omega)$. Соотношение неопределенности имеет вид $\Delta t_+\Delta\omega_+\geqslant 1/2$.

Авторы указывают, что более естественной мерой неопределенности сигнала $f(t)$ по времени является $(\Delta t)^2$— дисперсия функции $f^2(t)$, причем Δt не всегда равно Δt_+. Получено соотношение неопределенности для Δt и $\Delta\omega_+$:

$$\Delta t\Delta\omega_+>\frac{1}{2}\left|1-F_+^2(0)\cdot\bar{\omega}\right|,$$

где

$$\bar{\omega}=\int_0^{\infty}\omega\,|F_+(\omega)|^2\,d\omega.$$

Приводится пример сигнала со спектром, имеющим вид усеченной гауссовой кривой, для которого $\Delta t\Delta\omega_+$ равно примерно $\frac{1}{3}$. Вопрос о нижней грани $\Delta t\Delta\omega_+$ остается открытым.

В. Ф. Писаренко

633. Теория информации и метрическая решетка. Ватанабэ (Théorie d'information et treillis métrique. II. Watanabe Sigekatu. Rept Univ. Electro-Commun., 1954, 6, 27—35) (франц.; рез. японск.)

См. РЖМат, 1958, 8103.

634. Исследование последетекторных интегрирующих цепочек при помощи метода Монте-Карло. Дилуэрт, Аккерлинд (The analysis of post detection integration systems by Monte Carlo methods. Dilworth R. P., Ackerlind E.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 2, 40—47 (англ.)

Вычисляются кривые вероятности пересечения заданного порогового значения потенциала импульсом, прошедшим через последетекторную интегрирующую цепочку и возникшим от сложения входного импульса со случайно распределенными импульсами шумов. Задача ставится следующим образом: на вход системы, состоящей из усилителя промежуточной частоты, детектора, последетекторной интегрирующей цепочки и порогового детектора, подается сигнал конечной длительности τ и шум, достаточно большой по сравнению с τ длительности; спрашивается, как зависит упомянутая вероятность от отношения сигнала к шуму $\frac{S}{N}$, от длительности сигнала, от полосы пропускания частот усилителя, от частоты и от порога детектора. Предлагаемая методика применяется к частному случаю, имеющему практический интерес для исследования радарных установок: сигнал и шум подаются на вход одновременно, и через время τ сигнал прерывается. В качестве последетекторной интегрирующей цепочки взята цепочка RC с постоянной времени, равной продолжительности сигнала τ.

Результаты вычислений даны в виде 7 графиков, по осям которых отложены время τ и вероятность пересечения порога. В. Я. Евфанов

635. Вероятностное доказательство теоремы о приближении непрерывных функций при помощи обобщенных полиномов Бернштейна. Арато, Реньи (Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials. Arató M., Rényi A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 1-2, 91—98 (англ.)

Дается без оценки погрешности доказательство теоремы Гиршмана—Виддера—Гельфонда о приближении непрерывных функций обобщенными полиномами С. Н. Бернштейна (Hirschman I. J., Widder D. V., Duke Math. J., 1949, 16, 433—438 и Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, М.—Л., ГИТТЛ, 1952, 111—117), допускающее вероятностную интерпретацию, подобно тому как ее допускает доказательство аппроксимационной теоремы Вейерштрасса при помощи классических многочленов С. Н. Бернштейна. Н. А. Сапогов

636. Расчет методом Монте-Карло электронно-фотонного каскада в свинце. Чавчанидзе В. В., Шадури Р. С., Кумсишвили В. А., Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, 34, № 4, 912—915 (рез. англ.)

Дан метод статистико-вероятностного моделирования инициированного γ-квантами электронно-фотонного каскада (в слое свинца), основанный на методе случайных испытаний (модификация метода Монте-Карло). Приведены типичные кривые результатов расчета. Указаны два метода ведения подобного типа расчетов при помощи существующих быстродействующих электронных вычислительных машин. Резюме авторов

637. О методе аппроксимации Кифера—Вольфовица. Дупач (O Kiefer—Wolfowitzově aproximační methodě. Dupač Václav), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 1, 47—75 (чешск.; рез. русск., нем.)

Изучается стохастическая процедура аппроксимации Роббинса—Монро (Robbins H., Monro S., Ann. Math. Statistics, 1 51, 22, 400—407) и ее модификация Киефером—Вольфовицем (Kiefer J., Wolfowitz J., Ann. Math. Statistics, 1952, 23, 457—461) для нахождения значения $x=\theta$, при котором функция $M(x)$ достигает своего максимума. Пусть для любого действительного x $H(y\mid x)$ — функция распределения; функция регрессии $M(x)=\int_{-\infty}^{\infty} y\,dH(y\mid x)$ — конечная, возрастающая для $x<\theta$ и убывающая для $x>\theta$. Пусть $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ — последовательности положительных констант таких, что $c_n\to 0$, $\sum_1^\infty a_n=+\infty$, $\sum_1^\infty a_n c_n<+\infty$, $\sum_1^\infty\left(\frac{a_n}{c_n}\right)^2<\infty$. Пусть x_1 — произвольное постоянное и $x_{n+1}=x_n+a_n(y_{2n}-y_{2n-1})/c_n$, где $n\geqslant 1$, а y_{2n}, y_{2n-1} — случайные величины, у которых функции распределения для заданных $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_{2n-2}$ суть $H(y\mid x_n+c_n)$ и $H(y\mid x_n-c_n)$ соответственно и которые независимы для указанных значений переменных.

Автор исследует асимптотические свойства случайной величины x_n, причем идея этого исследования заимствована из статьи Джуна (РЖМат, 1956, 3_03), в которой аналогичные свойства устанавливаются для первоначального RM-метода. Так же как и в статье Джуна, разбираются два случая: первый (случай квазипараболической регрессии, ограничивает величину производной $M'(x)$ определенными линейными границами, второй случай постулирует ограниченность отклонений $y-M(x)$. Для первого случая доказываются следующие новые теоремы:

В предположении, что (I) $\sigma^2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(y-Mx)^2\,dH(y\mid x)\leqslant \sigma^2$, $-\infty<x<+\infty$ и (II) $K_0|x-\theta|\leqslant|M'(x)|\leqslant K_1|x-\theta|$, $-\infty<x<+\infty$, доказывается сходимость $x_n\to\theta$ в L_2 (теорема 1).

Для случая $a_n=\frac{a}{n^\alpha}$, $c_n=\frac{c}{n^\gamma}$ $\left(\frac{3}{4}<\alpha\leqslant 1,\quad 1-\alpha<\gamma<\alpha-\frac{1}{2}, a>0, c>0 \text{ и } \alpha=1\Rightarrow a>\frac{1}{4K_0}\right)$ с помощью лемм из указанной статьи Джуна, а именно: $b_n=O\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$, если $\gamma=\frac{1}{4}\alpha$ и $b_n=O\left(\frac{1}{n^{2\gamma}}\right)$, если $\gamma<\frac{1}{4}\alpha$,— находятся верхние оценки дисперсий $b_n=E(x_n-\theta)^2$ (теорема 2).

В теореме 3 доказывается, что выбор $a_n=\frac{a}{n}$ и $c_n=\frac{c}{n^{1/4}}$, дающий $b_n=O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$, является оптимальным в следующем смысле: если или $\alpha\neq 1$, или $\gamma\neq\frac{1}{4}$, то существует система $\{H(y\mid x)\}$, для которой $\lim_{n\to\infty} b_n n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}>0$, $\varepsilon>0$.

При добавочном предположении (III) $|M^3(x)|\leqslant Q$, $-\infty<x<+\infty$, область тех $\gamma>s$, для которых $b_n=O\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$, возрастает до $\gamma\geqslant\frac{1}{6}\alpha$, а для $\gamma<\frac{1}{6}\alpha$ имеет место оценка $b_n=O\left(\frac{1}{n^{4\gamma}}\right)$. Выбор $\alpha=1$, $\gamma=\frac{1}{6}$ тогда является оптимальным в вышеуказанном смысле, с $1/n^{2/3}$ вместо $1/n^{1/2}$ (теорема 4). Замена предположения (III) предположением (IV) $M^{(2k+1)}(\theta=0, |M^{(2k+2)}(x)|\leqslant A^{2k+1}(2k+1)!$ $k=1,2,\ldots,-\infty<x<+\infty$, приводит к оценке $b_n=O\left(\frac{1}{n^{\alpha-2\gamma}}\right)$ для всех допустимых α и γ (теорема 5). Если, кроме (I) и (II), имеют место предположения: (V) для каждого кратного $p>2$ существу-

ет K_p такое, что $\int_{-\infty}^{\infty}(y-M(x))^p\,dH(y\mid x)\leqslant K_p$, $-\infty<$ $<x<\infty$ и (VI) $\sigma^2(x)$ есть непрерывная и необращающаяся в нуль в точке $x=\theta$ функция, и если возникает один из следующих случаев: 1) $\gamma\geqslant\frac{1}{4}\alpha$ и в некоторой окрестности θ существует непрерывная вторая производная $M''(x<$ $<0,2)\gamma>\frac{1}{6}\alpha$ и имеет место предположение (III), 3) имеет место предположение (IV), то распределение случайной величины $n^{\frac{1}{2}(\alpha-\alpha\gamma)}(x_n-\theta)$ стремится к нормальному со средним значением 0 и дисперсией $a\sigma^2(\theta)/-2M''(\theta)$ для $\alpha<1$ и $a^2\sigma^2(\theta)/(-2aM''(\theta)-\frac{1}{2}+\gamma)e^2$ для $\alpha=$ $=1$ соответственно (Теорема 7). Подробно доказывается только первый случай. Доказательство остальных случаев лишь намечено. В случае ограниченных отклонений $y-M(x)$ и априори известных конечных пределов для θ, для того чтобы имели место все приведенные предположения, достаточно, чтобы они имели место только в окрестности θ.

Теоремы, доказанные в квазипараболическом случае, остаются действительными при некотором изменении этих предположений. L. Truksa

638. Приближенное определение вероятностных характеристик выходных координат нелинейных систем автоматического регулирования. Доступов Б. Г., Автоматика и телемеханика, 1957, **18**, № 11, 999—1009 (рез. англ.)

Предлагается метод приближенного определения моментов $\mu_p=M(X_\nu^p)$, $p=1,2\ldots$, интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_\nu}{dt}=f_\nu(X_1,\ldots,X_n,V_1,\ldots,V_m,t)(\nu=1,2,\ldots,n), \qquad (1)$$

удовлетворяющей условию единственности решения в некоторой области D, в которой $f_1,\ldots,f_n$ — заданные функции (неслучайные), $V_1,\ldots,V_m$ — случайные параметры, $X_1,\ldots,X_n$ — искомые случайные функции.

Предполагается, что моменты параметров $V_1,\ldots,V_m$ до q-го порядка включительно существуют и $M(V_r)=0$,

$$r=1,\ldots,m,\quad M(V_{r_1}\ldots V_{r_k})=\mu_{r_1,\ldots,r_n}$$

$$(k=1,\ldots,q;\ r_1,\ldots,r_k=1,2\ldots,m)$$

и что X_ν могут быть представлены рядом Маклорена по параметрам V_r. Метод состоит в нахождении интеграла $x_{\nu s}$ системы (1), где вместо параметров v_r подставлены их частные значения $\xi_{rs}(s=1,\ldots,N)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\sum_{s=1}^{N}\alpha_s\xi_{r_1s}\ldots\xi_{r_ks}=\mu_{r_1\ldots r_k}\begin{pmatrix}k=1,\ldots q\\ r_1,\ldots,r_k=1,\ldots,m\end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $\sum_{s=1}^{N}\alpha_s=1$. Величины $\xi_{rs}\begin{pmatrix}r=1,\ldots,m\\ s=1,\ldots,N\end{pmatrix}$ и N выбираются произвольно, лишь бы обеспечить существование решения системы.

Тогда $M\left(X_\nu^p\right)=\sum_{s=1}^{N}\alpha_s x_{\nu s}^p$. В. П. Швальб

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

639. Преподавание основ статистических методов в элементарных математических курсах. Уилкс (Teaching statistical inference in elementary mathematics courses. Wilks S. S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 143—153 (англ.)

Дискутируя вопрос, автор подразделяет свои замечания на пять частей: 1) происхождение и сущность статистического метода; 2) как идеи статистического метода преподаются в Америке; 3) где и когда нужно преподавать элементарные сведения о статистических методах; 4) совокупность статистических концепций в основном математическом курсе первого и второго года обучения в вузах; 5) резюме и заключения.

Из введения автора

640. Разбиения в более чем одном измерении. Беннетт (Partitions in more than one dimension. Bennett J H.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 1, 104—112 (англ.)

Выводится несколько важных свойств для новых функций разбиения, введенных Фишером (Fisher R. A., Philos. Trans., 1950, B, **233**, 55—87) в его исчислении числа разбиений целого числа в произвольном числе измерений. Эти функции легко приводят к исчислению числа разбиений целого числа в более чем одном измерении и с данными краевыми разбиениями. Такое исчисление дано для разбиений на две части целых чисел от 1 до 8 включительно. Резюме автора

641. Свойства матрицы отметок по тестовым вопросам. Мак-Лейн (Properties of the item score matrix. MacLean Angus G.), Psychometrika, 1958, **23**, № 1, 47—53 (англ.)

Дается метод получения из матрицы отметок по тестовым вопросам всех обычных статистик, описывающих поведение обследуемой группы индивидуумов в условиях теста. Поскольку эта матрица в действительности не выписывается, но представляется множеством перфорированных карт, описывается методика использования другой более компактной матрицы. Перечисляются приложения и преимущества этого метода сравнительно с методом регистрации только тестовых отметок экзаменующихся и их затруднений на отдельных пунктах. Резюме автора

642. Проблема отбора в экспериментальных исследованиях. Элвинг (A selection problem in experimental design. Elfving G. Commentat phys-math., 1957, **20**, № 2, 10 pp.) (англ.)

Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ — неизвестные параметры распределения, а $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)'$ — вектор параметров. Целью эксперимента является оценка линейной формы $\theta=c'\alpha$. Допускается использование результатов наблюдения, которые могут быть записаны в виде

$$x_i=u_i'\alpha+\xi_i \qquad (i=1,\ldots,N). \qquad (1)$$

Здесь ξ_i — некоррелированные ошибки наблюдений, а u_i — известные m-мерные векторы коэффициентов. Экспериментатор должен произвести $n<N$ наблюдений вида (1). Проблема отбора заключается в том, чтобы выбрать подмножество $w=(i_1,\ldots,i_n)$ из множества индексов $i=1,\ldots,N$ так, чтобы минимизировать дисперсию наименьшей квадратичной оценки $\hat{\theta}$, полученной из соответствующих наблюдений. Эта дисперсия определяется формулой

$$V=D^2(\hat{\theta})=c'M^{-1}c, \qquad (2)$$

где

$$M=\sum_{i=1}^{N} p_i u_i u'_i \qquad (3)$$

—обобщенная матрица информации, а $p=(p_1,\ldots,p_N)$ — вектор размещения, удовлетворяющий условиям

$$0\leqslant p_i\leqslant 1, \qquad \sum_{1}^{N} p_i = n. \qquad (4)$$

Доказывается теорема: функция V от p, определенная формулами (2)—(3) на множестве (4), имеет минимум. Для того чтобы вектор размещения p осуществлял этот минимум, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого неотрицательного числа h

$$p_i=\begin{cases}0\\ 1\end{cases}\text{ как только }|c'M^{-1}u_i|\leqslant h.$$

Б. Н. Гартштейн

643. О смещении, вызываемом погрешностью измерения в гистограмме. Винце (Mérési eredmények pontatlanságának hatása hisztogramm felvételénél. Vincze István), Magyar tud. akad. alkalm. mat. közl., 1953, **2**, 267—273 (венг.; рез. русск., нем.)

Исследуется смещение, вызываемое случайными погрешностями измерения в гистограмме. Даются оценки сверху для математического ожидания разности между частотами точного и смещенного значений, наблюденных в групповом интервале. Разбирается несколько числовых примеров. T. Lipták

644. Об устойчивости по вероятности экстремальных значений выборки. Жефруа (Sur la stabilité en probabilité des valeurs extrêmes d'un échantillon. Geffroy Jean), C. r. Acad. sci., 1957, **245**, № 15, 1215—1217 (франц.)

Приводится без доказательства критерий применимости закона больших чисел к максимальному и минимальному членам вариационного ряда. Аналогичный, но более удобный для практических применений критерий был ранее найден Б. В. Гнеденко (Ann. Math., 1943, **44**, № 3) Пример, приводимый в реферируемой работе, также рассмотрен в работе Гнеденко.

Б. Н. Гартштейн

645. Промежутки между отдельными значениями в смешанных выборках. Уэйсс (Spacing generated by mixed samples. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics. 1958. **29**, № 1, 316—318 (англ.)

Пусть $X(1,1), X(1,2),\ldots, X(1,n_1), X(2,1),\ldots, X(2,n_2),\ldots, X(k,1),\ldots, X(k,n_k)$ — независимые случайные величины; $X(i,j)$ имеет плотность вероятности $f_i(x)$ для $j=1,\ldots,n_i$, $i=1,\ldots,k$. Предполагаем, что для каждого i $f_i(x)$ ограничена и имеет не более конечного числа точек разрыва. Пусть $n_1+n_2+\ldots+n_k=N$ и $n_i/N=r_i$, где r_i — заданное положительное число. $Y_1<Y_2<\ldots<Y_N$ — упорядоченные значения N наблюдений величин $X(1,1),\ldots,X(k,n_k)$. Пусть $W_i=Y_{i+1}-Y_i$ для $i=1,\ldots,N-1$ и $R_N(t)$ обозначает долю значений $W_1,\ldots,W_{N-1}$, превосходящих t/N.

Если $S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(r_1f_1(x)+r_2f_2(x)+\ldots+r_kf_k(x))\exp\{-t[r_1f_1(x)+\ldots+r_kf_k(x)]\}\,dx$ и $V(N)=\sup_{t>0}|R_N(t)-S(t)|$, то $V(N)$ стохастически сходится к нулю при возрастании N. Этот результат является обобщением другой работы автора (РЖМат, 1956, (397), где k было равно единице. Результат применяется для нахождения асимптотического поведения рангов в k-выборочной проблеме. Резюме автора

646. Определение выборочного объема для определенной ширины доверительного интервала. Грейбилл (Determining sample size for a specified width confidence interval. Graybill Franklin A.), Ann. Math Statistics, 1958, **29**, № 1, 282—287 (англ.)

Пусть $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$ и d — заранее определенные числа. Доказывается сложно формулируемая теорема относительно определения объема выборки так, чтобы доверительный интервал, ширина которого с вероятностью β не превышает d, с вероятностью α покрывал бы неизвестный параметр. Р. Х. Дивеев

647. Простая последовательная процедура для определения, удовлетворяют ли средние условия определенному стандарту. Томлинсон (A simple sequential procedure to test whether average conditions achieve a certain standard. Tomlinson Rolfe C.), Appl. Statist., 1957, **6**, № 3, 198—207 (англ.)

Пусть λ_1 — нижняя, λ_2 — верхняя 95-процентная точка распределения, μ— критическое значение, определяемое заданным стандартом. Для случая, когда дисперсия распределения известна, предлагается схема текущего контроля производства, по которой производственные условия признаются годными, если средние условия одной смены дают значение, меньшее, чем λ_1, или средние условия двух последовательных смен дают значения, лежащие между λ_1 и μ. Точно так же производственные условия признаются негодными, если средние условия одной смены дают значение, большее, чем λ_2, или средние условия двух последовательных смен дают значения, лежащие между μ и λ_2. Для случая неизвестной дисперсии распределения рекомендованная схема несколько меняется. Б. Н. Гартштейн

648. Совместное асимптотическое распределение медианы и U-статистики. Сукхатме (Joint asymptotic distribution of the median and a U statistic. Sukhatme Balkrishna V.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 144—148 (англ.)

Пусть $f(x)$ — плотность распределения вероятностей некоторой случайной величины X, непрерывная в некоторой окрестности 0 и такая, что $f(0)\neq 0$ и ее медиана равна 0. Далее пусть имеются независимые случайные наблюдения $x_1,\ldots,x_n$ (n нечетно). Для ограниченной и симметричной функции ψ переменных $t_1,\ldots,t_s$ определяется статистика $U_n=\binom{n}{s}^{-1}\sum\psi(x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_s})$, где суммирование производится по всем $1\leqslant\alpha_1<\ldots<\alpha_s\leqslant n$ (Статистика этого рода используется, например, при проверке симметрии).

Доказывается, что если

$$\psi_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y_2,\ldots,y_s)f(y_2)\ldots f(y_s)dy_2\ldots dy_s,$$

m и σ^2 — среднее и дисперсия случайной величины $\psi_1(x)$,

$$m'=\int_{-\infty}^{0}(\psi_1(x)-m)f(x)dx,\quad m''=\int_{0}^{\infty}(\psi_1(x)-m)f(x)dx$$

и $\tilde{X}_n$ — выборочная медиана, то случайные величины $(U_n-m)\sqrt{n}$ и $\tilde{X}_n\sqrt{n}$ распределены асимптотически нормально с нулевыми средними и дисперсиями, равными соответственно $s^2\delta^2$ и $1/4f^2(0)$, и коэффициентом корреляции $(m'-m'')/s\sigma$. В частности, если $\psi_1(x)$ и $f(x)$ — четные функции, то рассматриваемые случайные величины асимптотически независимы. Подобные утверждения получаются для статистик, используемых в проблеме двух выборок. M. Jiřina

649. Границы для дисперсии ранговой корреляционной статистики расположения Кендалла. Стюарт (Bounds for the variance of Kendall's rank correlation statistic. Stuart Alan), Biometrika, 1956, **43**, № 3—4, 474—477 (англ.)

Рассматривается вопрос о нахождении пределов для дисперсии рангового корреляционного коэффициента Кендалла (Kendall M., The advanced theory of statistics, L., 1946). В частности, указывается верхняя граница для дисперсии корреляционного коэффициента, что является уточнением результата, полученного ранее Даниэльсом и Кендаллом (Daniels H. E., Kendall M. G., Biometrika, 1947, **34**, 197).

А. А. Зингер

650. О статистике, возникающей в некоторых задачах выбора и ранжировки. Гупта, Собел (On a statistic which arises in selection and ranking problems. Gupta Shanti S., Sobel Milton), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 4, 957—967 (англ.)

Изучается статистика $y=(x_p-x)/s_\nu$, где x_p — максимум p нормально распределенных независимых случайных величин с общим средним значением и с общей неизвестной дисперсией; x — другая независимая нормальная случайная величина с тем же средним значением и той же дисперсией σ^2 и s^2_ν (распределена как $\sigma^2\chi^2_\nu/\nu$ с ν степенями свободы) — оценка общей дисперсии, не зависящая от любой из $p+1$ упомянутых случайных величин. Предлагается и изучается несколько различных методов вычисления интеграла вероятностей и процентных точек для y; затем рассматривается метод вычисления процентных точек без предварительного вычисления интеграла вероятностей. В конце статьи дается таблица процентных точек. В разделе 2 упоминается приложение статистики y к некоторым задачам выбора и ранжирования. В разделе 3 даются моменты y. В разделе 7 показывается, что таблица 1 может быть использована для аппроксимации и вычисления границ процентных точек. Резюме автора

651. Точность оценок составляющих дисперсии. Келлехер, Робинсон, Комсток (Precision of estimates of variance components. Kelleher Therese, Robinson H. F., Comstock R. E.), Biometrics, 1958, **14**, № 1, 69—77 (англ.)

Изучается влияние ненормальности генеральной совокупности и отсутствия однородности в дисперсиях на точность оценок дисперсионных составляющих, когда точность оценивается на основе предположений об однородности и нормальности. Из резюме авторов

652. Оценка параметров положения и масштаба порядковыми статистиками по односторонне и двусторонне цензурированным выборкам. II. Таблицы для нормального распределения при объеме выборок $11\leqslant n\leqslant 15$. Сархан, Гринберг (Estimation of location and scale parameters by order statistics from singly and doubly censored samples. Part II. Tables for the normal distribution for samples of size $11\leqslant n\leqslant 15$. Sarhan A. E., Greenberg B. G.), Ann. Math. Statistics, 1958. **29**, № 1, 79—105 (англ.)

В предыдущей статье авторов (РЖМат, 1957, 5015) оценка среднего и стандартного отклонения по односторонне или двусторонне цензурированным выборкам (т. е. выборкам, получаемым из данных удалением нескольких членов, стоящих в начале или конце вариационного ряда этих выборок) из нормальной совокупности рассматривалась для выборок объема $n\leqslant 10$. Было получено обобщение альтернативных оценок для этих параметров. В настоящей работе все расчеты и таблицы, полученные в предыдущей статье, распространяются на $n\leqslant 15$. Цель метода — получить наилучшие линейные несмещенные оценки среднего и стандартного отклонения, используя наилучшую линейную комбинацию упорядоченных наблюдений. Дисперсии и ковариации порядковых статистик для выборок объема $11\leqslant n\leqslant 15$, требуемых для выполнения этих расчетов, получаются из таблицы 1. Дальнейшее исследование эффективности альтернативной оценки при различных степенях неопределенности показывает, что альтернативная оценка, предложенная Гупта (Gupta A. K., Biometrika, 1952, **39**, 88—95), лучше ранее предложенных оценок, если она основывается не только на односторонне, но и на двусторонне цензурированных выборках. Резюме авторов

653. Класс распределений, для которых оценка максимального правдоподобия является несмещенной и обладает минимальной дисперсией для выборок любого объема. Бартон (A class of distributions for which the maximum-likelihood estimator is unbiased and of minimum variance for all sample sizes. Barton D. E.), Biometrika, 1956, **43**, № 1, 200—202 (англ.)

Рассматривается выборка $(x_1,\ldots,x_n)$, случайно и независимо извлеченная из генеральной совокупности, закон распределения которой $P(x,\vartheta)$ зависит от неизвестного параметра ϑ так, что допускает достаточную статистику для ϑ. Блекуэлл (Ann. Math. Statistics, 1947, **18**, 105) отметил, что если t' — несмещенная (возможно неэффективная) оценка параметра ϑ и t — достаточная статистика для ϑ, то $T=E(t'|t)$ есть функция только от t (и, следовательно, достаточная оценка для ϑ) и $E(T)=\vartheta$. Далее, поскольку $Dt'=DT+E[D(t'|t)]$, функция T имеет на бо́льшую дисперсию, чем любая несмещенная оценка, с помощью которой она строится. Хол показал (Ann. Math. Statistics, 1951, **22**, 299), что функция от T, достаточная для ϑ и удовлетворяющая соотношению $E(T)=\vartheta$, является эффективно единственной, так что можно говорить о наилучшей несмещенной оценке. Так как какая-либо несмещенная оценка параметра ϑ находится легко и метод максимального правдоподобия дает достаточную статистику $\hat{\vartheta}$ для ϑ, казалось бы, что всегда возможно найти наилучшую несмещенную оценку параметра ϑ. Однако функцию $E(t'|\hat{\vartheta})$ не всегда можно вычислить. В статье показывается, что всегда можно выбрать функцию $\Phi=\Phi(\vartheta)$, для которой оценка максимального правдоподобия является наилучшей несмещенной оценкой Метод распространяется на случай многих параметров. Резюме автора

654. Некоторые критерии значимости для малых выборок в случае распределения Пуассона. Рао, Чакраварти (Some small sample tests of significance for a Poisson distribution. Rao C. Radhakrishna, Chakravarti I. M.), Biometrics, 1956, **12**, № 3, 264—282 (англ.)

Для случая, когда выборка берется из совокупности с распределением Пуассона, предлагаются некоторые новые критерии значимости, применимые для малых выборок при любом значении параметра распределения. Например, для проверки гипотезы о том, что различные наблюдения распределены по закону Пуассона с одним и тем же параметром, предлагается критерий, основанный на отношении правдоподобия, вместо применявшегося ранее дисперсионного критерия. Приводятся таблицы, иллюстрирующие преимущества предлагаемого критерия в случае малых выборок. Б. Н. Гарштейн

655. Ошибка измерения и чувствительность критерия значимости. Сатклифф (Error of measurement and the sensitivity of a test of significance. Sutcliffe J. P.), Psychometrika, 1958, **23**, № 1, 9—17 (англ.)

Устанавливается влияние случайной ошибки измерения на чувствительность F-критерия разностей между средними. Рассматривая математические модели, пригодные для планирования ситуаций, допускающих как точные, так и ошибочные меры, автор показывает, как ошибка измерения уменьшает чувствительность критерия. Описывается и рекомендуется для общей практики метод уменьшения подобной потери чувствительности. Резюме автора

656. Некоторые критерии значимости, основанные на упорядоченных величинах. Дейвид, Джонсон (Some tests of significance with ordered variables. David F. N., Johnson N. L.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 1, 1—20. Discuss., 20—31 (англ.)

Работа содержит доклад, прочитанный авторами перед научным отделением Королевского статистического общества, и дискуссию по докладу. В докладе приводится краткая информация о новых методах построения, основанных на упорядоченных выборках, критериев проверки некоторых конкретных статистических гипотез: гипотезы о значении дисперсии нормальной совокупности, о значении математического ожидания нормальной совокупности при неизвестной дисперсии, о равенстве параметров распределения, о нормальности распределения и пр. Приведены таблицы и обширная, но далеко не полная библиография.

В дискуссии указываются отдельные недочеты построенных авторами критериев значимости, предлагаются некоторые другие аналогичные критерии и частично дополняется библиография. Б. Н. Гарттштейн

657. Правила принятия решения, основанные на расстоянии, для проблем согласия, двух выборок и оценки. Матусита (Decision rules, based on the distance, for problems of fit, two samples, and estimation. Matusita Kameo), Ann. Math. Statistics, 1955, **26**, № 4, 631—640 (англ.)

Даются конкретные правила принятия решения с риском меньше, чем любое наперед заданное число, для проблемы согласия и для проблемы сравнения двух выборок. Также разбирается проблема оценки. Резюме автора

658. Метод минимального расстояния. Вольфовиц (The minimum distance method. Wolfowitz J.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 1, 75—88 (англ.)

Автор упрощает и вместе с тем обобщает метод минимального расстояния для получения строго состоятельных оценок (т. е. оценок, сходящихся с вероятностью единица), рассмотренный им в предыдущих работах (РЖМат, 1957, 3211, 4684). Пусть $X = t(Y, \theta)$ — некоторая стохастическая структура, где X и Y — случайные векторы, а θ — векторный параметр. Производится N независимых измерений вектора X и предполагается, что при этом параметр θ сохраняет постоянное значение, а случайный вектор Y — постоянное распределение $g(z)$. Требуется по наблюденным значениям вектора X оценить распределение $g(z)$ и параметр θ, $z = (z_1, z_2, \ldots z_n)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_m)$. В пространстве пар $[\theta, g(z)]$ вводится метрика

$$\delta([\theta', g'], [\theta'', g'']) = \sum_{k=}^{m} |\operatorname{arctg}\theta_k' - \operatorname{arc\,tg}\theta_k''| + \int |g'(z) - g''(z)| e^{-|z|} dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

при предположениях, которые автор называет предположениями идентификации и непрерывности и смысл которых состоит в том, что распределение вектора X непрерывно зависит от θ и $g(z)$ и однозначно определяет функцию $g(z)$ и параметр θ, легко доказывается существование строго состоятельной оценки $[\theta_N^*, g_N^*(z)]$ элементов стохастической структуры. Эта оценка определяется из условия, что расстояние между эмпирической функцией распределения вектора X и распределением вектора X при $[\theta, g(z)] = [\theta_N^*, g_N^*(z)]$ асимптотически ($N \to \infty$) минимально. Остальная (большая) часть работы посвящена обсуждению примеров, связанных с оценкой линейного соотношения между двумя случайными величинами при наличии ошибок и с определением параметра в линейном разностном стохастическом уравнении. И. И. Гихман

659. Оптимальное группирование при применении одного критерия в анализе составляющих дисперсий. Кинг (Optimum grouping in one-criterion variance components analysis. King E. P.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, **49**, № 267, 637—639 (англ.)

660. Минимаксная последовательная процедура для выбора между двумя совокупностями. Морис (A minimax procedure for choosing between two populations using sequential sampling. Maurice Rita J.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 255—261 (англ.)

Из двух нормально распределенных совокупностей со средними θ_1 и θ_2 и с известными дисперсиями, равными σ, выбирается совокупность с большей средней (аналогичную задачу для биномиальных совокупностей см. РЖМат, 1956, 5390).

Пусть N — объем выбираемой совокупности, n — объем предварительной выборки, C — стоимость контроля единицы совокупности и

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy,$$

где $a = -|\theta_1 - \theta_2|\sqrt{n}/2\sigma$ есть вероятность выбора совокупности с меньшей средней. Тогда рисковая функция (средние потери от принятия неверного решения) представляется как $r = N|\theta_1 - \theta_2|\, p + 2cE(n)$, где $E(n)$ — математическое ожидание числа наблюдений. В качестве оптимального правила выбора совокупности предлагается последовательное минимаксное правило, т. е. такое последовательное правило, которое минимизирует максимум по $(\theta_1 - \theta_2)$ рисковой функции r. Р. Х. Дивеев

661. Последовательный тест для рандомизированных интервалов. Бартоломью (A sequential test for randomness of intervals. Bartholomew D. J.), J. Roy. Statist. Soc., 1956, **B18**, № 1, 95—103 (англ.)

Предполагается, что интервалы между событиями, появляющиеся во времени или пространстве, подчиняются третьему типу распределения Пирсона

$$p(t) = \frac{\mu}{\Gamma(a)} (\mu t)^{a-1} e^{-\mu t} \qquad (t \geqslant 0),$$

где μ — известный или неизвестный параметр, а относительно a высказывается гипотеза $H_0 : a = 1$ против альтернативной гипотезы $a = a_0$.

Пусть α и β — вероятности ошибок первого и второго рода и $A \sim \frac{1-\beta}{\alpha}$, $B \sim \frac{\beta}{1-\alpha}$.

Когда μ известно, предлагается следующее последовательное правило: принять H_0, если $\log R \leqslant \log B$; отвергнуть H_0, если $\log R \geqslant \log A$; продолжить испытания, если

$$\frac{\log B + n \log \Gamma(a_0)}{a_0 - 1} < \sum_{i=1}^{n} \log \mu t_i < \frac{\log A + n \log \Gamma(a_0)}{a_0 - 1},$$

где $\log R = -n \log \Gamma(a_0) + (a_0 - 1) \sum_{i=1}^{n} \log \mu t_i$.

Приводятся формулы оперативной характеристики и

среднего количества наблюдений для этого правила. Аналогичные результаты приводятся и для неизвестного значения μ. Р. Х. Дивеев

662. Распространение оптимум-свойства отношения вероятностей последовательного теста. Гиршик (An extension of the optimum property of the sequential probability ratio test. Girshick M. A.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 288—290 (англ.)

Пусть $f(x,\theta)$ — непрерывное или дискретное распределение случайной величины x, содержащее неизвестный параметр θ; H_0 и H_1 — гипотезы, что $\theta=\theta_0$ и $\theta=\theta_1$ соответственно; $L(\theta,T)$ — оперативная характеристика последовательного теста; $E_\theta(n|T)$ — математическое ожидание числа наблюдений над x, требуемое тестом T, и $\theta_0<\bar{\theta}<\theta_1$, где $\bar{\theta}$ — соответствующим образом определенное число.

В качестве обобщения так называемого оптимум-свойства отношения правдоподобия последовательного теста T^* предлагается следующее:

Если $L(\theta,T)\geqslant L(\theta,T^*)$, когда $\theta<\bar{\theta}$, и $L(\theta,T)\leqslant L(\theta,T^*)$, когда $\theta>\bar{\theta}$, для всех значений $\bar{\theta}\neq\theta$, то $E_\theta(n|T)\geqslant E_\theta(n|T^*)$ для всех значений θ. Р. Х. Дивеев

663. Ложная корреляция и ее причинная интерпретация. Саймон (Spurious correlation: a causal interpretation. Simon Herbert A.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, **49**, № 267, 467—479 (англ.)

664. Многомерный анализ ковариации. Смит (A multivariate analysis of covariance. Smith H. Fairfield), Biometrics, 1958, **14**, № 1, 107—127 (англ.)

665. Видоизмененный подход Дулиттла к проблемам множественных и частных корреляции и регрессии. Фут (A modified Doolittle approach for multiple and partial correlation and regression. Foote Richard J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 281, 133—143 (англ.)

Представлен эффективный и гибкий метод вычисления множественных и частных коэффициентов регрессии и корреляции на настольной счетной машине. Расчеты проводились там, где это было возможно, аналогично процедуре уравнивания связанных систем уравнений при ограниченной информации. Новый метод легче воспринимается начинающими, чем обычный подход Дулиттла, так как не требует обращенного решения. Представлены эффективные методы для 1) кодирования данных, 2) взаимозамены, добавления или исключения величин, 3) получения стандартных погрешностей функций или прогнозов. Резюме автора

666. Использование фиктивных величин в уравнениях регрессии. Сьютс (Use of dummy variables in regression equations. Suits Daniel B.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, **52**, № 280, 548—551 (англ.)

667. О вычислении коэффициентов регрессии с помощью ортогональных функций. Фёльц (Über die Berechnung der Regressionskoeffizienten mit Hilfe von Orthogonalfunktionen. Voelz K.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1957, **9**, № 2, 113—129 (нем.)

Указываются недостатки обычного метода вычисления коэффициентов линейной множественной регрессии при изменении числа аргументов и предлагается «новый» метод вычисления их с помощью ортогональных функций; рассматривается построение этих ортогональных функций; выражаются уравнения множественной регрессии через эти ортогональные функции и даются реккурентные формулы для вычисления коэффициентов этого уравнения и коэффициентов первоначального уравнения регрессии. Приводятся средние квадратичные уклонения для коэффициентов рассматриваемых уравнений регрессии и критерий t Стьюдента для коэффициентов регрессии.

Автор предлагает использовать коэффициенты корреляции между изучаемым признаком и аргументами, воздействующими на этот признак, для того, чтобы выделить аргумент, наиболее сильно действующий на исследуемый признак.

Примечание референта. Предлагаемый автором метод не новый, этот метод был предложен еще в 1931 г. В. И. Романовским (Romanovsky V., Giorn. Ist. ital. Attuari., 1931, № 2, 161—171).

Более того, Романовский распространил его на нелинейные уравнения множественной регрессии (Романовский В. И., Математическая статистика, М.-Л., ГОНТИ, 1938), а Камалов указал применения метода Романовского — Чебышева в дисперсионном и ковариационном анализах (Тр. САГУ, 1954; вып. 37. Докл. АН УзССР, 1948, № 7). М. К. Камалов, Х. Баскина

668. Вероятностная интерпретация средней квадратичной сопряженности. Блейлок (Probabilistic interpretations for the mean square contingency. Blalock H. M., Jr), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 281, 102—105 (англ.)

Цель статьи — интерпретировать φ^2, среднюю квадратическую сопряженность, как функцию от вероятностей, связанных с моделью пропорционального предсказания, и вместе с тем указать на трудность полезной интерпретации мер ассоциации, основанной на хи-квадрате. Резюме автора

669. Меры ассоциации для перекрестных классификаций. Гудман, Краскал (Measures of association for cross classifications. Goodman Leo A., Kruskal William H.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, **49**, № 268, 732—764 (англ.)

При перекрестной классификации совокупности относительно двух или более признаков часто возникает вопрос о степени ассоциации, существующей между этими признаками. Большинство традиционных мер или показателей ассоциации основано на стандартной статистике хи-квадрат или на предположении о совместной нормальности. В статье рассматривается ряд альтернативных мер, почти все из которых основаны на вероятностной модели тех операций, к которым обычно приводит перекрестная классификация. Рассматривается случай, когда совокупность полностью известна; так что вопрос о выборочных или измерительных погрешностях отпадает. Автор надеется в скором времени опубликовать некоторые приближенные распределения для выборочных оценок предлагаемых мер и приближенные процедуры проверки гипотез. В статье показывается, что используемые опытниками меры ассоциации не должны выбираться вслепую в силу традиций или соглашений (хотя им и может быть придан определенный смысл), но должны строиться в соответствии с операционным смыслом каждой задачи. Резюме автора

670. Изучение остатков в дисперсионном анализе. Гоч (Examination of residuals in the analysis of variants. Goch D. C.), S. Afric. J. Sci., 1958, **54**, № 3, 67—69 (англ.)

Часто можно увеличить точность эксперимента со случайными блоками, учитывая ковариацию между урожаями и числами, представляющими положение делянок. Резюме автора

671. Сравнение расслоенных двухступенчатых систем выбора. Сен, Андерсон, Финкнер (A comparison of stratified two-stage sampling systems. Sen A. R., Anderson R. L., Finkner A. L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, **49**, № 267, 539—558 (англ.)

Эмпирически исследуются расслоенные двухступенчатые системы выбора для оценки итогов некоторых сельскохозяйственных данных в Северной Каролине. Для целей расслоения, выбора и оценки использовался материал сельскохозяйственной переписи 1940 г. В качестве наблюденных данных брались результаты сельско-

хозяйственной переписи 1945 г. Теория бесповторного выбора первоначальных выборочных объектов из слоя с вероятностью, пропорциональной какой-либо мере объема, была развита Сеном (Sen A. R., Further developments of the theory and application of the selection of primary sampling units, with special reference to North Carolina Agricultural Population, Ph., D. Thesis, Library, North Carolina State College).

В статье излагается применение этой теории к бесповторному выбору двух первоначальных выборочных объектов из слоя, когда один из объектов выбирается с вероятностью, пропорциональной объему, а другой — в условиях равновероятности объектов. Эти результаты сравниваются с двумя системами выбора, а именно: 1) оба объекта выбираются с вероятностью, пропорциональной объему, с возвращением; 2) выбирается только по одному первоначальному выборочному объекту из каждого слоя. Резюме автора

672. **Дисперсионный анализ для планов с раздробленными делянками. Такахаси** (On analysis of variance for the split-plot designs. Takahashi Masayuki), J. Sci. Hiroshima Univ., 1955, **A19**, № 2, 321—325 (англ.)

С формальной точки зрения изучается механизм дисперсионного анализа для планов с раздробленными делянками. Хотя в литературе для типичных примеров приводились объяснения, тем не менее возникло требование в строгом обосновании анализа применительно к общему случаю. Этому требованию отвечают некоторые теоремы, доказанные в статье. По резюме автора

673. **Ковариационный анализ в неполных блоках. Зилен** (The analysis of covariance for incomplete block designs. Zelen Marvin), Biometrics, 1957, **13**, № 3, 309—332 (англ.)

В статье, в части 2, дается краткий обзор процедуры для внутриблочного анализа ковариации применительно к любому типу экспериментального плана с p сопутствующими величинами. В части 3 разбирается вопрос о получении межблочной информации; в части 4 даются формулы для приложения к сбалансированным и частично сбалансированным (2 ассоциированных класса) неполным блокам; часть 5 разбирает более общий случай ковариационного анализа, где поправка на реакцию способа обработки зависит от дифференцированной реакции блоков; и, наконец, в части 6 приводится числовой пример, иллюстрирующий расчеты в ковариационном анализе сбалансированных неполных блоков.

Из введения автора

674. **О точечной оценке в n-факторном эксперименте. Васио** (A note on the point estimation in N-way layout. Washio Yasutoshi), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1957, **A11**, № 2, 157—165 (англ.)

Важной задачей n-факторного эксперимента является точечная оценка для нескольких параметрических функций. Однако оптимальность такой оценки (за исключением доказательства несмещенности) еще не обсуждалась.

В статье с помощью достаточной статистики делается несколько замечаний об оптимальности обычной оценки в n-факторных экспериментах. Показывается, что для модели n-факторного эксперимента с фиксированными эффектами и с не меньше чем 2 повторениями в каждой клетке, а также для модели однофакторного эксперимента со случайными эффектами и с равным числом ($r>2$) наблюдений в каждом классе обычные несмещенные оценки генерального среднего, главных эффектов, дисперсионных составляющих и т. д. являются наилучшими среди всех несмещенных оценок в том смысле, что каждая из них минимизирует свой соответственный убыток относительно любой функции убытка (например, дисперсии); отсюда все обычные процедуры оценки оправданы. Резюме автора

675. **Планы многофакторных экспериментов для исследования поверхностей реакции. Бокс, Хантер** (Multi-factor experimental designs for exploring response surfaces. Box G. E. P., Hunter J. S.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 1, 195—241 (англ.)

Пусть связь между k-переменными $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и величиной η реакции на значения переменных выражается в некоторой области k-мерного пространства соотношением $\eta=\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, где φ — полином степени d. k-мерным планом эксперимента порядка d называется множество N-точек k-мерного пространства переменных, выбранных таким образом, чтобы, используя данные эксперимента, полученные при одном измерении в каждой из выбранных точек, можно было оценить все коэффициенты многочлена φ. Для выбора практически приемлемых планов эксперимента вводится понятие дисперсионной функции плана. Основная идея работы состоит в изучении планов со «сферической» дисперсионной функцией. В этом случае оценка величины η имеет постоянную дисперсию на сферах с выбранным центром. Планы, обладающие таким свойством, называются вращаемыми. Указываются методы конкретного построения вращаемых планов эксперимента 1-го и 2-го порядка. Приводятся и другие результаты того же рода.

И. И. Гихман

676. **Определение параметров функциональной зависимости средствами факторного анализа. Таккер** (Determination of parameters of a functional relation by factor analysis. Tucker Ledyard R.), Psychometrika, 1958, **23**, № 1, 19—23 (англ.)

Рассматривается вопрос об определении средствами факторного анализа параметров функциональной зависимости между двумя случайными величинами. Если функция может быть расщеплена на сумму произведений функций от отдельных параметров на соответствующие функции от независимых величин, то с помощью факторного анализа можно найти частные значения функций от параметров и функций от независимых величин. В противном случае можно определить решения приближенно. Эти решения могут представлять важные результаты экспериментальных исследований.

Резюме автора

677. **Табличный анализ факториальных экспериментов и использование перфорированных карт. Бейнбридж, Грант, Радок** (Tabular analysis of factorial experiments and the use of punch cards. Bainbridge J. R., Grant Alison M., Radok U.), J. Amer. Statist. Assoc., 1956, **51**, № 273, 149—158 (англ.)

Авторы дают краткий обзор анализа факториальных экспериментов и обобщают табличный метод Иэйтса (Yates F., The design and analysis of factorial experiments, Harpenden: Imperial Bureau of Soil Science, 1935) для анализа планов типа 2^n.

Их анализ модифицирован на случай качественных факторов. Приводится пример проведения $(3\times2\times4)$-эксперимента. Описывается применение перфорированных карт для упрощения вычислений. A. Marton

678. **О сбалансированных планах. Рао** (A note on balanced designs. Rao V. R.), Ann. Math. Statistics, 1958, **29**, № 1, 290—294 (англ.)

Доказывается: для того чтобы общий план был сбалансированным, необходимо и достаточно, чтобы матрица исправленных нормальных уравнений для оценок эффектов обработок имела $v-1$ собственных значений, отличных от нуля. Резюме автора

679. **Модифицированные латинские квадраты. Рохас, Уайт** (The modified latin square. Rojas B., White R F.), J Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 305—317 (англ.)

Описываются и обсуждаются модифицированные латинские квадраты (полулатинские квадраты). Находятся

математические ожидания средних квадратов и через них объясняется природа смещения. Эмпирические значения смещения получены из некоторых однородных данных об урожайности пшеницы; эти значения малы. Получена процедура сравнения способов обработки.

Из резюме автора

680. Единственность треугольной схемы ассоциации. Коннор (The uniqueness of the triangular association scheme. Connor W. S.), Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 1, 262—266 (англ.)

Параметры для одного класса частично сбалансированных неполных блоков с двумя ассоциированными классами непосредственно определяются треугольной схемой ассоциации. В статье разбирается более сложный вопрос, а именно, определяют ли эти параметры треугольную схему ассоциации. Резюме автора

681. Анализ простых планов с решеткой при неравном числе повторений. Мейер (Analysis of simple lattice designs with unequal sets of replications. Meier Paul), J. Amer. Statist. Assoc., 1954, 49, № 268, 786—813 (англ.)

682. Стандартный анализ повторных экспериментов на электронной вычислительной машине. Йейтс, Хили, Липтон (Routine analysis of replicated experiments on an electronic computer. Yates F., Healy M. J. R., Lipton S.), P. Roy. Statist. Soc., 1957, B19, № 2, 234—254 (англ.)

Описывается методика анализа повторных экспериментов на электронной вычислительной машине, установленной в Ротамстеде. Главный принцип, которому следовали в конструировании машины,— это возможность выполнения на ней полного анализа, включая вычисление стандартных ошибок и остатков; причем результаты даются в форме, пригодной для непосредственной передачи экспериментаторам. Данные о ковариации и ненаблюденных делянках также вводятся в машину. Предварительные вычисления на основании грубых данных выполняются машиной с помощью стандартных приемов, присущих всем типам планов. Данные перфорируются на ленте в последовательном порядке так, как они получены от экспериментатора, т. е. без дерандомизации. Более общие типы планов, такие как случайные блоки, латинские квадраты, 3^3-планы (единое повторение) и 2^2-планы были уже запрограммированы. В качестве примера подробно описывается одна из наиболее сложных программ, а именно для 2^n-плана. Эта программа применима ко всем типам 2^2-плана, содержащего до 128 делянок, включая смешивание, оценку ошибки от взаимодействий высокого порядка, частичное повторение, факторы, имеющие по 4 и 8 уровней и 8×8 квазилатинские квадраты. Дается краткий очерк приемов управления вычислительной машиной.

Резюме автора

ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

683. Решение транспортных задач на линейное программирование методом разделения звездой. Циммерн (Résolution des programmes linéaires de transport par la méthode de séparation en étoile. Zimmern B.), Rev. rech. opérat., 1957, 1, № 3, 117—132 (франц.)

Задача о транспортировке угля от поставщиков к потребителям решается новым методом, имеющим ряд преимуществ по сравнению с симплекс-методом.

Л. А. Кораблева

684. Оптимальный критерий и процесс вычисления для квадратичного программирования. Каясима, Симада (Kayashima Kozo, Shimada Shozo), Хитати хёрон, Mag. Electr. and Mech. Engrs, 1956, 38, № 12, 87—94 (японск.)

685. Статистика и линейное программирование в нефтяной промышленности. Фелл (Statistics and linear programming in the petroleum industry. Fell Robert B.), News Engng, 1957, 29, № 4, 7—9 (англ.)

686. Время стоянки товарного вагона на сортировочной станции. Кавата (Standing time of a freight car in a marshalling yard. Kawata Tatsuo), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 247—254 (англ.)

Используя результаты теории очередей, автор приводит формулы для составляющих среднеожидаемого времени стоянки товарного вагона на сортировочной станции. Приводится также пример вычисления этого времени для различных направлений на одной из станций вблизи Токио. О. Г. Фаянс

687. Модели управления и промышленное применение линейного программирования. Чарнс, Купер (Management models and industrial applications of linear programming. Charnes A., Cooper W. W.), Manag. Sci., 1957, 4, № 1, 38—91 (англ.)

Дается беглый обзор моделей управления, связанных с использованием методов линейного программирования. В приложении, состоящем из трех частей, предлагаются правила построения оптимальных программ, приведенных в тексте в качестве примеров. Библ. 84 назв. О. Г. Фаянс

688. *G*-значения различных игр. Гай, Смит (The *G*-values of various games. Guy Richard K., Smith Cedric A. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 514—526 (англ.)

689. Разделенные игры, в которых последний игрок проигрывает. Гранди, Смит (Disjunctive games with the last player losing. Grundy P. M., Smith C. A. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, 52, № 3, 527—533 (англ.)

Излагаются некоторые результаты, полученные в терминах функции Гранди (Grundy P. M., Eureka, 1939, 2, 6—8) для конкретных позиционных выигрышно-проигрышных игр двух лиц и типа игры «ним». Терминология отличается от принятой в теории игр. И. В. Романовский

690. Численный метод определения оптимальной стратегии. Нейман (A numerical method to determine optimum strategy. Neumann John von), Naval Res. Logist. Quart., 1954, 1, № 2, 109—115 (англ.)

Дается описание нового численного метода решения матричных игр с помощью последовательных приближений и указывается, что этот метод требует значительного улучшения. В. Н. Комлева

691. Приближенные вероятности уничтожения целей малого и среднего размеров батарейным залпом, когда кумулятивное действие предполагается несущественным. Уолш (Approximate salvo kill probabilities for small and medium sized targets when cumulative damage is unimportant. Walsh John E.), J. Operations Res. Soc. Amer., 1955, 3, 69—76 (англ.)

692. О сбалансированном росте. Мут (A note on balanced growth. Muth John F.), Econometrica, 1954, 22, № 4, 493—495 (англ.)

693. Тактическая военно-воздушная игра. Фулкерсон, Джонсон (A tactical air game. Fulkerson D. R., Johnson S. M.), Operat. Res., 1957, 5, № 5, 704—712 (англ.)

Дискретная линейная модель военно-воздушной войны формулируется как многошаговая игра. Симметричный случай, в котором темпы износа одинаковы для обеих сторон, решен как для конечных, так и для бесконечных кампаний. Резюме авторов

694. Игры с частичной информацией. Скарф, Шапли (Games with partial information. Scarf H. E., Shapley L. S.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 213—229 (англ.)

Рассматриваются нулевые многоходовые игры двух лиц, в которых игроки делают ходы одновременно, а каждый ход противника игрок узнает спустя несколько ходов.

Оказывается, что вместо весьма громоздкого сведения игры к нормальной форме оптимальные стратегии можно находить, решая вспомогательные игры специального вида, которые в случае игры без запаздывания информации превращаются в обычные матричные игры.

И. В. Романовский

695. Прогресс ВВС в области планирования организации тыла. Джейкобс (Air force progress in logistics planning. Jacobs Walter), Manag. Sci., 1957, 3, № 3, 213—224 (англ.)

Сообщается о проводимых в США работах по внедрению научных методов для составления планов и программ организации тыла ВВС США и о применении в этих целях современной вычислительной техники.

И. А. Ибрагимов

696. Одна задача о замене. Пенникьюик (A problem of replacement. Pennycuick K.), Operat. Res. Quart., 1956, 7, № 1, 12—17 (англ.)

Рассматривается вопрос о наиболее эффективной замене старого (бывшего в употреблении) оборудования службы связи дивизии новым. И. А. Ибрагимов

697. Сбалансированный рост при постоянных возвращениях к масштабу. Комментарии. Нейссер (Balanced growth under constant returns to scale: some comments. Neisser Hans), Econometrica, 1954, 22, № 4, 502—503 (англ.)

698. Применение исследования операций к определению оптимальной сетки распределения пищевых продуктов. Бараш (Une étude de recherche opérationnelle sur la détermination d'un réseau optimum de distribution de produits alimentaires. Barache J.), Rev. rech. opérat., 1958, 2, № 6, 32—47 (франц.)

699. Величина информации в принятии решения. Пейдж (The value of information in decision making. Page Thornton), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 313—322 (англ.)

Основанное на проводимых в 1954 г. в Европе маневрах исследование о получении и использовании военной информации армейским командованием.

И. А. Ибрагимов

700. Об успешном использовании линейного программирования. Картерон (Du bon usage des programmes linéaires. Carteron J.), Rev. rech. opérat., 1958, 2, № 6, 23—31 (франц.)

Отмечается, что громоздкие методы численного решения задач линейного программирования нуждаются в усовершенствовании. Л. А. Кораблева

701. Оптимальные лучи для задач линейного программирования. Голдман (Optimal rays for linear programs. Goldman A. J.), Proc. 2nd Sympos. Linear Programm. Washington, 1955, vol. 2, s. a. 613—614 (англ.)

Рассматривается пара двойственных задач линейного программирования:

I. Максимизировать линейную форму CX при условиях $X \geqslant 0$, $AX \leqslant B$.

II. Минимизировать линейную форму UB при условиях $U \geqslant 0$, $UA \geqslant C$ (A — матрица $m \times n$, X и C — n-мерные векторы, U и B — m-мерные векторы).

Известно, что если обе задачи имеют решение, то $\max CX = \min UB = \mu^0$.

Оптимальным лучом для задачи I называется множество оптимальных векторов вида $X^0 + \lambda X$ (X_0 — фиксированный оптимальный вектор, X — фиксированный вектор, компоненты которого дают в сумме 1, $\lambda \geqslant 0$).

Теорема 1. Вектор X с суммой компонент 1 дает направление оптимального луча для задачи I тогда и только тогда, когда а) X — вероятностный вектор, б) $AX \leqslant 0$ и в) $CX = 0$.

Число μ называется осуществимым, если игра

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ -C & \mu \end{pmatrix}$$

имеет нулевое значение.

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны: а) задача I имеет оптимальный луч; б) некоторое $\mu > \mu^0$ осуществимо; в) любое $\mu > \mu^0$ осуществимо.

Аналогичные результаты имеют место и для задачи II.

Примечание референта. Подробное изложение этих (и некоторых других) результатов об оптимальных лучах содержится в статье Гольдмана и Таккера (РЖМат, 1958, 3996) (готовится русский перевод).

А. А. Корбут

702. Одна игра дискретного маневрирования. Дьюбинс (A discrete evasion game. Dubins L. E.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 231—255 (англ.)

Исследуется нулевая игра двух лиц, моделирующая схему военной задачи: бомбардировщик против невооруженного маневрирующего судна. В рассматриваемой схеме время и местоположения судна предполагаются дискретными, судно может маневрировать лишь в двух направлениях—ЮВ и ЮЗ и имеет постоянную по величине скорость. Бомбардировщик вооружен одной бомбой и может безошибочно попасть в любую фиксированную точку плоскости движения корабля; время полета до этой плоскости — 2 единицы времени.

Доказывается, что исследуемая игра имеет значение, определяется множество оптимальных стратегий первого игрока (судно) и доказывается, что второй игрок (бомбардировщик) не имеет оптимальных стратегий.

И. А. Ибрагимов

703. Дифференциальные игры выживания. Скарф (On differential games with survival payoff. Scarf H. E.), Ann. Math . Studies, 1957, № 39, 393—405 (англ.)

Дифференциальная игра выживания вводится как предельная при $\delta \to 0$ для следующей нулевой игры двух лиц. Когда игра „находится в точке x_1 векторного пространства", первый игрок выбирает „точку управления" y_1, а второй — z_1, и игра „переходит" в точку $x_2 = x_1 + \delta g(x_1, y_1, z_1)$. Когда игра „пересекает" в точке x границу B множества R, игра оканчивается, первый игрок получает выигрыш $b(x)$. Пусть $W_\delta^+(x)$ есть sup inf выигрыша в этой „δ-игре", начинающейся с точки x, а $W_\delta^-(x)$ — inf sup выигрыша.

Рассматривается дифференциальная игра конечной продолжительности T (так как игра может „не дойти" до границы, то выигрыш первого игрока $b(x)$ определяется в момент T в любой точке R). В этой игре

$$W_\delta^+(x) = W_\delta^-(x) = W_\delta(x, T).$$

Если $W(x, T)$ — непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \operatorname*{Val}_{(y,z)} \left[\frac{\partial W}{\partial x}, g \right]$$

для x, лежащих внутри R, и $t \geqslant 0$, удовлетворяющее граничным условиям:

1) $W(x, t) = b(x)$ для $x \in B$ и любого t,

2) $W(x, 0) = b(x)$ для $x \in R$,
—то $\lim_{n\to\infty} W_{T|n}(x_0, T) = W(x_0, T)$.

Для игр бесконечной продолжительности найдены условия, достаточные для того, чтобы при $\delta \to 0$

$$W_\delta^+(x) \to W(x), \quad W_\delta^-(x) \to W(x).$$

И. В. Романовский

704. Стохастические игры с нулевой вероятностью остановки. Джиллетт (Stochastic games with zero stop probabilities. Gillette Dean), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 179—187 (англ.)

Рассматривается обобщение стохастической игры Шапли (РЖМат, 1957, 1656) — именно, стохастические игры, в которых вероятности остановки могут равняться нулю.

Вводятся понятия s-уменьшаемого выигрыша $D_i^s(x,y)$

$$D_i^s(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-s)^n (H_i^n(x,y) - H_i^{n-1}(x,y)),$$

где $H_i^n(x, y)$ — математическое ожидание полного выигрыша 1-го игрока после n шагов игры, начинающейся с позиции i, если игроки применяют стратегии x и y, а $H_i^{-1}(x, y) \equiv 0$, и предельного среднего выигрыша

$$L_i(x,y) = \lim_{N\to\infty} \inf \frac{H_i^N(x,y)}{N}.$$

В стохастической игре всегда существует точка равновесия относительно выигрыша D_i^s, которую реализуют стационарные стратегии x^* и y^*, не зависящие от i.

Вводится понятие циклической стохастической игры — игры, в которой вероятность перейти из любого состояния в любое за некоторое общее число шагов N отлична от нуля при любом выборе стратегий.

В циклических играх и играх с полной информацией существуют точки равновесия относительно выигрыша L_i, реализуемые на стационарных стратегиях. Приводится пример игры, у которой таких точек равновесия нет.

Указанные точки равновесия для игр с полной информацией реализуются в чистых стационарных стратегиях. И. В. Романовский

705. Аналог теоремы о минимаксе для векторных функций выигрыша. Блэкуэлл (An analog of the minimax theorem for vector payoffs. Blackwell David), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 1, 1—8 (англ.)

Рассматривается игра, задаваемая матрицей $M = \| m(i,j) \|$, $1 \leqslant j \leqslant s$, $1 \leqslant i \leqslant r$, элементы которой являются распределениями вероятностей на замкнутом ограниченном выпуклом множестве X N-мерного евклидова пространства. Под стратегией первого игрока понимается последовательность функций $f = \{f_n\}, n = 0,1,2,\ldots$, где $f_n (n \geqslant 1)$ определены на системах $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in X$, и принимают значения из множества векторов $P = \{p = (p_1, \ldots, p_r), p_i \geqslant 0, \Sigma p_i = 1\}$, $f_0 \in P$. Аналогично определяется стратегия второго игрока $g\ \{g_n\}$.

Игра состоит в том, что оба игрока выбирают i и j в соответствии с распределениями f_0 и g_0; игрокам указывают точку x_1 в соответствии с распределением $m(i,j)$, после чего они снова выбирают i и j уже в соответствии с распределениями $f_1(x_1)$ и $g_1(x_1)$. Затем им указывается точка x_2 и т. д. Таким образом любая пара стратегий (f,g) определяет последовательность случайных величин $x_1, x_2, \ldots$.

Пусть S — подмножество N-мерного пространства. Можно ли с вероятностью, близкой к 1, при неограниченно возрастающем числе партий игры гарантировать, что средний выигрыш попадет во множество S или окажется произвольно близко от него?

S называется достижимым для f^* и M, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_0, что для каждого g $P\{\delta_n \geqslant \varepsilon$ для некоторого $n \geqslant N_0\} > \varepsilon$, где δ_n — расстояние точки $\sum_{i=1}^n x_i/n$ от S и $x_1, x_2, \ldots$ — значения, определяемые f^* и g.

Говорят, что S недостижимо для g^* и M, если существует $d > 0$ такое, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно так выбрать некоторое N_0, чтобы при любом f $P\{\delta_n \geqslant d$ для всех $n \geqslant N_0\} > 1 - \varepsilon$, где $x_1, x_2, \ldots$ — значения, определяемые f и g^*.

Пусть S замкнуто. Если для каждого $x \notin S$ существует такое $p(=p(\lambda)) \in P$, что гиперплоскость, проходящая через y, ближайшую к x точку S, и перпендикулярная сегменту xy, отделяет x от $R(p)$ ($R(p)$ — выпуклая оболочка s точек вида $\sum_{i=1}^r \bar{m}(i,j)\, p_i$, где $\bar{m}(i,j)$ — среднее распределения $m(i,j)$), то S достижимо для стратегии $f : f_n$, где

$$f_n = \begin{cases} p(\bar{x}_n), & \text{если } n > 0 \text{ и } \bar{x}_n = \left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_l\right) \notin S, \\ \text{произвольно}, & \text{если } n = 0 \text{ или } \bar{x}_n \in S. \end{cases}$$

Полный ответ на поставленный вопрос для выпуклого S и для $N = 1$ дают следующие две теоремы:

1. Пусть $T(q)$ есть выпуклая оболочка r точек вида $\sum_{j=1}^s q_j \bar{m}(i,j)$. Замкнутое выпуклое множество S достижимо в том и только в том случае, если оно пересекает каждое множество $T(q)$. Если оно не пересекает $T(q_0)$, то оно недостижимо для $g : g_n \equiv q_0$.

2. Пусть для $N = 1$ v и v' суть значения игр с матрицами M и M' ($M' = \| \bar{m}(i,j) \|$). При $v' \leqslant v$ замкнутое множество S достижимо в том случае, если оно пересекает интервал vv', и недостижимо в противном случае. При $v' \geqslant v$ замкнутое множество S достижимо в том случае, если оно содержит замкнутый интервал vv', и недостижимо в противном случае.

Далее приводится пример множества (для $N = 2$), которое не является ни достижимым, ни недостижимым. Вводится понятие слабой достижимости ($P\{\delta_n > \varepsilon\} < \varepsilon$) и слабой недостижимости ($P\{\delta_n < d\} < \varepsilon$) и высказывается предположение, что всякое множество либо слабо достижимо, либо слабо недостижимо.

И. Л. Канторович

706. Библиография по управлению запасами. Льюис, Ниленд, Гурари (An inventory control bibliography. Lewis R., Neeland F., Gourary M.), Naval Res. Logist. Quart., 1956, **3**, № 4, 295—303 (англ.) Библ. 115 назв.

707. Хронометраж и статистика. Суон (Time-study and statistics. Swan A. W.), Operat. Res. Quart., 1956, **7**, № 4, 110—139 (англ.)

Примеры применения статистических методов к хронометражу. И. А. Ибрагимов

708. Моделирование. Многосторонняя помощь в получении решения. Калхун, Грин (Simulation: versatile aid to decision—making. Calhoun S. Reed, Green Paul E.), Advanced Manag., 1958, **23**, № 4, 11—16 (англ.)

Исследование операций в металлургической промышленности. В. Н. Комлева

709. Тактические проблемы, включающие несколько действий. Рестрепо (Tactical problems involving several actions. Restrepo Rodrigo), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 313—335 (англ.)

Рассматриваются нулевые игры двух лиц типа дуэлей, продолжающихся в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 1$, с ограниченным количеством выстрелов и вероятностями поражения в момент t $P(t)$ и $Q(t)$ соответственно для первого и второго игроков. Игрокам известны функции $P(t)$ и $Q(t)$ и полное количество выстрелов, которые может сделать противник; однако после начала дуэли они ничего не знают о количестве промахов, сделанных противником (поэтому дуэли исследуемого типа называются бесшумными—«silent duel»). Данные игры могут служить моделью боя двух самолетов, причем вероятности $P(t)$ и $Q(t)$ характеризуют качество (например, точность огня) вооружения. Рассматривается некоторый класс игр указанного типа и для этого класса дается описание оптимальных стратегий.

И. А. Ибрагимов

710. Замечание о дифференциальных играх предписанной продолжительности. Флеминг (A note on differential games of prescribed duration. Fleming W. H.), Ann. Math. Studies, 1957, № 39, 407—412 (англ.)

Вместо равномерного дробления временного промежутка $(0,T)$ допускается произвольное дробление (см. реф. 703; обозначения, взятые оттуда, не поясняются).

Пусть y,z — точки компактных множеств некоторого евклидова пространства. Пусть $V_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, $f(x,y,z)$ — непрерывная функция, g — непрерывная векторная функция со значениями в пространстве x-ов, удовлетворяющая условию Липшица равномерно по y и z

$$| g(x,y,z) - g(x',y,z) | \leqslant K | x - x' |.$$

Рассмотрим дискретное приближение дифференциальной игры. Пусть полный выигрыш 1-го игрока равен

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_k f(x_k, y_k, z_k) + V_0(x_{N+1}).$$

Теорема 1. Для любых $T > 0$, исходной позиции x и дробления π промежутка $(0,T)$ игра имеет значение $V(x,T;\pi)$. Это значение непрерывно по x для каждых T и π и удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$V(x,T;\pi) = \operatorname*{Val}_{(y,z)} [\delta_1 f(x,y,z) + V(x + \delta_1 g(x,y,z), T - \delta_1; \pi')],$$

где для всех x при $\delta_1 = T$ $V(x, T-\delta_1; \pi') = V_1(x)$, а π' — дробление оставшейся части временного промежутка.

В дифференциальной игре выигрыш выражается соответствующим интегралом, а стратегия — функцией. Пусть $F(u)$—решение дифференциального уравнения $dF/du = KF + L$, $F(0) = 0$, где $L = \sup_{y,z} | g(x_0,y,z) |$. Пусть $P(x_0,T_0)$—множество всех (x,T), для которых $0 \leqslant T \leqslant T_0$ и $| x - x_0 | \leqslant F(T_0 - T)$.

Теорема 2. Предположим, что существует решение уравнения

$$\frac{\partial V(x,T)}{\partial T} = \operatorname*{Val}_{(y,z)} \left[f(x,y,z) + \frac{\partial V(x,T)}{\partial x} g(x,y,z) \right],$$

$$T > 0, \quad V(x,0) = V^0(x),$$

определенное и непрерывно дифференцируемое в открытой области полупространства $T \geqslant 0$, содержащей $P(x_0,T_0)$. Тогда: а) $\lim_{|\pi| \to 0} V(x,T;\pi) = V(x,T)$ равномерно в $P(x_0,T_0)$, б) для всех $(x,T) \in P(x_0,T_0)$ игра с непрерывным временем, исходной позицией x и продолжительностью T имеет значение $V(x,T)$.

И. В. Романовский

711. Стохастические игры выживания. Сакагути (Stochastic games of survival. Sakaguchi Minoru), Дэнки цусин дайгаку гакухо, Repts Univ. Electro-Communs, 1956, № 8, 55—59 (англ.; рез. японск.)

Рассматриваются стохастические игры двух игроков с конечными ресурсами, продолжающиеся до разорения одного из игроков. Применяя динамическое программирование, автор в предположении, что вероятности остаться на следующем ходе в той же позиции отличны от нуля $P_{kk} > 0$, $k = 1, \ldots, N$, доказал, что существуют оптимальные стратегии игроков и что игра окончится с вероятностью 1.

И. В. Романовский

712. Оптимальное размещение ограниченных ресурсов. Уорд (On the optimal allocation of limited resources. Ward L. E., Jr), Operat. Res., 1957, 5, № 6, 815—819 (англ.)

Проблема оптимального снабжения заказчиков формулируется следующим образом:

Проблема А. Максимизировать

$$Z = \sum_{i=1}^{i=n} g_i \left(\sum_{j=1}^{j=m} x_{ij} \right)$$

при условиях:

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant M_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m);$$

$$\sum i j x_{ij} \leqslant p\alpha;$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_{ij} \text{ кратно } \alpha \quad (j = 1, \ldots, m);$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_{ij} \leqslant A_j \quad (j = 1, \ldots, m),$$

где x_{ij}, p, α, M_{ij}, A_j — целые числа, а g_i — неубывающая и выпуклая функция.

Формулируются проблема В, являющаяся обобщением проблемы А, и проблемы С и D, последовательно линеаризующие проблему В. Указывается возможность приближенного решения поставленной задачи путем объединения чисел x_{ij} в группы $X_k = \sum x_{i_k j}$ и приводится пример такого решения.

О. Г. Фаянс

713. Применение линейного программирования к конкурентной оценке бонов. Перкус, Куинто (The application of linear programming to competitive bond bidding. Percus Jerome, Quinto Leon), Econometrica, 1956, 24, № 4, 413—428 (англ.)

Вопрос об оптимальной политике, связанной с выпуском различного рода облигаций, бонов, векселей и т. п., сводится к задачам о минимизации суммы $\sum_{i=1}^{n} p_i s_i$ при заданных $p_i > 0$ и при условиях $\sum_{i=1}^{i=n} s_i = M$, $m_i \leqslant s_i \leqslant M_i$.

В предположении, что $p_1 \leqslant p_2 \ldots \leqslant p_n$, путем алгебраического преобразования сумм доказывается, что решение задачи дается следующим выбором S_i:

$$S_1 = M_1, \ S_2 = M_2, \ldots, \ S_{t-1} = M_{t-1},$$

$$S_t = M - \sum_{i=1}^{t-1} M_i - \sum_{i=t+1}^{n} m_i,$$

$S_{t+1} = m_{t+1}$, $S_{t+r} = m_{t+r}, \ldots$, $S_n = m_n$,

где t выбирается из условия $m_t \leqslant S_s \leqslant M_t$. О. Г. Фаянс

714. Режим использования воды в упрощенных гидроэлектрических системах. Копманс (Water storage policy in a simplifed hydroelectric system. Koopmans Tjalling C.), Papers Internat. Conf. Operat. Res., Bristol, Stonebridge Press, 1957, 197—233 (англ.)

Задача сводится к минимизации выражения

$$C = \int_0^\tau \psi[\zeta(t) - \lambda\{W(t)\}v(t)]dt$$

(характеризующего стоимость производства недостающего количества энергии $s(t) = \varsigma(t) - \lambda\{W(t)\}v(t)$ с помощью тепловых электростанций) путем соответствующего выбора режима $u(t)$, $v(t)$ при условиях

$$0 \leqslant u(t),\ 0 \leqslant v(t) \leqslant \Phi \text{ для } 0 \leqslant r \leqslant \tau,$$

$$0 \leqslant W(t) = \Omega_0 + \int_0^t [\xi(t) - u(t) - v(t)]dt \leqslant \Omega$$

$$\text{для } 0 \leqslant t \leqslant \tau,\quad W(\tau) \geqslant \Omega_\tau,$$

$$\lambda\{W(t)\}v(t) \leqslant \varsigma(t),\ u(t) + v(t) \leqslant \xi(t),$$

где $\lambda\{W(t)\}$ — функция $W(t)$, удовлетворяющая условию $0 \leqslant \lambda(0) \leqslant \lambda(W) < \lambda(W') \leqslant \lambda(\Omega) = 1$

$$\text{при } 0 \leqslant W < W' \leqslant \Omega,\quad 0 \leqslant \xi(t) \leqslant \xi,\quad 0 \leqslant \varsigma(t) \leqslant \varsigma,$$

$\psi(s)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$0 = \psi(0) < \psi(s) < \psi(s') \text{ для } 0 \leqslant s < s',\ \gamma s \leqslant \psi(s),\ \gamma > 0$$

$$\text{для } 0 < s,\quad \mu\psi(s) + \mu^*\psi(s^*) \geqslant \psi(\mu s + \mu^* s^*) \text{ для } 0 < \mu = 1 - \mu^* < 1.$$

Приемами теории линейного программирования производится прямое построение решения задачи при дополнительных предположениях о регулярности функций $\xi(t)$, $\varsigma(t)$ на участке $[0, \tau]$ и о том, что $\lambda(W) \equiv 1$. При доказательстве оптимальности построенного решения автор вводит в рассмотрение несколько дополнительных функций и доказывает ряд вспомогательных неравенств. О. Г. Фаянс

715. Применение линейного программирования к проектированию оптических фильтров. Орден (Application of linear programming to optical filter design. Abstract. Orden Alex), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., 1955, 1, 185 (англ.)

Переход от умножения экспонент к сложению их логарифмов делает возможным применение линейного программирования к синтезу комбинаций фильтров для оптимальной подгонки комбинации фильтров к данной передаточной спектральной кривой.

Неизвестными, которые нужно определить, могут быть либо группировки различных возможных составляющих фильтра, которые нужно соединить, чтобы образовать фильтр, либо толщины фильтров, которые нужно расположить последовательно. Резюме автора

716. Применение линейного программирования к использованию оборудования, перемещающего материалы. Эриксон, Рандолф (An application of linear programming to the assignment of materials handling equipment. Erickson Virgil, Randolph Paul H.), J. Industr. Engng, 1957, 8, № 6, 386—388 (англ.)

Статья рекламного характера. На примере стекольного производства показано, как выгодно применять линейное программирование при решении вопросов теории перевозок. В. Н. Комлева

717. Графический метод решения в промышленности задач теории расписаний. Эйкерс (A graphical approach to production scheduling problems. Akers Sheldon B., Jr), Operat. Res., 1956, 4, № 2, 244—245 (англ.)

На конкретной производственной задаче автор показывает, что графический метод сокращает время решения задач следующего типа. 2 объекта подвергаются последовательно n операциям обработки, порядок которых фиксирован. Установить порядок прохождения объектами операций с целью минимизации полного времени обработки, если время обработки i-го объекта (i=1, 2) на j-операции (j=1, 2,..., n) известно. В. Н. Комлева

718. Оптимальное планирование двух- и трехстадийного производства с учетом подготовительного времени. Джонсон (Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included. Johnson S. M.), Naval Res. Logist. Quart., 1954, 1, № 1, 61—68 (англ.)

Строится последовательность объектов $S_{j_1}, S_{j_2}, \ldots, S_{j_n}$ минимизирующая время $F(S)$ их производства при условии, что заданы значения A_{j_k} и B_{j_k} времени, необходимого для 1-й и 2-й стадии их производства, при условии, что в каждый момент времени в каждой стадии производства может находиться не более одного объекта.

Строится также решение задачи и для частного случая трехстадийного производства. О. Г. Фаянс

719. Теория потоков как помощь в планировании и действии сети дорог Енсен (Traffic theory as an aid in the planning and operation of the road grid. Jensen Arne), Ingeniøren, 1957, C1, № 2, 48—61 (англ.)

Теория потоков, используемая в телефонии, применяется к задачам, возникшим в связи с ростом движения на дорогах. Приведены примеры зависимости интенсивности движения от времени суток, сезона, индивидуальных скоростей и т. д. Исследуется время ожидания на перекрестках. В. Н. Комлева

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

720. Метод определения вероятности ошибок и метод сравнения точности результатов измерений. (2). Тагути Гэнъити, Хёдзюнка, Standardization, 1957, 10, № 12, 927—933 (японск.)

См. РЖМат, 1958, 7021.

721. Влияние инспекционных ошибок на брак и на качество выпускаемой продукции. Джэксон (Effect of inspection errors on waste and on quality of outgoing product. Jackson J. Edward). Industry. Qualiay Control, 1957, 14, № 6, 5—8 (англ.)

Рассматривается влияние ошибок, совершаемых при инспектировании производственного материала (особенно, если инспекция носит не количественный, а качественный характер), на качество выпускаемой продукции. Рассматривается сплошная, стопроцентная инспекция, при которой отвергнутый материал полностью заменяется новым. По введению автора

722. Оценка контрольных карт с двойными линиями. Мадисон, Осл (An evalution of the Maytag Double-Line Chart. Madison R. L., Ostle B.), Industr. Quality Control, 1957, 14 № 3, 11—13 (англ.)

Предлагается модифицированная контрольная диаграмма крайних значений с четырьмя контрольными линиями.

Новая схема сравнивается с некоторыми известными схемами построения карт статистического контроля.
Б. Н. Гартштейн

723. Строгие текущие выборочные планы с несколькими уровнями. Дерман, Литтауэр, Соломон (Tightened multi-level continuous sampling plans. Derman C., Littauer S., Solomon H.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 395—404 (англ.)

Описывается новое обобщение текущей проверки качества продукции (см., например, Dodge H. F., Ann. Math Statistics, 1943, 14, 264—279; РЖМат, 1957, 3356 и др). Пусть $g > 1$, i, r— натуральные числа. Принято говорить, что проверка находится на k-м уровне, если каждое g^k-е изделие подвергалось контролю; для $k = 0$ это значит, что имеет место сплошной контроль. Проверка начинается со сплошного контроля; пусть она только что перешла на j-й уровень, если после этого все i последовательно выбранные изделия годны, то проверка перейдет на $(j+1)$-й уровень. В противном случае при нахождении первого дефектного изделия проверка перейдет на $(j-r)$-й уровень (при $j > r$), или наступает опять сплошной контроль (при $j \leqslant r$). Авторы называют этот план MLP-$r \times 1$ планом. Рассматривается также так называемый MLP-T-план, который отличается от первого тем, что при нахождении негодного изделия производится сплошной контроль.

Доказывается, что верхняя грань средней доли дефектных изделий после контроля равна

$$1-\left(\frac{f-f^{i+1}}{1-f^{i+1}}\right)^{1/i}$$ в случае MLP-$r \times 1$-плана и $1-f^{1/i}$

в случае MLP-T-плана, где $f = 1/g$.
M. Jiřina

724. Технические данные и статистические методы при анализе производства и изменения технологии (потребление горючего при перевозках грузов). Смит (Engineering data and statistical techniques in the analysis of production and technological change. fuel requirements of the trucking industry. Smith Vernon L.), Econometrica, 1957, 25, № 2, 281—301 (англ.)

Используя эмпирическую формулу для выражения потребности трактора в горючем от груза, длины пути и рельефа и предполагая, что длина перевозки и величина груза имеют совместное логарифмически-нормальное распределение, автор находит математическое ожидание расхода горючего за одну перевозку.
С. С. Кислицын

725. Время и движение. Простой. Случай разных машин и рабочих. Феррер-Мартин (Tiempos y movimientos. Inactividades. Caso de máquinas y trabajadores distintos. Ferrer Martin Sebastian), Bol. estadist., 1956, 16, Suppl., № 8, 33—45 (исп.)

Описывается статистический метод определения времени простоя машин или времени незанятости рабочих в случае, когда имеется несколько различных типов машин или несколько категорий рабочих различных специальностей (случай одинаковых машин или рабочих рассматривался автором ранее). Выводятся элементарные формулы для нахождения оценки времени простоя и оценки надежности полученной величины (дисперсия, доверительные интервалы), для нахождения размера выборки, необходимой для получения данной степени надежности, а также размера выборки для получения результата с наименьшей дисперсией при заданной стоимости контроля и для получения минимальной стоимости контроля при заданной дисперсии оценки времени простоя.
М. Ф. Бокштейн

726. Закон Пуассона и биномиальный закон в исчислении гарантийных запасов. Циммёрн (Loi de Poisson et loi binomiale dans le calcul des stocs de sécurité. Zimmern B.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 3, 99—110 (франц.)

Работа посвящена описанию некоторых типов торговых отношений, к которым применимы закон Пуассона и биномиальный закон. В частности, указывается, что закон Пуассона применим в случае обширной клиентуры при случайных торговых отношениях с каждым из клиентов, а биномиальный закон применим в случае оптовой торговли с ограниченной клиентурой при регулярных контрактных отношениях с каждым из клиентов.
Б. Н. Гартштейн

727. Улучшение продукта и производственного процесса путем применения статистических приемов в инженерном деле. Картер (Product and process improvement through statistical engineering. Carter C. W. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1957, № A—221, 8 pp., ill.) (англ.)

Изучаются основные принципы использования статистических приемов в инженерном деле и показывается применимость некоторых из них для улучшения продукта и производственного процесса. Делается вывод о том, что статистические приемы могут значительно увеличить производительность труда инженера.
По резюме автора

728. Воспроизводимость результатов измерений степени полимеризации в куприэтилендиамине и вздутия на штапельной вискозе. Статистическая интерпретация результатов. Флёри, Рейтцер (La reproductibilité des mesures de degré de polymérisation dans la cuprièthylenediamine et de gonflement sur la fibrane viscose. Interprétation statistique des résultats. Fleury J. P., Reitzer Th.), Rev. statist. appl., 1957, 5, № 2, 33—44 (франц.)

В текущей практике контроля качества штапельной вискозы часто требуется сравнить два или более результата измерения степени полимеризации или вздутия с целью контролирования поставок вискозы и обнаружения случайной испорченности в материи; возникает необходимость в оценке часто очень незначительных различий в полученных измерениях.

Каждое измерение степени полимеризации содержит некоторую погрешность, происходящую от 1) дежирования, 2) раствора куприэтилендиамина, 3) вискозиметрического измерения, 4) нерепрезентативности пробы материи.

Измерение степени полимеризации осуществляется на 50 *мг* вискозы, и, несмотря на предпринятые предосторожности, это количество часто не представляет среднюю пробу. С другой стороны, несмотря на применение стандартных операций, в измерениях, сделанных в разные дни, может иметь место незначительная вариация, которая, однако, приводит к разным решениям. В связи с изложенным, по мнению авторов, возникает необходимость в систематическом изучении воспроизводимости этих измерений. В первой части статьи авторы определяют верхнюю границу погрешности, совершаемой при измерении степени полимеризации и весового вздутия в предположении, что эта ошибка учитывает все изменения, могущие произойти от одного измерения к другому. Вторая часть посвящена статистической интерпретации результатов. Резюме авторов

729. Изучение рассеяния горючих жидкостей. Томас (Étude de la dispersion des combustibles liquides. Thomas Ralph E.), Chauff. mazout, 1957, № 6, 20—23 (франц.)

Указывается связь между функциями распределения и моментами линейного размера капель жидкости и объема или площади поверхности капель. Приведены встречающиеся на практике плотности распределения размеров капель.
С. С. Кислицын

730. Консультационная проблема распределения по должностям. Уорд (The counseling assignment problem. Ward Joe H., Jr), Psychometrika, 1958, 23, № 1, 55—65 (англ.)

Рассматривается индекс распределения, обеспечивающий информацию о каждом возможном назначении на должность при данной классификации персонала. Индекс легко вычисляется машинными методами и может быть использован консультантами, которым требуется наметить наилучшее распределение персонала по должностям. Использование индекса распределения обеспечивает подходящее приближение к оптимальным решениям, получаемым другими методами. Резюме автора

731. Вероятность и статистика в психометрических исследованиях; анализ вопросов и классификационная техника. Соломон (Probability and statistics in psychometric research: Item analysis and classification techniques. Solomon Herbert), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 5. Berkeley-Los Angeles, 1956, 169—184 (англ.)

Рассматриваются понятия, относящиеся к психометрическим тестам (испытаниям): способность ответа на вопрос (предполагаемая распределенной нормально), трудность вопросов и корреляция между вопросами, а также проблемы группировки результатов психометрических наблюдений (отнесение наблюдений к исходным популяциям и выделение обособленных групп наблюдений). А. А. Конюс

732. Статистическое изучение черепных контуров, рассматриваемых в качестве случайных кривых. Лоран-Дюамель (Étude statistique de contours craniens considérés comme courbes aléatoires. Laurent—Duhamel Marie-Jeanne. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris. **2**, 1953, № 3, 27—54 (франц.)

С помощью инструментов, сконструированных модельерами, определяются в полярных координатах уравнения кривых пересечения стандартной горизонтальной плоскости с внешними очертаниями голов 100 мужчин и 100 черепов из музейной коллекции. В графической форме автор дает набор результатов и полностью табулирует первые 24 коэффициента Фурье для каждого из 200 контуров (в полярных координатах $\rho=f(\omega)$). Протабулировано несколько дескриптивных статистик, и весь материал дискутируется с точки зрения недавней работы Фреше (Fréchet M., Généralités sur les probabilités. Eléments aléatoires, 2e ed., Paris, Gauthier Villars, 1950). O. Kendall

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 887.

733. Исследование взаимодействия между гармоническими способами обработки. Палмер (An examination of the interaction of harmonic treatments. Palmer J.), J. Agric. Engng Res., 1958, **3**, № 1, 47—56 (англ.; рез. франц., нем., исп.)

Дается математическое представление гармонических способов обработки зерновых культур, таких как продольное прореживание и точный подсев, и анализируется взаимодействие двух и трех таких обработок. Получены уравнения, определяющие способы обработки так, что результаты их применения постоянны и независимы от фазовых соотношений между отдельными обработками. Рассматривается продольное прореживание случайных ростков и устанавливается, что общепринятые обработки прореживанием вполне отвечают теоретическим требованиям. Затем рассматривается комбинированный эффект продольного прореживания и точного подсева и показывается, что, для того чтобы промежутки между зонами выживаемости были постоянны, гармонические характеристики высевающей и разрежающей машин должны быть подобраны определенным образом. Резюме автора

734. Чередование очередей и контроль за уличным движением на перекрестках. Кастольди (Queue alternance and traffic flow control at a cross-road. Castoldi Luigi), Boll. Centro ricerca operat., 1957, **№ 5-6**, 1—13 (англ.)

Изучается явление, связанное с уличным движением, а именно чередование красных и зеленых сигналов светофора, вызываемое остановками транспорта и пешеходов из-за движения в перпендикулярном направлении. Сначала явление изучается при регулярном чередовании очередей, затем — в условиях контролируемого движения. Выводятся практические следствия о возможных условиях возникновения заторов (подходяще определенных) в уличном движении. Резюме автора

735. Банкротства предприятий; другой пример анализа данных об авариях. Ломакс (Business failures: another example of the analysis of failure data. Lomax K. S.), J. Amer. Statist Assoc., 1954, **49**, № 268, 847—852 (англ.)

Разработанный Девисом (Davis D. J., J. Amer. Statist Assoc., 1952, **47**, 113—150) анализ данных об авариях основывается на существенно постоянных или возрастающих условных вероятностях аварии. Однако следует ожидать, что для банкротства предприятий условные вероятности монотонно убывают. Это подтверждается анализом данных о банкротстве некоторых четырех типов предприятий в Нью-Йорке с 1844 по 1926 г. Условные вероятности банкротства для этих четырех серий предприятий хорошо описываются как показательными, так и гиперболическими функциями. Резюме автора

736 О формулах ежегодных рент. Осборн (A consideration of annuity formulas. Osborn Roger), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 10, 708—709 (англ.)

737. Страхование годовой ренты одного или двух лиц с передачей смешанного страхования на конечный срок. II. Сантобони (Le assicurazioni di annualità su una o due teste, con riferimento all' assicurazione mistą e al termine fisso. II. Riserve matematiche. Santoboni Luigi), Archimede, 1957, **9**, № 1, 20—25 (итал.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 4037.

738. Расчет фонда и анализ его построения. Расчетная система для личного и пенсионного страхования. Сёдерстрём (Valuation of the fund and analysis of its development. A computation system for life and pension assurance. Söderström Lars-Gunnar), Skand. aktuarietidskr., 1957, № 1—2, 11—17 (англ.)

739. Проблема организации распродажи предварительных заказов на авиарейсы. Бекман (Decision and team problems in airline reservations. Beckmann Martin J.), Econometrica, 1958, **26**, № 1, 134—145 (англ.)

Системы предварительных заказов, целью которых является распродажа через многочисленную агентуру некоторого количества объектов, подверженных скорому аннулированию, есть поучительный пример, когда требуется принять определенное решение о системе распродажи и организации связи между отдельными группами, ведающими ее осуществлением. В разделе 2 обсуждаются оптимальные пределы распродажи заказов на авиалинии, когда известны следующие распределения вероятностей: 1) числа заказов, аннулированных в последний момент, 2) числа возможных пассажиров без предварительно заказанных мест, оказавшихся в аэропорту ко времени отлета и 3) числа пассажиров, не явившихся ко времени отлета. Для одного примера были произведены численные расчеты, которые, как было установлено, подходяще согласуются с указанными распределениями (статистический анализ этих распределений сюда не включен). Раздел 3 описывает существующие системы предварительных заказов на авиалиниях. В разделе 4 обсуждается выгодность этих систем с точки зрения предельной распродажи. В разделе 5 рассматривается обоснованность принятых в этих системах правил связи. На упрощенной модели изучаются условия, при которых децентрализованная система квот так же

эффективна, как и преобладающая централизованная система «продажи и регистрации». Резюме автора

740. **Обнаружение индивидуальных различий в подверженности несчастным случаям. Фицпатрик** (The detection of individual differences in accident susceptibility. Fitzpatrick Robert), Bionmetrics, 1958, **14**, № 1, 50—68 (англ.)

Большинство распределений несчастных случаев очень напоминают пуассоновское или биномиальное. Изучение одномерных распределений несчастных случаев почти неизбежно приводит к неубедительным результатам. Положение мало улучшается при использовании двумерных методов (наблюденные данные о несчастных случаях распределяются по двум временным периодам). Двумерные пуассоновское и отрицательно биноминальное распределения обладают всеми главными недостатками своих одномерных аналогов. Корреляционные методы предполагают пуассоновскую модель и вместе с тем противоречат ей. Заключения, к которым приводит изучение несчастных случаев, неясны и противоречивы. Исследование временных периодов между последовательными несчастными случаями дало несколько обещающих, но еще предварительных результатов. Логические предпосылки этого рода исследований еще остаются неопределенными. Из резюме автора

741. **Операционное исследование в планировании и конструировании больниц. Бейли** (Operational research in hospital planning and design. Bailey Norman T. J.), Operat. Res. Quart., 1957, **8**, № 3, 149—157 (англ.)

742. **Введение в методологию операционного исследования. Дор** (Introduction à la méthodologie de la recherche opérationnelle. Dor L.), Rev. sci. écon., 1958, **33**, № 113, 33—44 (франц.)

743. **Теория транспортного движения и исследование операций. Малькор** (Théorie de la circulation routière et recherche opérationelle. Malcor R.), Travaux, 1958, **42**, № 280, 137—142 (франц.; рез. англ., исп.)

Решение проблемы обеспечения многопутных пересечений контролирующими движение установками, отвечающими условиям движения на пересекающихся дорогах, требует применения методов, подобных методам в исследовании операции. Эти методы используют математическую статистику, теорию очередей и логику. Автор производит логический анализ подразделения циклов контроля за движением на фазы для четырехпутного пересечения, затем рассматривает трехпутное пересечение. Пересечения четырех путей, в которых движение происходит в одном направлении, и сокращение четырехфазного цикла до трехфазного рассматриваются как специальные случаи. Обсуждается частичная аналогия между логическим анализом многофазного пересечения с одним уровнем и топологическим анализом однофазных пересечений с несколькими уровнями движения.

Резюме автора

744. **Исследование операций. Джонсон** (Operations research. Johnson Petè), Purdue Engr, 1958, **53**, № 5, 24—25, 60, 64, 68, 70 (англ.)

745. **Исследование операций. Леруа** (la recherche opérationnelle. Leroy A.), Rev. statist. appliquée, 1955, **3**, № 2, 101—108 (франц.)

746. **Теория вероятностей и квантовая механика. Юльмо** (Théorie des probabilités et mécanique quantique. Ullmo J.), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, **6**, № 3, 251—258 (франц.)

747. **Некоторые эксперименты, связанные с предсказанием числа солнечных пятен. Моран** (Some experiments on the prediction of sunspot numbers. Moran P. A. P.), Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 1, 112—117 (англ.)

Рассматриваются различные методы предсказания ежегодного числа солнечных пятен. Линейная и криволинейная регрессии, основанные на ранее наблюденных значениях, дают очень неточные предсказания и поэтому полуэмпирические методы, по-видимому, более удобны. Представление последовательности ежегодных чисел солнечных пятен в виде авторегрессионного процесса неудовлетворительно. Резюме автора

748. **Распределение гетерогенности в результате инбридинга. Беннетт** (The distribution of heterogeneity upon inbreeding. Bennett J. H.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 1, 88—99 (англ.)

Показывается, как можно вычислить дисперсию схематической длины зародышевой плазмы, гетерогенной после данного числа инбридингов. В нескольких системах инбридинга для подсчета дисперсии после большого числа поколений используются матричные методы. Распределение частоты схематической длины, гетерогенной после многих поколений, строится с помощью модифицированной функции Бесселя 1-го рода; вероятность полной гомогенности выражается через начальную конденсацию. Сравнение этих распределений для родственного инбридинга и инбридинга по схеме родитель — потомок (две системы инбридинга, которые для одного генетического локуса обычно дают одинаковую скорость приближения к гомогенности) открывает интересные различия в вероятностных утверждениях, которые можно сделать в этих двух случаях.

Резюме автора

749. **Проблема стоимости группового выборочного контроля. Санчес-Креспо-Родригес** (El problema del coste en el muestreo por conglomerados. Sanchez-Crespo Rodriguez Jose Luis), Bol. estadíst., 1956, **16**, Suppl., № 8, 47—51 (исп.)

Рассматривается следующая задача. Нужно провести обследование жителей определенного округа, для чего производится случайная выборка некоторого числа участков, составляющих этот округ, которые и обследуются. Требуется определить стоимость C такого обследования. Исследуя различные виды расходов, в частности расходы на передвижение между отобранными для обследования участками, автор выводит формулу $C = c + C_0\sqrt{m} + C_1 m + C_2 m\bar{n}$ (в работе приведена с опечатками), где m — число выбранных участков, $\bar{n}$ — среднее значение числа жителей одного участка, а c, C_0, C_1, C_2 — постоянные числа. М. Ф. Бокштейн

750. **Выборочный метод для оценки улова морской рыбы в Индии. Сукхатме, Пансе, Састри** (Sampling technique for estimating the catch of sea fish in India. Sukhatme P. V., Panse V. G., Sastry K. V. R.), Biometrics, 1958, **14**, № 1, 78—96 (англ.)

751. **Некоторые соображения по поводу потенциала бедствий. Дил** (Some considerations of disaster potential. Diehl Walter S.), J. Wash. Acad. Sci., 1957, **47**, № 12, 398—404 (англ.)

См. также: 629, 887, 904

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

752. **Об использовании операторов проектирования в преподавании векторной геометрии. Паке** (Sur l'utilisation des opérateurs de projections dans l'enseignement de la géométrie vectorielle. Pâquet P. V.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 11, 898—919 (франц.)

Скалярным произведением $(u_* \cdot v)$ ковектора или дублета U_*, определяемого упорядоченной парой плоскостей π, π' и вектора v, автор называет отношение $k = \frac{v}{v'}$, где v' — вектор, определяемый пересечением плоскостей π, π' с направлением прямой, параллельной v. Вводится оператор проектирования произвольного вектора v на направление вектора a параллельно направлению v плоскости π, именно диодный оператор (ab_*), где $b_* = \pi\pi'$, а π, π' — плоскости, параллельные данной плоскости, проходящие через начало и конец вектора a. Тогда $v_a = a(b_* \cdot v) = (ab_*)v$. Если e_i — базисные векторы, совпадающие с тремя ребрами параллелепипеда, а e^i_* — ковекторы, определяемые парами его граней, то $e^i_* e_j = \delta^i_j$, $v = e_i(e^i_* v) = e_i v^i$, $u_* = (u_* e_i)e^i_* = u_i e^i_*$ и $(u_* \cdot v) = u_i v^i$.

Введенные понятия применяются для разложения любого линейного оператора на сумму трех операторов проектирования. Я. П. Бланк

753. Наглядные средства в современной алгебре. Доннеллан (Visual aids in modern algebra. Donnellan T.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 241—253 (англ.)

В статье приводится ряд диаграмм, иллюстрирующих построение некоторых классов эквивалентности, их упорядочение и операции над ними. Целые числа, рассматриваемые как классы эквивалентных между собой пар натуральных чисел, подчиненных условию: $(a, b) = (c, d)$, когда $a + d = c + b$, изображаются с помощью квадратной сетки, вершины которой помечаются парами натуральных чисел. При этом пары, входящие в один класс, представлены точками, лежащими на одной диагональной прямой, которая и рассматривается как изображение соответствующего целого числа. Все множество целых чисел изображается параллельным пучком диагоналей, пересечение которого горизонтальной прямой упорядочивает это множество. Сложение и умножение целых чисел производится графически либо путем операций над точками — представителями классов, либо непосредственно над прямыми. Диаграмма позволяет наглядно убедиться в выполнении постулатов, которым удовлетворяет кольцо целых чисел.

При построении диаграммы, изображающей рациональные числа, рассматриваемые как классы эквивалентных пар целых чисел (a, b), $b \neq 0$, подчиненных условию: $(a, b) = (c, d)$, когда $ad = bc$, вершины квадратной сетки помечаются парами целых чисел, причем вертикаль $b = 0$ остается незаполненной. Эквивалентные пары лежат на одной и той же прямой, проходящей через начало координат; пучок этих прямых служит изображением множества рациональных чисел. Пересечение этого пучка вертикальной прямой упорядочивает множество. Сложение и умножение рациональных чисел производится на диаграмме путем операций под прямыми. Диаграмма наглядно показывает, что рациональные числа образуют поле.

Приводится диаграмма, изображающая операции над иррациональностями вида $a + b\sqrt{2}$, которые рассматриваются как классы полиномов над R, сравнимых по функциональному модулю $h = x^2 - 2$. Сложение и умножение этих классов определяются с помощью соответствующих операций над вычетами. На диаграмме число $a + b\sqrt{2}$ изображается точкой $(a; b)$. Показано построение суммы и произведения. Рассматривается также изображение этих иррациональностей пучком параллельных прямых.

В диаграмме, иллюстрирующей сравнение $a \equiv b \pmod 5$, числа изображаются точками, лежащими на двойной спирали $r = \frac{5|\theta|}{2\pi}$, при этом классы сравнимых чисел располагаются на 5 лучах, исходящих из начала под углами $\frac{2k\pi}{5}$ $(k = 0, 1, 2, 4)$. Сложение и умножение классов сравнения производятся путем операций над лучами.

Примечание референта. В статье перепутаны диаграммы: следует поменять местами фиг. 2 и фиг. 8. А.Г. Школьник

754. Занимательная геометрия геодезических. Тебо (Recreational geometry geodesics. Thébault Victor), Scripta math., 1955, **21**, № 2-3, 146—158 (англ.)

Рассматриваются некоторые из популярных и интересных задач, связанных с геодезическими линиями (ломаными и криволинейными) на плоскости и простейших поверхностях элементарной геометрии. В частности, обсуждаются задача биллиардного стола, отдельные вопросы геодезических линий на призматической, конусообразной поверхностях и известная задача о трех образах. Г. И. Жотиков

755. Геометрия расстояний. Сейдел (Afstandsmeetkunde. Seidel J. J.), Euclides (Nederl.), 1958, **33**, № 6, 161—165 (гол.)

Популярная статья (воспроизводящая лекцию, прочитанную автором на каникулярных курсах для учителей математики) о предмете и некоторых результатах геометрии расстояний (теории метрических пространств). В библиографической части статьи перечислены относящиеся к ее теме книги Булигана (Bouligand G.), Пока (Pauc C.), Менгера (Menger K.), Блументаля (Blumenthal L. M.), Буземана (Busemann H.), диссертации трех голландских авторов и особенно работы голландского математика Хантьеса (Haantjes J.) по инфинитезимальной геометрии в метрических пространствах. Приведены примеры приложения методов геометрии расстояний к некоторым вопросам n-мерной евклидовой геометрии (зависимости между взаимными расстояниями k точек) и дифференциальной геометрии (кривизна Хантьеса).

Новых результатов статья не содержит.

Ю. М. Гайдук

756. Ортогональный тетраэдр. Мандан (Orthogonal tetrahedron. Mandan Ram), Math Mag., 1958, **31**, № 3, 127—132 (англ.)

Ортогональным (ортоцентрическим) тетраэдром называется тетраэдр: а) все 4 высоты которого пересекаются в одной точке — ортоцентре, б) любые противоположные ребра его взаимно ортогональны. Дается другое определение ортогонального тетраэдра как тетраэдра, у которого в) общие перпендикуляры 3 пар противоположных ребер пересекаются в одной точке. Устанавливается эквивалентность определений а), б), в). Доказательства проводятся методами проективной геометрии: перпендикулярность прямых определена как сопряженность их несобственных следов относительно абсолюта на несобственной плоскости. 4 грани тетраэдра определяют на несобственной плоскости полный четырехсторонник q, вершины его являются следами 6 ребер тетраэдра, а диагональный треугольник его выбирается в качестве координатного треугольника. Устанавливаются алгебраические соотношения между следами общих перпендикуляров трех пар противоположных ребер тетраэдра. Их геометрическое истолкование и приводит к установлению эквивалентности определений а), б), в).

С. А. Пясецкий

757. Учение об угле и его измерении. Фер (On teaching angle and angle measure. Fehr Howard F.), Math. Teacher, 1957, **50**, № 8, 551—556 (англ.)

Статья методического характера. А. И. Фетисов

758. Геометрия прямоугольных матриц и ее применение к вещественной проективной и неевклидовой геометрии. Хуа Ло-гэн, Розенфельд Б. А., Изв. высш. учебн. заведений, Математика, 1957, № 1, 233—247

Каждой m-мерной плоскости в n-мерном вещественном проективном пространстве P_n, определяемой линейно независимыми точками x_a с проективными координатами $x_a{}^i$ $(i, j, \ldots = 0, 1, \ldots, n;$ $a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, m;$ $u, v, \ldots = m+1, \ldots, n)$, не пересекающейся с координатной плоскостью $e_{m+1} \ldots e_n$, ставится в соответствие прямоугольная матрица $X = (x_a{}^u)(x_a{}^b)^{-1}$. Элементы $x_a{}^u$ матрицы X называются матричными координатами плоскости. Матричные координаты не зависят от выбора точек x_a и определяются также тангенциальными координатами $p_i{}^u$ линейно независимых гиперплоскостей p^u, проходящих через ту же плоскость, соотношением $X = -(p_v{}^u)^{-1}(p_a{}^u)$. Коллинеации пространства P_n в матричных координатах выражаются дробно-линейными преобразованиями первого рода

$$'X = (C + DX)(A + BX)^{-1} = (XM - N)^{-1}(-XK + L),$$

а корреляции — дробно-линейными преобразованиями второго рода

$$'X = (A^T + X^T B^T)^{-1}(C^T + X^T D^T) = (-K^T X^T + L^T) \times (M^T X^T - N^T)^{-1}$$

(X^T — матрица, полученная транспонированием матрицы X). Необходимым и достаточным условием того, что размерность пересечения плоскостей, определяемых матрицами X и Y, равна d, состоит в равенстве ранга матрицы $X - Y$ числу $m - d$. Необходимым и достаточным условием того, что размерность плоскости, порожденной теми же плоскостями, равна s, состоит в равенстве ранга матрицы $X - Y$ числу $s - m$. Если определять $(n - m - 1)$-мерные плоскости, пространства P_n матрицами $P = (p_b{}^a)^{-1}(p_u{}^a)$, двойные отношения точек пересечения m-мерных плоскостей, определяемых матрицами X и Y, и $(n - m - 1)$-мерных плоскостей, определяемых матрицами P и Q, с их трансверсалями, являются собственными числами матрицы

$$W = (I + QX)(I + PX)^{-1}(I + PY)(I + QY)^{-1},$$

которую можно рассматривать как двойное отношение матриц X, Y, P, Q. Матрица W определена с точностью до преобразования $W \to AWA^{-1}$. Матрицы X можно рассматривать так же, как аффинные координаты проективной прямой над прямоугольными матрицами, точки которой, таким образом, допускают вещественную интерпретацию в виде плоскостей пространства P_n. Аналогичные задачи решаются для неевклидовых пространств S_n и $'S_n$, полученных метризацией пространства P_n. Находятся некоторые применения к дифференциальной геометрии семейств m-мерных плоскостей и, в частности, к теории конгруэнций и антиконгруэнций этих плоскостей. М. А. Джавадов

759. Геометрия прямоугольных матриц и ее применение к вещественной проективной и неевклидовой геометрии. Хуа Ло-гэн, Розенфельд Б. А., Чжунго кэсюэ, Scientia sinica, 1957, **6**, № 6, 995—1011 (русск.); Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, **8**, № 1, 132—145 (кит.; рез. русск.)

См. реф. 758.

760. Неевклидовы геометрии. (Geometrie non-euclidee), Civiltà macchine, 1958, **6**, № 1, 67—78, 93, 94 (итал.; рез. англ.)

Первая часть воспроизводит §§ 1—5, 11—13, 15—17, 46—48 из книги Бонола, Неевклидова геометрия, 1906. Вторая часть представляет выдержки из «Пангеометрии» Лобачевского. Третья часть — перевод мемуара Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Я. П. Бланк

761. Теоретико-групповая интерпретация площади в элементарной геометрии. Эст (A group theoretic interpretation of area in the elementary geometries. Est W. T. van), Simon Stevin, 1958, **32**, № 1, 29—38 (англ.)

Дается теоретико-групповая интерпретация понятия площади для двумерной гиперболической, евклидовой и сферической геометрии. Статья воспроизводит один из докладов серии «Элементарная математика с точки зрения высшей» (Амстердам, 1954). Л. П. Гокиели

762. Краткое изложение геометрического исчисления с приложениями. Часть 3. Алгебра точек. Берни (Brevi cenni di calcolo geometrico con applicazioni. Parte 3. L'algebra dei punti. Berni Arminio), Ingegneria mecc., 1957, **6**, № 8, 17—22 (итал.)

Автор продолжает исследования в плане своих заметок (РЖМат, 1958, 4058, 4059). Вводятся понятия скалярных произведений векторов и бивекторов, производных и интегралов точек и векторов, градиента, выводятся формулы для длин дуг, площадей и объемов. Э. Г. Позняк

763 К. Геометрия. Перепелкина А. Н. (Geometrie. Perepiolchina A. N. Trad. din limba rusa. Bucuresti, Univ. «Victor Babes» Cluj, 1957, 318 p., il., 10 lei.— Litogr.), Bibliogr. RPR, 1957, **6**, № 18, 633 (рум.)

764 К. Основы дифференциальной геометрии кривых и поверхностей. Кепр (Základy diferenciální geometrie křivek a ploch.*). Kepr Bořivoj. Praha, SNTL, 1955, 243, [1] s., il., 17,30 Kčs), *) (pro posluchače zeměměřičskeho inženýrství). Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 30, 755 (чешск.)

Этот учебник для втузов содержит основание метрической дифференциальной геометрии кривых и поверхностей в трехмерном пространстве. Первая часть знакомит читателя с элементарными (в дальнейшем использованными) понятиями векторного исчисления. Вторая (третья) часть посвящена основаниям дифференциальной геометрии кривых (поверхностей). Текст дополнен задачами и упражнениями. Z. Vančura

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

765. Простое доказательство неравенства Эрдёша — Морделла для треугольников. Казаринов (A simple proof of the Erdös — Mordell inequality for triangles. Kazarinoff Donat K.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 97—98 (англ.)

В заметке дается доказательство следующей теоремы (Эрдёша — Морделла): Для любого треугольника и любой точки P, расположенной или внутри треугольника, или на одной из его сторон, сумма S_1 расстояний от точки P до сторон и сумма S_2 расстояний от точки P до вершин треугольника удовлетворяют неравенству

$$S_2 \geqslant 2S_1.$$

Равенство имеет место только в том случае, когда треугольник — равносторонний и точка P совпадает с центром тяжести треугольника.

В доказательстве используется предложение Паппа: Пусть ABC — произвольный треугольник и $ABDE$ и $ACFG$ — два параллелограмма, расположенные так, что или оба целиком лежат вне треугольника, или ни один не лежит целиком вне его. Пусть H — точка пересечения продолжения сторон DE и FG и $BCKZ$ — параллелограмм, сторона которого CK геометрически равна вектору HA. Тогда сумма площадей $ABDE$ и $ACFG$ равна площади $BCKZ$. В. А. Яблоков

766. Распространение неравенства Д. К. Казаринова, установленного для треугольника, на случай тетраэд-

ра. **Казаринов** (D. K. Kazarinoff's inequality for tetrahedra. Kazarinoff Nicholas D.), Michigan Math. J., 1957, **4**, № 2, 99—104 (англ.)

Автор обобщает на случай пространства неравенство Эрдёша—Морделла, данное для треугольника (реф. 765). Пусть S — тетраэдр, P — внутренняя его точка. Пусть расстояния от P до вершин и до граней тетраэдра S обозначены соответственно через R_i и r_i. Тогда имеет место следующая теорема: Для любого тетраэдра, у которого центр описанного шара не является внешней точкой, имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\Sigma R_i}{\Sigma r_i} \geqslant 2\sqrt{2}$$

и $2\sqrt{2}$ есть наименьший предел.

При доказательстве этой теоремы используется следующее обобщение предложения Паппа, указанного в заметке Д. К. Казаринова (реф. 765).

Строятся три треугольные призмы, имеющие общее боковое ребро и своими основаниями — три грани тетраэдра и расположенные так, что или все лежат вне тетраэдра, или ни одна не лежит целиком вне его. На оставшейся грани строим четвертую призму, у которой боковые ребра представляют собой трансляции общего бокового ребра первых трех призм. Тогда сумма объемов первых трех призм равна объему четвертой призмы.

В конце статьи имеется примечание, что обобщение неравенства на случай n-мерного евклидова пространства, т. е запись его в форме $\Sigma R_i \geqslant 2^{\frac{n}{2}} \Sigma r_i$, не имеет места.

В. А. Яблоков

767. О теореме Эйлера. Кошницэ (Asupra teoremei lui Euler. Cosnita C.), Gaz. mat. si fiz., 1957, **B8**, № 5, 249—252 (рум.)

Речь идет о теореме: В выпуклом четырехугольнике сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей плюс учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.

Используется следующая терминология: называется четырехточечником конфигурация четырех точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой; четырехточечник может быть плоским или пространственным в зависимости от того, лежат или не лежат четыре данные точки в одной плоскости; четыре точки, определяющие четырехточечник, называются его вершинами, а прямые, соединяющие по две вершины,— его сторонами; прямая, соединяющая две вершины, и прямая, соединяющая две другие вершины,— противоположные стороны четырехточечника.

Доказываются теоремы: а) Сумма квадратов четырех последовательных сторон плоского или пространственного четырехточечника равна сумме квадратов двух других сторон плюс учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины этих двух сторон;

б) В плоском или пространственном четырехточечнике сумма квадратов всех его шести сторон равна учетверенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон;

в) В плоском или пространственном четырехточечнике сумма квадратов двух противоположных сторон плюс удвоенный квадрат отрезка, соединяющего середины этих сторон,— одна и та же для всех пар противоположных сторон.

Эти теоремы применяются в том частном случае, когда противоположные стороны четырехточечника соответственно перпендикулярны. Здесь, по аналогии с окружностью девяти точек треугольника (окружностью Эйлера), вводятся окружность, которую автор предлагает называть окружностью Эйлера плоского четырехточечника, и соответственно сфера Эйлера для пространственного четырехточечника.

И. К. Парно

768. О понятии равносоставленности для многоугольников и многогранников. Манара (Sul concetto di equivalenza per i poligoni ed i poliedri. Manara C. F.), Period. mat., 1957, **35**, № 5, 279—285 (итал.)

Автор называет T-конгруэнтными фигуры, преобразуемые друг в друга трансляцией; будем также называть T-равносоставленными два многоугольника, если их можно разбить на одинаковое число соответственно T-конгруэнтных частей.

Рассмотрим простой многоугольник P и установим на его сторонах положительное направление. Возьмем произвольную точку O и примем ее за начальную точку векторов, равных направленным сторонам многоугольника, причем будем брать алгебраическую сумму коллинеарных векторов. Полученную фигуру назовем «векторной звездой» многоугольника P, а точку O — «началом» этой звезды. Не исключены случаи, когда векторная звезда вырождается в точку.

Теорема. Если два многоугольника T — равносоставлены, то их векторные звезды относительно одного и того же начала — тождественны.

Равенство векторных звезд есть условие, необходимое, но недостаточное для T-равносоставленности двух многоугольников.

А. И. Фетисов

769. О замечательных точках тетраэдра. (1-е сообщение). Молнар (A tetraéder nevezetes pontjairól. 1. közl. Molnár Ferenc), Középisk. mat. lapok, 1958, **16**, № 1, 1—6 (венг.)

Средствами элементарной стереометрии выводятся свойства центра тяжести, центров описанного, вписанного и вневписанных шаров общего тетраэдра, а также необходимые и достаточные условия для того, чтобы ребра его были касательными к одному шару.

К. С. Сцилард

770. О равенстве полиэдров. Приятель (O enakosti poliedrov. Prijatelj Niko), Obz. mat. in fiz., 1956, **5**, № 2, 58—62 (словенск.)

Автор пытается решить известную задачу о равновеликих многогранниках, полагая объем многогранника равным $\sum_{i=1}^{n} v_i f(a_i)$, где a_i — ребра многогранника, v_i — противолежащие им углы. Из рассуждения автора следует (что не заметил автор) счетность множества вещественных чисел (стр. 61).

Г. И. Дринфельд

771. Косферические круги на гранях тетраэдра. Пары косферических точек на ребрах тетраэдра. Монсо (Cercles cosphériques sur les faces d'un tétraèdre. Couples de points cosphériques sur les arêtes d'un tétraèdre. Monseau M.), Mathesis, 1956, **65**, № 4-6, 281—282 (франц.)

См. заметку В. Тебо (РЖМат, 1958, 1485), где есть другое доказательство тех же результатов и еще некоторые приложения. Заметка Монсо напечатана раньше.

Н. М. Бескин

772. Некоторые свойства треугольника в декартовых координатах. Сибсон (Some properties of the triangle in cartesian co-ordinates. Sibson R.), Math. Gaz., 1957, **41**, № 338, 282—284 (англ.)

Начало координат помещается в центр описанной окружности треугольника. Радиусы r и $\frac{R}{2}$, а также координаты центров I и N, соответственно вписанной окружности и окружности девяти точек, выражаются через радиус R описанной окружности и через полярные углы вершин. Теперь непосредственным вычислением доказываются формула Эйлера $OI^2 = R^2 - 2Rr$ и теорема Фейербаха $NI\frac{R}{2} - r$ (окружность девяти точек и вписанная окружность имеют внутреннее касание).

Ю. Г. Лумисте

773. Новое характеристическое свойство многогранного угла. Меркил (New characterizations of poly-

hedral cones. Mirkil H.), Canad. J. Math., 1957, 9, № 1, 1—4 (англ.)

Автор устанавливает некоторое свойство, выделяющее многогранные (телесные) углы среди всех выпуклых конусов вещественного конечномерного векторного пространства. Оно состоит в том, что у многогранного угла проекции (всех размерностей) замкнуты.

Далее доказывается, что если все двумерные проекции замкнутого выпуклого конуса замкнуты, то уже можно утверждать, что этот конус — многогранный угол. Опираясь на эти результаты, автор исследует возможность продолжения положительного функционала, заданного на некотором подпространстве, на все пространство с сохранением положительности. Такое продолжение оказывается возможным для всякого подпространства и функционала на нем в том и только в том случае, когда конус, по отношению к которому определяется положительность функционалов, является многогранным углом. Ю. А. Волков

774. Об ортополюсе в n-мерном пространстве. Ивата, Гифу дайгаку гакугэй гакубу кэнкю хококу (Сидзэн кагаку), Sci. Rept Fac. Liberal Arts and Educ., Gifu Univ. (Natur. Sci.), 1957, 1, № 5, 467—468 (японск.)

Пусть S_{n+1} — n-мерный симплекс в евклидовом пространстве E_n с вершинами $A_i (i = 1, \ldots, n+1)$, G_{ij} — центры тяжести $(n-1)$ вершины $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_{n+1}$, p_{ij} —гиперплоскости, проходящие через G_{ij} и ортогональные к сторонам A_iA_j симплекса S_{n+1}. Тогда все p_{ij} пересекаются в одной точке, которую автор называет точкой Монжа. Пусть p — какая-либо гиперплоскость (или прямая), Q_{ij} — основания перпендикуляров из G_{ij} на p. Тогда гиперплоскости q_{ij}, проходящие через Q_{ij} и ортогональные к A_iA_j, пересекаются в одной точке, которую автор называет ортополюсом p относительно S_{n+1}. В случае $n = 2$ рассматривается m прямых $l_1, \ldots, l_m$, проходящих через одну точку и пересекающихся под одними и теми же углами. Если $P_\alpha (\alpha = 1, \ldots, m)$ — ортополюсы l_α относительно какого-либо треугольника S_3, R_α — основания перпендикуляров, опущенных из ортоцентра S_3 на l_α, то центр тяжести точек P_α совпадает с центром тяжести точек R_α. Гу Чао-хао

775. Приложение формулы поворота. Ларивьер, Луи (An application of rotation formulas. Lariviere R., Louis G.), Amer. Math. Monthly, 1958, 65, № 2, 117 (англ.)

Вывод формулы для расстояния от точки до прямой из формулы преобразования координат при повороте осей, без приведения уравнения прямой к нормальному виду. Я. П. Бланк

776 К. Элементы геометрии. Аддис (Elementi di geometria. Addis Antonio. Palermo, G. Priulia. Vol. 1. Per il ginnasio superiore e per le classi di collegamento. 1953, 151 p., 450 L. Vol. 2. Per i licei classici e scientifici e per gli istituti tecnici e magistrali, 1954, 363 p., 900 L.), Bibliogr. ital., 1957, 91, № 674, 374 (итал.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

777. Ходьба пешком в дождь. Сатклифф (A walk in the rain. Sutcliffe A.), Math. Gaz., 1957, 41, № 338, 271—272 (англ.)

Решается задача о скорости ходьбы в дождь для того, чтобы остаться по возможности сухим, если даны угол α направления дождя, скорость его падения и угол β между направлением движения пешехода и проекцией направления дождя. В. А. Голубев

778. Взаимное движение геометрических мест мгновенных центров ускорений на плоской фигуре и неподвижной плоскости. Швед Г. Л., Тр. Одесск. технолог. ин-та пищ. и холодильн. пром-сти, 1957, 8, № 1, 75—88

Выясняются условия, налагаемые на движение плоской фигуры, при выполнении которых геометрические места мгновенных центров ускорений в подвижной и неподвижной плоскостях будут иметь общую точку соприкасания (будут катиться друг по другу со скольжением) или превратятся в одну точку. Приводятся примеры таких движений. Л. Г. Лойцянский

779. О построении Эйлера — Савари в кинематической геометрии. Линсман (Sur la construction d'Euler—Savary en géométrie cinématique. Linsmann Marcel), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 6, 366—368 (франц.)

Показано, что построение центра кривизны рулетты при изучении движения плоской фигуры в своей плоскости, данное Эйлером — Савари, может быть основано на распределении скоростей машин. С. И. Зетель

780. Сложение двух вращений вокруг двух пересекающихся осей. Ворен (De samenstelling van twee draaiingen om concurrente assen. Vooren W. L. van de), Simon Stevin, 1956, 31, № 2, 73—79 (гол.)

Рассматривается вопрос о сложении последовательных поворотов (вращений) вокруг двух пересекающихся осей. С каждым поворотом сопоставляется некоторый вектор ω, направленный по оси вращения и имеющий модуль $\omega = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, где α—угол поворота. Двумя способами — при помощи матричного исчисления и чисто векторным — выводится формула

$$\pi = \frac{\eta + \omega + \eta \times \omega}{1 - \eta \times \omega}$$

для результирующей π двух последовательных поворотов ω, η. Применяя соотношения сферической тригонометрии, автор показывает согласие указанной формулы с теоремой Родрига — Гамильтона (1840): Три последовательных поворота вокруг трех пересекающихся в одной точке осей, каждый на угол, равный удвоенному углу между определяемыми осями плоскостями, возвращают тело в исходное положение. Ю. М. Гайдук

781. Минимум отклонения луча, проходящего через призму и через водяную каплю. Старинг (Minimum der Strahlenablenkung durch ein Prisma und durch Wassertropfen. Staring A. J.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, 10, № 10, 464—466 (нем.)

При помощи так называемой кривой преломления

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{n_1}{n_2}$$

на $\alpha\beta$-плоскости дается наглядное графическое обоснование того факта, что минимум отклонения светового луча, проходящего через призму, достигается при симметрическом прохождении. Наглядно показывается также наличие минимума отклонения луча при прохождении его через шарообразную водяную каплю с одно-, двух- и т. д. кратным внутренним отражением в капле. Упоминается связь с теорией радуги. Ю. Г. Лумисте

782. Геометрическая интерпретация взаимных тензоров деформации. Трусделл (Geometric interpretation for the reciprocal deformation tensors. Truesdell C.), Quart. Appl. Math., 1958, 15, № 4, 434—435 (англ.)

В конечной деформации $x^i = x^i(X^1, X^2, X^3)$ $(i = 1, 2, 3)$ бесконечно малое изменение длины определяется тензором C_{AB}, так что $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = C_{AB}dX^A dX^B$; $C_{AB} = g_{\alpha\beta}x^\alpha_{,A}x^\beta_{,B}$. Указывается геометрическая интерпретация взаимного тензора

$$(C^{-1})^{KM} = g^{\alpha\beta}X^K_{,\alpha}X^M_{,\beta}.$$

Пусть двум площадкам, связанным данной деформацией, отвечают векторы dA_M и da_K.

Тогда $(da)^2 = da_\alpha da^\alpha = \frac{(C^{-1})^{KM}}{\mathrm{Det}\,(C^{-1})^{PQ}}\, dA_K dA_M$.

Это означает, что изменение величины бесконечно малой площадки определяется тензором $(C^{-1})^{KM}/\mathrm{Det}\,(C^{-1})$. Аналогичная интерпретация получается и для дуальных тензоров c; c^{-1}. Приводятся простые следствия полученной интерпретации. С. А. Пясецкий

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

783. Графические плоскости и родственные вопросы. Бенедикти (Piani grafici e questioni connesse. Benedicty Mario), Archimede, 1956, 8, № 2, 49—54 (итал.)

Графическая плоскость или абстрактная проективная плоскость определяется аксиомами принадлежности и требованием существования определенного числа независимых точек и прямых, а именно:

A''_E (2). Существуют по меньшей мере две различные прямые.

A'_F (2). Каждая прямая содержит по меньшей мере две точки.

A′ (1). Две различные точки P и Q принадлежат одной и только одной прямой; она обозначается PQ.

A″ (1). Для двух различных прямых r и s существует одна и только одна точка, принадлежащая им обеим; она обозначается rs. Если A'_F (2) заменить на A'_F (3):

Каждая прямая содержит по меньшей мере три различные точки, — то получим неприводимую графическую плоскость.

Рассматриваются различные комбинации аксиом, позволяющие получить теорему Дезарга, ввести однородные координаты для точек и прямых. Далее рассматриваются возможные обобщения графических плоскостей („общие плоскости"), для которых имеют место, например, такие аксиомы:

A′ (n). Для двух различных точек существует n прямых, инцидентных с ними, или

$A'_M(n)$. Для двух различных точек существует по меньшей мере n прямых, инцидентных с ними.

Дается аксиоматическое обоснование понятия изоморфизма двух плоскостей.

Вводится понятие проективных плоскостей с близкими элементами. Точки P и Q считаются близкими (символически PVQ) в том и только в том случае, если существуют по меньшей мере две прямые, проходящие через P и Q. Н. М. Бескин

784. Некоторые линейные системы сингулярных коллинеаций. Медек (Niektoré lineárne systémy singulárnych kolineácií. Medek Václav), Mat.-fys. časop., 1957, 7, № 2, 83—93 (словацк.; рез. русск., нем.)

Работа примыкает к более ранней работе автора (РЖМат, 1958, 1499). Изучаются отображения коллинеации в проективной плоскости S_2 на проективное пространство S_8. Сингулярные коллинеации отображаются на алгебраическое многообразие V_7^3, свойства которой также изучаются. Коллинеации, определенные матрицей, ранг которой равен 1, отображаются на многообразие V, состоящее из двух двупараметрических систем плоскостей. Точки многообразия V являются двойными точками многообразия V_7^3. Затем производится подробная классификация сингулярных коллинеаций и изучаются связки коллинеаций, определенные или тождественным соответствием и сингулярной коллинеацией, или двумя сингулярными коллинеациями. Z. Nádeník

785. Улучшение касания кривых путем проектирования. Урбан (Zvýšení styku křivek promítáním. Urban Alois), Mat.-fyz. časop., 1957, 7, № 4, 207—234 (чешск.; рез. франц.)

Работа посвящена проблеме касания проекций двух кривых при проектировании из одного центра (в трехмерном проективном пространстве). Главная задача, которую перед собой поставил автор, заключается в следующем: показать некоторые геометрические конструкции главных элементов (главной плоскости, главных прямых и главных точек) пересекающихся кривых.

Пусть k_1, k_2 — две кривые, которые пересекаются в точке A, $\mathfrak{R}$—конгруэнция прямых с фокальными кривыми f_1, f_2, P—нетривиальная линейчатая поверхность конгруэнции $\mathfrak{R}$, проходящая через точку A (причем на поверхности P точки кривых k_1, k_2 не будут особыми).

Описание главных геометрических конструкций содержится в следующих теоремах:

Прямая нетривиальной развертывающейся поверхности P конгруэнции $\mathfrak{R}$, проходящая через точку A кривых k_1, k_2, является главной прямой кривых k_1, k_2 в точке A, и наоборот.

Точка ребра возврата нетривиальной развертывающейся поверхности P конгруэнции $\mathfrak{R}$ на главной прямой кривых k_1, k_2 в точке A является главной точкой кривых k_1, k_2 в точке A и наоборот.

В дальнейших геометрических конструкциях автор использует квадратные или кубические поверхности, которые имеют с кривыми k_1, k_2 в точке A касание выгодного порядка. Z. Vančura

786. Об основной теореме центральной аксонометрии. Дрс (O základní větě centrální axonometrie. Drs Ladislav), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 2, 165—174 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор приводит некоторое видоизменение синтетического доказательства первой основной теоремы (Круппа—Четверухина) центральной аксонометрии, данного Н. М. Бескиным (сб. Вопросы современной начертательной геометрии, М.—Л., 1947, 55—126). Дается новая формулировка этой теоремы, которая оказалась более выгодной для решения задач центральной аксонометрии, как показано на нескольких примерах, из которых один решается более простым способом, чем до сих пор (Четверухин Н. Ф., сб. Методы начертательной геометрии и ее приложения, М., 1955, 105—111). A. Urban

787. О паре (m, n) конфигураций. Гавел (O dvojici (m,n) konfigurací. Havel Václav), Časop. pěstov. mat., 1957, 82, № 3, 360—364 (чешск.; рез. русск., нем.)

Содержанием работы служат две теоремы, находящиеся в связи с многомерным обобщением теоремы Польке—Шварца (Pohlke—Schwarz). В первой теореме описано решение многомерного аналога задачи Гуглера (Gugler), вторая теорема представляет собой n-мерное обобщение теоремы Польке—Шварца; в ней одновременно содержится и результат, полученный Шуром в 1885 г. (Schur F., Math. Ann., 1885, 25, 569—595). Статья примыкает также к работам: 1) Глаголев Н. А., Обобщение теоремы Польке, Матем. сб. 1925, 32, 457—463 и 2) Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф., Аксонометрия, М., 1953. Z. Nádeník

788. О перспективном изображении шаров. Домкович (Über die perspektive Abbildung von Kugeln. Domkowitsch Ernst), Elem. Math., 1957, 12, № 3, 58—61 (нем.)

Рассматриваются две линейные перспективы $[K]$ и $[C]$ на одной картинной плоскости с центрами S_K и S_C, главными точками K и C и главными расстояниями $r = S_K K$ и $s = S_C C$ соответственно; $r > s$.

Изображение в перспективе $[K]$ шара $\gamma(C, s)$ с радиусом s и центром C будет эллипс c, а изображение в перспективе $[C]$ шара $\varkappa(K, r)$—гипербола k. Обе кривые софокусны (теорема Данделена); доказывается, что малая ось эллипса является мнимой осью гиперболы и осью эллипса n, служащего изображением большого круга шара γ, плоскость которого перпендикулярна прямой KC. Приводятся простые построения всех элементов кривых c и k (построения для обеих кривых оказываются одинаковыми) и эллипса n, нужного для решения задачи перенесения отрезка любого направления. Указывается, что этот метод решения метрических задач не опирается на результаты Данделена и является более простым.

Приводится ряд свойств кривых k и c и ряд связанных с ними построений, например центров кривизны кривых в их вершинах. А. С. Лейбин

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

789. Замечание об однородных полиномах. Морлок, Перри (A note concerning homogeneous polynomials. Morelock J. C., Perry N. C.), Math. Mag., 1957, **31**, № 2, 75—79 (англ.)

Рассматривается однородный полином $F(x)$ простой степени p от четырех переменных x_l и преобразование T: $x_l' = \varepsilon^{l-1}x_l$ ($\varepsilon^p = 1$). $F(x)$ называется s-инвариантным, если $F(Tx) = \varepsilon^s F(x)$. Устанавливаются необходимые и достаточные условия s-инвариантности и подсчитывается число членов наиболее общего s-инвариантного полинома. Дана таблица максимальных s-инвариантных полиномов 5-й степени (См. также РЖМат, 1956, 4793). В. В. Морозов

790. Вопрос о существовании плоской алгебраической кривой с заданными характеристиками. Манара (Questioni di esistenza di curve algebriche piane con caratteri assegnati. Manara Carlo Felice), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1952—1953(1954), **24**, 66—77 (итал.; рез. англ.)

Плюккеровыми характеристиками плоской алгебраической кривой называются целые числа, являющиеся инвариантами проективного преобразования кривой: 1) порядок кривой n; 2) номер класса кривой m; 3) число узловых точек δ; 4) число двойных касательных τ; 5) число точек возврата k; 6) число точек перегиба i. Соотношения между этими числами определяются тремя формулами Плюккера.

Кроме того, род кривой $p = (n-1)(n-2)/2 - \delta - k$ должен быть неотрицательным. Не всякие 6 неотрицательных чисел ($n > 0$, $m > 0$), удовлетворяющие этим условиям, являются характеристиками неприводимой кривой. В качестве методов отыскания кривой с заданными характеристиками указываются: проектирование пространственных кривых, рациональные преобразования плоскости, а также методы, связанные с алгебраически- геометрическими доказательствами существования алгебраических функций. А. И. Фетисов

791. Уравнивающая матрица и ее применение к исследованию плоских кубических кривых и их рациональных точек. Гутвирт, Яботинский (An alignment matrix and its applications to plane cubic curves and their rational points. Gutwirth A., Jabotinsky E.), Bull. Res. Council Israel, 1956, **A6**, № 1, 11—41 (англ.)

Вырожденная матрица $A = (a_{ij})$ третьего порядка называется уравнивающей (У-матрицей), если $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = \lambda$, $a_{1i}a_{2i}a_{3i} = \mu$ ($i = 1, 2, 3$), У-матрица A называется особой, если выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) A содержит две одинаковые строки; б) какая-либо строка матрицы A получается из другой циклической перестановкой; в) $\lambda = 0$; г) $\mu = 0$. Для элементов неособых У-матриц выводится ряд соотношений, которые используются затем для получения некоторых свойств кубических кривых. Например, из соотношения

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{a_{1i} + a_{2i} + a_{3i}}{a_{2i} - a_{3i}} = 0$$

выводится равенство $XA + YB + ZC = 0$, где A, B, C—коллинеарные точки кубической кривой, а X, Y, Z—точки пересечения прямой AB с осями трилинейных координат. Особые У-матрицы также исследуются и используются для изучения кубических кривых. Последние параграфы посвящены исследованию рациональных точек кубических кривых. Л. А. Скорняков

792. Якобиево многообразие алгебраической кривой. Чжоу Вэй-лян (The Jacobian variety of an algebraic curve. Chow Wei-Liang), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago, s. a., 25—27 (англ.)

Сообщается, что автором найден алгебраический и конструктивный метод построения якобиева многообразия для кривой без особенностей над произвольным исходным полем. Метод основан на использовании ассоциированных форм и ассоциированных многообразий, рассматривавшихся в прежних работах автора. Подробности отсутствуют. И. З. Розенкноп

793. О полярной проекции относительно нормальных кривых. Инагаки (On the polar projection with respect to normal curves. Inagaki Masaru), Math. Mag., 1958, **31**, № 3, 141—153 (англ.)

Известна так называемая полярная проекция относительно гиперсферы S в проективном пространстве P_n. Через точку P проводят касательный гиперконус к S, из фиксированной точки $O \in S$ точки касания проектируются на фиксированную гиперплоскость P_{n-1}; в P_{n-1} получают полярную проекцию точки P — гиперсферу K ($P \in P_n \to K \in P_{n-1}$).

Рассматривается аналогичная конструкция, в которой гиперсфера S заменяется алгебраической нормальной кривой C_n n-го порядка

$$\rho x_l = t^{n-l+1} \quad (l = 1, \ldots, n+1;\ t — \text{параметр})$$

(линейная оболочка C_n есть все P_n).

Из фиксированной точки $O_n \in C_n$ проектируются на фиксированную гиперплоскость P_{n-1} все точки кривой, для которых соприкасающиеся плоскости C_n проходят через точку P; таких точек ровно n; в P_{n-1} получаются n точек нормальной кривой C_{n-1}; эти точки проектируются из фиксированной точки $O_{n-1} \in C_{n-1}$ на фиксированную гиперплоскость $P_{n-2} \in P_{n-1}$ в n точек нормальной кривой $C_{n-2} \in P_{n-2}$. Повторяя этот процесс, получают n точек нормальной кривой $C_m \in P_m$, где $P_m \in P_{m+1}$ ($m = n-1,\ n-2, \ldots$). Устанавливаемое таким образом соответствие между точками $P \in P_n$ и системами n точек на C_m, называется полярной проекцией относительно нормальных кривых C_k ($k = n, n-1, \ldots, m$).

Доказывается ряд теорем о полярных проекциях подпространств $P_m{}^0 \in P_n$. С их помощью изучается расположение вершин полных соприкасающихся m-эдров нормальных кривых. С. А. Пясецкий

794. Поверхность третьего порядка. Части 1, 2. Кизини (La superficie cubica. Partes 1, 2. Chisini Oscar), Period. mat., 1957, **35**, № 4, 202—218; № 5, 286—300 (итал.),

Новые оригинальные доказательства известных свойств алгебраических поверхностей третьего порядка, именно: наличия 27 прямых, существования бирационального отображения поверхности на плоскость, образования поверхности как геометрического места точек

пересечения соответствующих плоскостей трех коллинеарных связок, возможности синтетического построения асимптотических линий линейчатых поверхностей третьего порядка, существования единственного пентаэдра Сильвестра у общей поверхности третьего порядка.

Я. П. Бланк

795. О структуре одной точки дирамации, кратной алгебраической поверхности 31-го порядка. Годо (Sulla struttura di un punto di diramazione di una superficie algebrica multipla di ordine 31. Godeaux Lucien), Rend. Ist. lombardo sci. e lettere. Cl. sci. mat. e natur., 1954, 87, № 3, 619—626 (итал.)

Исследование структуры точки дирамации алгебраической поверхности, несущей циклическую инволюцию 31-го порядка и соответствующей значениям $\alpha=18$, $\beta=19$ (РЖМат, 1955, 5257). В. В. Морозов

796. О структуре точек дирамации кратной поверхности порядка 157. Годо (Sur la structure des points de diramation d'une surface multiple, d'ordre 157. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, 42, № 4, 413—418 (франц.)

В своей заметке (РЖМат, 1958, 6113) Хатчерсон (M. Hutcherson) указал, что поверхность F

$$a_1x_1^{13}x_2 + a_2x_2^{13}x_3 + a_3x_3^{13}x_1 + a_4x_4^{14} = 0$$

преобразуется в себя гомографией H:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{145}x_3 : \varepsilon^{1\,d\,1}x_4,$$

где ε—первообразный корень 157-й степени из единицы. На F гомография H дает инволюцию порядка 157, имеющую три соединенных точки O_1 (1, 0, 0, 0,), O_2 (0, 1, 0, 0,) и O_3 (0, 0, 1, 0,). Эти три точки имеют одинаковую структуру и последняя может быть определена теми приемами, которые автор изложил в своих предыдущих работах.

Вместе с тем автор показывает здесь, что за образ инволюции можно принять нормальную поверхность Ф, имеющую три точки дирамации. Каждая из них будет шестикратной для Ф и касательный конус в ней распадается на конус 2-го порядка, рациональный конус 3-го порядка, пересекающий предыдущий по образующей, и, наконец, плоскость, содержащую образующую кубического конуса. С. С. Бюшгенс

797. Алгебраические поверхности большого линейного рода. Бюрниат (Superficie algebriche di genere lineare grande. Burniat Pol), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 4, 504—509 (итал.)

Автор строит пример алгебраической поверхности, правильная каноническая система которой неприводима, а линейный род $p^{(1)}$ имеет величину $8p_a+9$, очень близкую к максимальному возможному значению $8p_a+10$, которое указал Цаппа (РЖМат, 1958, 9200). Такой поверхностью оказывается двойной алгебраический конус $2F$, где F — конус порядка n и рода $\omega\geqslant 1$ в обычном пространстве, имеющий только обыкновенные двойные образующие. Возьмем конус φ порядка $2n-4$, бисопряженный с F и касающийся F вдоль $n+2\omega-2$ образующих, не составляющих множества, принадлежащего линейному ряду, высекаемому на F сопряженным конусом порядка $n-2$. Далее возьмем множество ψ, состоящее из $2\pi+2$ плоскостей ($\pi\geqslant 1$), принадлежащих одному пучку, и рассмотрим $2F$ как двойной конус, кривой разветвления которого служит пересечение F с поверхностью $\varphi+\psi$. Подсчет характеров $2F$ дает: $p_g=\pi(\omega-1)$; $p_a=p_g-\omega$; $p^{(1)}=8(\pi-1)(\omega-1)+1$, откуда $p^{(1)}=8p_a+9$. Геометрический род p_g и иррегулярность ω могут иметь любое значение. E. Togliatti

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 671.

798. Циклы на абелевых многообразиях. Маттук (Cycles on Abelian varieties. Mattuck Arthur), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 88—98 (англ.)

Рассматривая комплексное абелево многообразие V_n общего типа (т. е. матрица периодов которого удовлетворяет только соотношениям Римана), автор показывает, что классы алгебраических рациональных гомологий на нем исчерпываются его линейными сечениями различных размерностей и их кратностями (результат, известный до сих пор лишь для размерности n—1) и что рациональные циклы, лежащие в этих сечениях, возникают пересечением последних с рациональными циклами в многообразии. Если назвать p-цикл на V_n циклом ранга r в случае, когда он гомологичен циклу, лежащему в алгебраическом подмногообразии размерности (комплексной) p—r, то из этих результатов следует, что размерность пространства p-циклов ранга r равна $C_{2n,\ p-2r}$.

Автор указывает, что его работа является развитием и интерпретацией работы Комесатти (Comessatti A., Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1935, 5, 50).

В. В. Морозов

799. Об алгебраических многообразиях, допускающих конечную непрерывную коммутативную группу бирациональных преобразований в себя. Холл (On algebraic varieties which possess finite continuous commutative groups of birational self-transformations. Hall R.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 507—511 (англ.)

Показывается, что если алгебраическое многообразие V_n инвариантно относительно коммутативной r-параметрической группы преобразований и траектории последней имеют размерность $r'<n$, то оно бирационально эквивалентно произведению некоторого линейного пространства S_d $(0\leqslant d\leqslant r')$ и многообразия V_{n-d}. Последнее при $d<r'$ псевдоабелево типа $r'-d$ (РЖМат, 1955, 3377), а при $d=r'$ не подчинено никаким условиям

Доказательство индукцией по n с применением теоремы Севери (соответствующей случаю $r=n$).

В. В. Морозов

800. О дзета-функциях и L-рядах алгебраических многообразий. Исида (On zeta-functions and L-series of algebraic varieties. Ishida Makoto), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 1, 1—5 (англ.)

Рассматривается нормальное проективное многообразие V_r над конечным полем k из q элементов, абелево многообразие A и покрытие Галуа $f: A\to V$ степени n с группой G. Пусть $Z(u,V)$, $Z(u,A)$ —их дзета-функции над k и $L(u,\chi,A/V)$ — L-ряд покрытия A/V, принадлежащий неприводимому характеру χ группы G.

Показывается, что равенство $Z(u,V)=Z(u,A)$ имеет место тогда и только тогда, когда V абелево над k. В этом случае G абелева, A/V неразветвлено и все L-ряды, принадлежащие не главному характеру χ_0, тождественно равны единице. Вообще, если G абелева и $\chi\neq\chi_0$, то

$$Z(u,V)=\prod_0^{2r}[P_i(u)]^{(-1)^{i+1}},\quad L(u,\chi,A/V)=\prod_1^{2r-1}[Q_i^{(\chi)}(u)]^{(-1)^{i+1}},$$

где

$$P_i(u)=\prod_j(1-\alpha_j^{(i)}u),\quad Q_i^{(\chi)}(u)=\prod_j(1-\beta_j^{(i,\chi)}u)\ \text{и}$$

$|\alpha_j^{(i)}|, |\beta_j^{(i,\chi)}| = q^{i/2}$. Кроме того, удовлетворяются функциональные уравнения

$$Z(1/q^ru,V)=(-1)^e q^{re/2}u^e Z(u,V),$$

$$L(1/q^ru,\chi,A/V)=(-1)^{e(\chi)}q^{re(\chi)/2}u^{e(\chi)}L(u,\bar{\chi},A/V),$$

где $e=\Sigma(-1)^i\deg P_i, e(\chi)=\Sigma(-1)^i\deg Q_i^{(\chi)}$.

Наконец, если $A(V)$ — многообразие Альбанезе для V, s — его размерность и

$$Z(u,A(V))=\prod_0^{2s}(P'_i(u))^{(-1)^{i+1}},\ \text{то}\ P_1(u)=P'_1(u)$$

С помощью этих результатов доказывается справедливость одного предположения Хассе относительно дзета-функций некоторых алгебраических многообразий над алгебраическим числовым полем.

В. В. Морозов

801. О проективном вложении однородных многообразий. Чжоу Вэй-лян (On the projective embedding of homogeneous varieties. Chow Wei-Liang), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 122—128 (англ.)

Если V—алгебраическое многообразие (м.) и G — м.-группа, то говорят, что G действует на V, если существует $T \subset G \times V \times V$, такое, что для любой точки $a \ni G$ цикл $T_a = \mathrm{пр}_{V\times V}(T(a\times V\times V))$ определен и представляет всюду бирегулярное бирациональное преобразование V в себя, причем для любых $a,b \ni G$ имеет место $T_{ab} = T_a T_b$. Говорят, что G действует на V транзитивно, если для любых $p,q \ni V$ найдется $a \ni G$ такая, что $p = T_a(q)$. Если существует м.-группа, действующая на V транзитивно, то V называется однородным. Результат Вейля (РЖМат, 1958, 7113) обобщается на однородные м.: каждое однородное м. допускает проективное вложение.

В. В. Морозов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА И ОБОБЩЕНИЯ

802. О деформации некоторых изогональных сетей на поверхности. Винченсини (Sur la déformation de certains réseaux isogonaux d'une surface. Vincensini Paul), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 3, 377—384 (франц.; рез. итал.)

Если около каждой точки P поверхности S описать как около центра сферу Σ переменного радиуса R, то каждая такая сфера будет касаться огибающей всех сфер в паре точек M_1, M_2, симметрично расположенных относительно касательной плоскости Π к S в P. Пусть I—точка пересечения хорды M_1M_2 с плоскостью Π. В общем случае на S существует одна и только одна сеть кривых, для которых

$$dPdI = 0. \qquad (1)$$

Такая сеть сохраняется при изгибании поверхности S. Автор рассматривает случай, когда S изгибается на сферу единичного радиуса σ. Приведенные выше соображения, относящиеся к S, прилагаются к σ. Если O — центр сферы σ, P — какая-либо ее точка, то, откладывая от точки O на прямой OP отрезок длины $\rho = \frac{1}{2}R^2$ и проводя через конец его плоскость π, перпендикулярную к нему, получают некоторую поверхность Θ как огибающую таких плоскостей. Пусть M—точка касания плоскости π с Θ, F_1, F_2 — центры главных кривизн поверхности Θ, I — точка пересечения нормали к Θ в M с плоскостью, касающейся σ в точке, диаметрально противоположной точке P, α — угол сети на σ, определяемой равенством (1). В таком случае $IF_1/IF_2 = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. Если $\alpha = \mathrm{const}$, то поверхность Θ становится так называемой поверхностью с сферической фокальной огибающей индекса $k = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. (У таких поверхностей плоскости, перпендикулярные к нормалям и делящие отрезок между центрами главных кривизн в постоянном отношении k, огибают сферу).

Если $\alpha = 0$, то изогональная сеть является двойной. На всякой развертывающейся поверхности таковой является однопараметрическое семейство геодезических. Если S налагается на сферу единичного радиуса, то точка I совпадает с одним из центров главной кривизны поверхности Θ.

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, а S — развертывающаяся поверхность, то отыскание изогональных сетей (1) приводит к интегрированию уравнения Лапласа. Если S есть сфера единичного радиуса, то точка I оказывается серединой сегмента F_1F_2 поверхности Θ. Последние поверхности рассматривались Вейнгартеном в связи с деформацией параболоида вращения.

И. И. Кованцов

803. Об одном инварианте группы эквиареальных отображений поверхностей трехмерного евклидова пространства. Винченсини (Sur un invariant du groupe des équivalences superficielles de l'espace euclidien à trois dimensions. Vincensini Paul), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1957 (1958), **23**, № 5, 217—220 (франц.)

Каждой точке P поверхности ставится в соответствие точка I касательной плоскости

$$\overline{I} = \overline{P} + a\frac{\partial \overline{P}}{\partial u} + b\frac{\partial \overline{P}}{\partial v}.$$

Когда P описывает на поверхности линию C, I описывает в пространстве линию Γ. Чтобы эти линии соответствовали ортогональностью линейных элементов, C должно принадлежать сети $Adu^2 + Bdudv + Cdv^2$, где A,B,C выражаются через E, F, G, и a, b. Условие ортогональности этой сети: $a_u + b_v + a(\ln w)_u + b(\ln w)_v + 2 = 0$, где $w = \sqrt{EG - F^2}$. Такие сети сохраняются при эквиареальных отображениях.

Я. П. Бланк

804. Гиперболическая поверхность в трехмерном пространстве. Оссерман (A hyperbolic surface in 3-space. Osserman Robert), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 1, 54—58 (англ.)

Дается построение поверхности $z = f(x,y)$, которая расположена над всей плоскостью (x,y) и конформна внутренней области евклидова круга. Автор кладет в основу следующее предложение об односвязных римановых поверхностях: если риманова поверхность имеет две пересекающиеся линии симметрии и не пересекающую их третью линию симметрии, то она является гиперболической римановой поверхностью. Соответственно этому строится поверхность, которая обладает указанным свойством и однозначно проектируется на всю плоскость (x,y). Построенная поверхность имеет особые точки. Автор сообщает, что возможно построить всюду бесконечно дифференцируемую поверхность требуемого вида.

Н. В. Ефимов

805. Геодезические группы минимальных поверхностей. Хелфенстейн (Geodesic groups of minimal surfaces. Helfenstein H. G.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 1, 89—96 (англ.)

Рассматриваются пары минимальных поверхностей, которые могут быть геодезически отображены одна на другую.

В силу теоремы Дини, две поверхности S и S', допускающие нетривиальное геодезическое отображение одной на другую, должны быть поверхностями Лиувилля. Линейные элементы соответствующих точек будут:

$$ds^2 = [A(x) + B(y)](dx^2 + dy^2),$$

$$ds'^2 = -\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)\left(\frac{dx^2}{A} - \frac{dy^2}{B}\right).$$

Подробно рассматриваются функции $A(x)$, $B(y)$ и все преобразования этого вида. Обе поверхности, допускающие указанные преобразования, являются поверхностями Шерка.

Рассматривается неабелева интранзитивная группа, образованная всеми геодезическими преобразованиями поверхности Шерка в себя.

В. А. Иглицкая

806. Минимальные поверхности и ассоциированные линейные операторы. Булиган (Surfaces minima et opérateurs linéaires associés. Boulïgand Georges), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 24, 1676—1678 (франц.)

Пусть координаты минимальной поверхности x, y, z — гармонические функции изотермических параметров μ, ν, а x_1, y_1, z_1 — сопряженные гармонические функции. По формулам Вейерштрасса $dx+idx_1$, $dy+idy_1$, $dz+idz_1$ равны соответственно $(1-w^2)F(w)dw$, $i(1+w^2)F(w)dw$, $2wF(w)dw$, где $w=\mu+i\nu$. Пусть (E) — множество так параметризованных минимальных поверхностей, определяемых функциями F, голоморфными в круге $|w|<1$, принимающими одинаковые значения на окружности, тогда и $\overline{\text{grad}^2 L}$, где L — линейная форма координат x, y, z также принимает на окружности одинаковые значения. У множества функций F существует подмножество функций f_0, не имеющих нулей при $|w|<1$, определяющих минимальные поверхности, каждая точка которых имеет регулярную окрестность. Умножая члены f_0 на один и тот же множитель φ вида, указанного в предыдущей заметке (РЖМат, 1958, 6752[*], вторая система решений), получим множество f_φ. Каждое f_φ определяет класс эквивалентности, которому соответствует цикл ассоциированных минимальных поверхностей, находящихся в изометрическом соответствии при параллельности касательных плоскостей. Я. П. Бланк

807. Проективно-инвариантные реперы линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруэнции. Щербаков Р. Н., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 3, 390—393

Строятся в трехмерном проективном пространстве два репера линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруэнции, и устанавливаются их связи с репером конгруэнции, рассматриваемым С. П. Фиников ым в монографии «Теория конгруэнций».

Пусть $v=\text{const}$ — однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей конгруэнции, отнесенных к одному из рассматриваемых реперов. Ищутся такие проективные преобразования пространства (преобразования Егорова), зависящие от v, при которых одна из фокальных поверхностей конгруэнции превращается в фокальную поверхность преобразованной конгруэнции или сохраняются другие требования.

Аналогичные построения автором были проведены в метрической и аффинной геометриях (РЖМат, 1956, 4822; реф. 808). К. И. Гринцевичюс

808. Некоторые вопросы аффинной теории прямолинейных конгруэнций. Щербаков Р. Н., Матем. сб., 1955, **37 (79)**, № 3, 527—556

В гл. 1 строится торсовый t-репер конгруэнции в 3-мерном эквиаффинном пространстве: координатные поверхности — торсы, вершина репера A — в центре луча, вектор e_3 определяется равенством $e_3=F_1-A$ (F_1 — фокус), плоскости $\{e_1 e_2\}$ зависят от параметра t и образуют пучок, аналогичный каноническому пучку проективной теории поверхностей. Ось пучка называется канонической прямой, соответствующей лучу конгруэнции. При $t=0$ плоскость $\{e_1 e_2\}$ совпадает с касательной плоскостью средней поверхности (C-репер), при $t=1$ она параллельна касательной плоскости индикаторной поверхности (U-репер), при $t=\frac{1}{2}$ — параллельна направлениям на фокальных поверхностях, сопряженным лучу конгруэнции (Ф-репер). Из коэффициентов дифференциальных формул получаются 9 инвариантов конгруэнции и t-репера:

$$I_1=ag,\ I_2=ec,\ I_3=\frac{(eg^3-ca^3)^2}{4a^3g^3},\ I_4=I_3{}^3+K_1{}^3,$$

$$I_5=I_2{}^3-K_1{}^3,\quad I_6=\frac{1}{a^2}J_3{}^1,\ I_7=\frac{1}{g^2}K_2{}^3,$$

$$I_8=\frac{1}{4a^2}(a_1-aI_1^1+ge),\qquad I_9=\frac{1}{4g^2}(g_2-gK_2{}^2-ac),$$

где $a, g, e, c, I_i^k, K_l^m, a_1, g_2$ — коэффициенты в разложениях форм $\omega^3, \omega_i{}^t, \omega_i{}^k, da, dg$ по базисным $\omega_3{}^1, \omega_3{}^2$. Обращение инвариантов в нуль характеризует ранее известные и вновь полученные основные эквиаффинно-инвариантные классы конгруэнций. Выведены уравнения огибающей плоскостей $\{e_1 e_2\}$ t-репера (в локальных координатах) и найден произвол конгруэнции, когда огибающая становится торсом. Доказывается: если торсы исходной конгруэнции и конгруэнции ее канонических прямых соответствуют, то: 1) одна из фокальных поверхностей конгруэнции вырождается в линию; ее торсам соответствуют сопряженные сети на 2) средней, 3) индикаторной поверхностях. Конгруэнция канонических прямых состоит из ∞^1 цилиндров. Произвол решения — пять функций одного аргумента. Выполнение любых двух из указанных свойств обеспечивает соответствие торсов обеих конгруэнций. Конгруэнция, аффинные нормали первой фокальной поверхности которой параллельны направлениям на второй фокальной поверхности, сопряженным с лучом, определяется с произволом пяти функций одного аргумента. Первая фокальная поверхность ее характеризуется наличием сопряженной сети линий $\beta=0$ и $\mu=0$ (Щербаков Р. Н., Уч. зап. Бурят-Монг. гос. пед. ин-т, 1952, 3, стр. 23—26), высекаемой торсами конгруэнции.

В гл. 2 построен t_c-репер конгруэнции, отнесенной к сопряженной (в смысле Сания (Sannia G., Ann. Math., 1908 (III), **15**, 146)) сети косых линейчатых поверхностей (с тем же значением параметра t, что и выше). Этот репер удобен для изучения линейчатой поверхности, принадлежащей конгруэнции. Деривационные формулы A_t-репера этой поверхности получаются из соответствующих формул t_c-репера при $\omega^1{}_3=0$, $\omega_3{}^2=ds$:

$$\frac{dA}{ds}=e_1-t\rho e_3,\qquad \frac{de_1}{ds}=pe_1+\lambda e_2+\nu e_3,$$

$$\frac{de_2}{ds}=\mu e_1+qe_2+\tau e_3,\qquad \frac{de_3}{ds}=e_2+(1-t)\varkappa e_3,$$

где $p+q=(t-1)\varkappa$.

Найдено геометрическое значение инвариантов $\rho, p, \lambda, \nu, \mu, q, \tau, \varkappa, ds$ поверхности и A_t-репера и построены основные дифференциальные формы конгруэнции ρds, $\varkappa ds$, νds^2, τds^2, pds^3, qds^3, μds^3, λds^3, причем $\nu ds^2 \mid_{t=0}=\varphi_c$, $\tau ds^2 \mid_{t=0}=\varphi_u$ где φ_c и φ_u — основные квадратичные формы средней и индикаторной поверхностей. Лишь формы $pds^3, \varkappa ds^3, \rho ds$ и $(\mu+G)\,ds^3$ рассматривались у Гаака, Д. З. Гордевского и Н. Г. Гаспаряна ($G(v)$ — дифференциатор Бельтрами от формы $\varphi=(\omega_3{}^2)^2-(\omega_3{}^1)^2=2v_3{}^1v_3{}^2$). Инварианты A_t-репера позволяют выделить и геометрически охарактеризовать 8 основных классов линейчатых поверхностей конгруэнции, а также указать натуральные уравнения поверхностей, рассмотренных Гааком (Haack W., Monatsh Math und Phys., 1929, **36**, стр. 47—76, 331—352). Приводятся натуральные уравнения и геометрическая характеристика еще 10 классов линейчатых поверхностей конгруэнции. Преобразованием Егорова конгруэнции автор называет результат аффинного преобразования $E(v)$ каждой из ∞^1 ее линейчатых поверхностей $\omega^1{}_3=0$ ($v=\text{const}$).

Преобразование $E(v)$ с соответствием средних поверхностей исходной и преобразованной конгруэнций называется преобразованием Егорова 1-го рода. В любой конгруэнции существует ∞^{12} поверхностей (дано их натуральное уравнение), при помощи которых можно осуществить преобразование Егорова 1-го рода

Преобразование E, сохраняющее сопряженность сети, порождаемой преобразуемым семейством линейчатых поверхностей, называется преобразованием Егорова 2-го рода. Справедливо предложение, аналогичное теореме для преобразований 1-го рода. Доказан ряд теорем о поверхностях, могущих служить исходными для преобразований E первого и второго рода. Рассмотрена „задача Туганова" для линейчатой поверхности конгруэнции, аналогичная рассмотренной в метрической теории (РЖМат, 1956, 4822). На этом пути найдена новая геометрическая характеристика поверхностей классов: $\lambda : \nu=\text{const}$, $\mu : \tau=\text{const}$, $\nu=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$, $\tau=0$. Рассмотрен случай параллельности C_c-репера конгруэнции каноническому реперу средней поверхности. Последняя становится аффинно-минимальной поверхностью (необходимо и достаточно), причем ее эллиптическим (гиперболическим) точкам соответствуют гиперболические (эллиптические) лучи конгруэнции. Найдено необходимое и достаточное условие того, чтобы U_c-репер конгруэнции был параллелен каноническому реперу индикаторной поверхности. В заключение дана геометрическая характеристика всех 9 инвариантов конгруэнции $I_1, \ldots, I_9$, причем инварианты $I_1, I_2, I_4, I_5, I_6, I_7$ выражены только через $\varkappa, \rho, \nu, \tau, p$ и $\varkappa_c, \rho_c, \nu_c, \tau_c, p_c$ — инварианты любой сопряженной пары линейчатых поверхностей конгруэнции.

Л. М. Семиусова

809. О канонических поверхностях. Цихистави В., Тр. Телавск. гос. пед. ин-та, 1957, 2, 413—416 (груз.)

Каноническими автор называет такие поверхности проективного пространства, центральные проекции которых дают каноническую сеть на проективной плоскости. В статье доказывается теорема: Поверхность будет канонической тогда и только тогда, когда ее директрисы Вильчинского пройдут через одну точку.

А. Р. Хволес

810. Конгруэнция индикатрис поверхности в 3-мерном пространстве. Туганов Н. Г., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1, М., АН СССР, 1956, 172—173

1. Дан краткий обзор результатов о конгруэнции индикатрис поверхности в евклидовом и аффинном пространствах, опубликованных ранее (РЖМат, 1953, 423; 1954, 4157), и введено аналогичное понятие в проективно-дифференциальной геометрии: индикатрисой поверхности в точке называется кривая 2-го порядка C^2, касающаяся асимптотических касательных поверхности в точках пересечения их с произвольной фиксированной плоскостью. Линии на поверхности, вдоль которых индикатрисы имеют огибающую, называются линиями полюсов. Они характеризуются тем, что вдоль них две смежные индикатрисы в пределе лежат на квадриках пучка

$$hz^2+xy-kyz-\frac{1}{k}\,z\chi-z-m=0,$$

где индекс h — произвольная функция точки поверхности. Квадрики одного индекса, соответствующие трем линиям полюсов, исходящим из одной точки, образуют пучок с центрами на оси (MM_3).

2. Общая конгруэнция линий C^2 отображается по принципу взаимных поляр относительно фиксированной квадрики на конгруэнцию конусов второго порядка, вершины которых описывают поверхность, соответствующую по асимптотическим линиям обертке плоскостей линий C^2 конгруэнции. Фокальные семейства обеих конгруэнций соответствуют. Конгруэнция конусов изображается на гиперквадрике $Q_4{}^2$ в пространстве P_5 конгруэнцией линий C^2, причем фокальные семейства соответствуют. Это открывает возможность преобразования исходной конгруэнции линий C^2.

Л. М. Семиусова

811. Поверхности с плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна. Сальвельев С. И., Докл. АН СССР, 1957, 115, № 4, 663—665

Развертывающиеся поверхности трехмерного пространства обобщаются на n-мерные поверхности в N-мерном проективном пространстве с p-мерными плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна. Размерность $n+R$ соприкасающихся плоскостей может иметь для различных поверхностей значения от $n+1$ до $n+{}^1/_2\,(n-p)\,(n-p+1)$. При $R>n-p$, $n-p>1$ поверхность является конической с $(p-1)$-мерной плоской вершиной. В случае $R=1$ поверхность при $n-p>1$ является гиперповерхностью.

Дается проективная классификация n-мерных поверхностей с $(n-2)$-мерными образующими.

К. И. Гринцевичюс

812. Проективное изгибание между точечными соответствиями второго рода. Сперанца (Applicabilità proiettiva fra trasformazioni puntuali di 2 ^{a} specie. Speranza Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1956, 11, № 4, 526—537 (итал.)

Проективное изгибание соответствий $T \to T'$ (T — соответствие между π_1 и π_2, T'—между π_1' и π_2') состоит из соответствий U_1 между π_1 и π_1' и U_2 между π_2 и π_2', для которых справедливы утверждения: 1) двойные (простые) характеристические кривые T и T' соответствуют друг другу; 2) характеристические кривые T и T' являются характеристическими кривыми U_1 и U_2. Соответствие Δ: $T \to T'$ между соответствиями T и T' является изгибанием тогда и только тогда, когда паре элементов перегиба E_2, соответствующих друг другу в T, поставлены в Δ в соответствие элементы перегиба E_2, соответствующие друг другу в T'. Изгибание между T и T' является сильным изгибанием, если U_1 и U_2 представляют собой соответствия второго рода и если их двойные (простые) кривые соответствуют двойным (простым) кривым соответствий T и T'. Показано, что предыдущие определения равносильны определениям Вилла (Villa) при помощи представления соответствий на многообразиях Сегре. Найден проективный линейный элемент соответствия второго рода, сохранение которого является необходимым и достаточным условием для наличия сильного изгибания; также установлены аналитические условия для изгибания и обратного изгибания, которое определено аналогичным образом как сильное изгибание с той только разницей, что двойным характеристическим кривым U_1 и U_2 соответствуют простые характеристические кривые T и T' и наоборот.

A. Švec

813. О некоторых конгруэнциях прямых. Дени (Sur certaines congruences de droites. Denis F.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 6, 383—386 (франц.)

Автор предлагает новые геометрические характеристики (приводим одну из них) конгруэнций $\Theta_1[\Theta_2]$ (Shing — Shen Chern, Tôhoku Math. J., 1935, 40, 293—316) являющихся частным случаем конгруэнции (g) в трехмерном проективном пространстве. При отнесении к параметрам u, v развертывающихся поверхностей конгруэнция (g) определяется системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$y^{10}=mz, \quad z^{01}=ny,$$

$$y^{02}=ay+bz+cy^{01}+dz^{10}, \quad z^{20}=a_1y+b_1z+c_1y^{01}+dz^{10},$$

$$mnc_1d \neq 0,$$

где надлежащим образом подобраны факторы пропорциональности координат y, z фокусов луча g (Wilczynski E. I., Mém. Acad. roy. Belgique., 1910, ser. 2, III).

Рассмотрим отображение конгруэнции (g) в виде поверхности (G) на гиперквадрике Клейна в пятимерном пространстве. Пяти семействам ∞^1 главных линий (Fubini G., Cech. E., Geom. proect. dif., 1927, App. III Terracini A.) соответствуют пять семейств ∞^1 «главных

поверхностей» конгруэнции (g). Если (g) представляет собой конгруэнцию $\Theta_1[\Theta_2]$, то выполняется необходимое и достаточное условие: ее ∞^1 развертывающихся поверхностей $du=0[dv=0]$ суть «главные поверхности».

К. Н. Тихоцкий

814. О соотношениях между основными инвариантами параллельных гиперповерхностей в четырехмерном пространстве. Катков Г. Ф., Сб. научн. тр. Куйбышевск. индустр. ин-та, 1957, вып. 7(а), 71—75

В четырехмерном евклидовом пространстве, отнесенном к общим криволинейным координатам u^1, u^2, u^3, u^4, рассматривается гиперповерхность уровня

$$\varphi(u^1, u^2, u^3, u^4)=c. \qquad (1)$$

Строится гиперповерхность

$$\varphi^*(u^1, u^2, u^3, u^4)=c^*, \qquad (2)$$

параллельная к гиперповерхности (1).

Пусть l — расстояние от гиперповерхности (1) до гиперповерхности (2), отложенное по соответствующим нормалям.

Основными инвариантами гиперповерхности (1) являются: полная кривизна K, средняя кривизна H и промежуточная кривизна L. Обозначив через K^*, H^*, L^* значения основных инвариантов гиперповерхности (2) в соответствующей точке, автор получает явные выражения для K^*, L^*, H^* через K, L, H и l.

Эти выражения имеют вид:

$$K^*=\frac{P_1}{N},\quad L^*=\frac{P_2}{N},\quad H^*=\frac{P_3}{N},$$

где N — многочлен 6-й, P_1 — 3-й, P_2 — 4-й, P_3 — 5-й степени относительно l. Коэффициенты этих многочленов являются целыми рациональными функциями от K, L, H степени не выше четвертой.

Ю. Л. Рабинович

815. Анизотропные тензоры. Смит, Ривлин (The anisotropic tensors. Smith G. F., Rivlin R. S.), Quart. Appl. Math., 1957, **15**, № 3, 308—314 (англ.)

Рассматриваются тензоры евклидова трехмерного пространства в декартовых прямоугольных координатах. Тензор называется изотропным, если его координаты инвариантны относительно любого ортогонального преобразования; в противном случае тензор анизотропный.

Показано, что всякий анизотропный тензор с координатами, инвариантными по отношению к подгруппе T группы ортогональных преобразований, есть линейная комбинация со скалярными коэффициентами произведений конечного числа тензоров. Указанные тензоры найдены для случаев, когда T — группа, связанная с кристаллами доматического класса (domatic class) моноклинической системы, когда T — такая же группа, соответствующая пирамидально-ромбическому классу ромбической системы, и когда подгруппа T образована вращениями вокруг прямой h и отражениями от плоскости, перпендикулярной к h.

Г. Б. Гуревич

816 К. Введение в дифференциальную геометрию. Бляшке В. Перев. с нем. М., Гостехиздат, 1957, 223 стр., илл., 6 р. 95 к.

Изложение теории кривых и поверхностей методом внешних форм. Гл. 1 содержит основные элементарные сведения о векторах, определителях и матрицах. В гл. 2 излагается теория полос. Вводятся интегральные и дифференциальные инварианты полосы — геодезическое кручение, нормальная кривизна, геодезическая кривизна, и рассматриваются специальные виды полос: асимптотические, полосы кривизны, геодезические. Теория кривых вытекает из рассмотрения асимптотических полос. Доказывается теорема о четырех вершинах овала. Глава заканчивается изложением вопроса о деформации полосы и собранием задач и теорем. Отметим подробное изложение поведения линий откоса на квадриках вращения и семь доказательств основного изопериметрического свойства круга.

Гл. 3 содержит краткое изложение основ метода внешних форм в объеме, достаточном для изложения теории поверхностей. Вводятся формы Пфаффа, альтернированное произведение форм, внешний дифференциал формы, производные, отвечающие паре форм, и альтернированные формы r-й ступени.

Гл. 4 посвящена внутренней геометрии поверхностей. На поверхности вводится ортогональная сеть и сопровождающий прямоугольный триэдр, составляются деривационные уравнения и выводятся условия интегрируемости. Достаточность этих условий для интегрируемости системы не доказывается.

Вводится геодезическая кривизна линии на поверхности и гауссова кривизна поверхности. Доказывается инвариантность гауссовой кривизны при изгибании. Выводится интегральная формула Гаусса — Бонне, из которой делается ряд следствий топологического характера. Рассматривается параллельное перенесение вектора на поверхности. Применение метода внешних форм позволяет автору избежать большого счета.

Гл. 5 посвящается геодезическим линиям. Здесь рассматриваются также поверхности постоянной кривизны, вводятся дифференциальные параметры Бельтрами, формулы Грина на поверхности и сети Лиувилля. Глава заканчивается изложением результата Артина — Герглотца о поведении геодезических на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Внешняя геометрия поверхностей составляет содержание гл. 6. Здесь приведено изложение доказательства Герглотца однозначной определенности овалоида и его жесткости в малом.

В гл. 7 излагается теория минимальных поверхностей. В конце каждой главы приведены хорошо подобранные задачи и теоремы. Все изложение сопровождается многочисленными краткими историческими справками.

Я. П. Бланк

817 Д. Точечное взаимно-однозначное соответствие двух поверхностей с заданным свойством соприкасающихся квадрик Ли. Малаховский В. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1958.

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

818. К вопросу о делимости тензоров в линейных безразмерных пространствах. Трупин Ш. Д., Rakstі. Rigas ped. inst., Уч. зап. Рижск. пед. ин-т, 1957, **4**, 59—83.

Доказывается теорема о единственности разложения (в случае, когда оно существует) полилинейной функции на линейные и нераспадающиеся квадратичные формы: Если

$$\varphi_1 x.\varphi_2 x \ldots \varphi_m x.\ \ \Phi_1 xx \ldots \Phi_n xx = \psi_1 x.\psi_2 x \ldots \psi_m x \times$$

$$\times \Psi_1 xx \ldots \Psi_n xx, \text{ то } \varphi_i x = \sigma_i \psi_{p_i} x;\ \ \Phi_k xx = \tau_k \Psi_{q_k}\, xx$$

($i=1, 2, \ldots, m$; $k=1, 2, \ldots, n$), где σ_i и τ_k — некоторые постоянные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — какие-либо перестановки чисел $1, 2, \ldots, m$ и $1, 2, \ldots, n$ соответственно. Эта теорема обобщает доказанную в работе А. М. Лопшица „Некоторые задачи тензорной алгебры в безразмерных пространствах („Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, вып. VI, 1948, 355—419) теорему о единственности разложения полилинейной функции на линейные множители.

В. Л. Загускин

819. Вычисление полной системы тензоров с помощью символического умножения. Робинсон (Calculation of a complete system of tensors with the aid of symbolic multiplication. Robinson Lewis Bayard), Math. Mag., 1957, **31**, №1, 5—14 (англ.)

Система однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$y''^k + p_s{}^k y'^s + q_s{}^k y^s = 0 \ (k,\ s = 1,\ 2),\ y^k = y^k(x) \ (S)$$

сохраняет свой вид при преобразованиях

$$y^k = \alpha_s{}^k(x)\eta^s,\quad x = f(\xi),\ \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1{}^1, & \alpha_1{}^2, & 0 \\ \alpha_2{}^1, & \alpha_2{}^2, & 0 \\ 0, & 0, & \xi' \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

Ковариантны системы (S) найдены Вильчинским. Автор называет тензором порядка $r=1$, связанным с системой (S), совокупность величин I_1, I_2, I_3, зависящих от y^i, $y^{i'}$, $p_s{}^k$, $p_s{}'^k$, $q_s{}^k$ и преобразующихся при замене(1) по закону

$$\overline{I}_\alpha = \Delta_\alpha^\sigma\ I_\sigma \quad (\alpha,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3),$$

где Δ_α^σ миноры Δ. Определяется тензор $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}$ порядка $r = 2$, преобразующийся как произведение $I_\alpha \cdot I_\beta$. Нахождение этих тензоров сводится к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных (I) для $r = 2$ и (II) для $r = 1$. Имея решение системы (II), можно решить систему (I) с помощью символического уравнения; окончательный результат таков:

$$I_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^{\sigma\tau}\Psi_{\sigma\tau},$$

где $\Psi_{\sigma\tau}$ — произвольные функции от ковариантов Вильчинского, а $N_{\alpha\beta}^{\sigma\tau}$ — элементы определенной матрицы. Настоящая статья продолжает одну из предыдущих работ автора (Докл. АН СССР, 1937, **15**, № 8, 411—414).

А. П. Широков

820. О некоторых пространственных моделях. Булиган (Sur quelques modèles spatiaux. Bouligand Georges), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 3, 133—138 (франц.)

Излагаются эвристические соображения по поводу изображения римановых пространств моделями, расположенными в евклидовом пространстве. Автор считает, что конфигурационные пространства механических систем лучше представляют риманову метрику, чем изометрическое вложение в евклидово пространство высокой размерности. Подчеркивается, в частности, трудность вложения в целом. Отмечается, что в общем случае построенная автором модель (Principes de l'analyse géométrique, I, 1949) дает лишь финслеровы метрики с центрально-симметричной индикатрисой, и указывается новая модель, дающая (локально) произвольную финслерову метрику.

А. И. Фет

821. О римановых случаях в классе (C) вариационных метрик типа $ds=f(u, v; du, dv)$. Коз (Sur les cas riemanniens dans la classe (C) de métriques variationnelles du type $ds=f\ (u, v; du, dv)$. Coz Marcel), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 3, 139—145 (франц.)

Результаты работы в основном содержатся в последующей заметке автора (реф. 822). Среди других результатов доказывается, что замены координат, сохраняющие поверхности и кривые расслоения (см. там же), сохраняют также свойства модели Г. Булигана давать риманову метрику. Доказательства лишь намечены.

А. И. Фет

822. О римановых случаях вариационных метрик $\delta s=f(u, v; du, dv)$. Коз (Sur les cas riemanniens de métriques variationnelles $\delta s=f(u, v; du, dv)$. Coz Marcel), C. r. Acad. sci., 1957, **244**, № 14, 1873—1875 (франц.)

Рассматривается модель двумерного риманова пространства в трехмерном евклидовом пространстве, принадлежащая Г. Булигану (Bouligand G., Principes de l'Analyse géométrique, I, 1949). Линейный элемент трехмерного евклидова пространства записывается в криволинейных координатах u, v, w в виде $ds^2=Adu^2+2\,Bdudv+Cdv^2+2\,Fdudw+29\,dvdw+Hdw^2$. Поверхности $w=\text{const}$ называются поверхностями расслоения (surfaces de clivage), кривые $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ — кривыми расслоения (fibres). Фиксируются w_1, $w_2(w_1<w_2)$. На некоторой поверхности w_0, пересекающей все линии расслоения, кривой l приписывается длина, равная площади поверхности, образованной проходящими через l кривыми расслоения и ограниченной поверхностями $w=w_1$, $w=w_2$. Тем самым на w_0 задается элемент длины финслеровой геометрии

$$\delta s = f(u, v, du, dv) =$$

$$= \int_{w_1}^{w_2} \sqrt{H(A\,du^2+2\,Bdudv+Cdv^2)-(Fdu+Gdv)^2}\ dw.$$

Автор изучает условия, при которых указанный процесс задает на w_0 риманову метрику. Таким условием является, например, конформность отображений, определяемых для произвольных поверхностей $w=c_1$, $w=c_2$ посредством сдвига вдоль кривых расслоения. Рассматривается частный случай, когда поверхности расслоения составляют часть тройной ортогональной системы. Изложение носит локальный характер.

А. И. Фет

823. О некоторых формулах конформной геометрии подпространств. Прванович (Sur quelques formules de la géométrie conforme du sous-espace. Prvanović Mileva), Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1957, **11**, 53—66 (франц.)

Рассматриваются подпространства V_n риманова пространства V_m, оба с положительно определенной метрикой, причем последнее определяется с точностью до конформного преобразования. В § 2 автор вводит операции, применимые к полю единичных аффинноров, нормальных к данному подпространству V_n. Именно, автор определяет линейное векторное пространство K_{n_1}, которое принадлежит локальному пространству R_m риманова пространства V_m и нормально как V_n, так и соприкасающемуся пространству $E_{n_0+n_1}$ (Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II, 1938, стр. 130). Тогда вышеуказанная операция определяется для единичного аффиннора $\overset{1}{P}{}_{e_1}^{\alpha}$ следующим образом:

$$\mathfrak{D}_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\beta}{}_{e_1} \equiv D_{r_0}\overset{1}{P}{}^{\beta}{}_{e_1} - \overset{0}{B}{}^{\beta}{}_{p_0}\ \overset{0}{B}{}_{\alpha}^{p_0}\ D_{r_0}\ \overset{1}{P}{}^{\alpha}{}_{e_1} \equiv \overset{2\ldots\beta}{T}{}_{r_0e_1},$$

где используется D-символика Ван-дер-Вардена и Бартолотти, а тензор $\overset{2}{T}{}_{r_0e_1}^{\ldots\beta}$ индексом r_0 принадлежит касательному пространству E_{n_0}, индексом e_1 — пространству K_{n_1}, а индексом e_2 — пространству K_{n_2}, которое определяется аналогично пространству K_{n_1}. Тензор $\overset{2\ldots\beta}{T}{}_{r_0e_1}$, а следовательно, и введенная операция оказываются ин-

вариантными относительно конформного преобразования V_m. Аналогично вводятся операции

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}^{e_1}_{\alpha} \equiv D_{r_0} \overset{1}{P}{}^{e_1}_{\alpha} - \overset{0}{B}{}^{p_0}_{\alpha} \overset{0}{B}{}^{\beta}_{p_0} D_{r_0} \overset{1}{P}{}^{e_1}_{\beta} \equiv \overset{2}{T}{}^{e_1}_{r_0}$$

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{2}{P}{}^{\alpha}_{e_1} \equiv D_{r_0} \overset{2}{P}{}^{\alpha}_{e_2} - \overset{0}{B}{}^{\alpha}_{e_0} \overset{0}{B}{}^{e_0}_{\beta} D_{r_0} \overset{2}{P}{}^{\beta}_{e_2} \equiv \overset{3}{T}{}^{\cdots\alpha}_{r_0 e_2} - \overset{2}{T}{}^{\cdot\alpha}_{r_0 \cdot e_2}.$$

В результате автор получает уравнения, аналогичные формулам Френе для V_n и V_m (см. цитированную выше литературу, стр. 132):

$$\mathfrak{D}_{r_0} \overset{1}{P}{}^{\alpha}_{e_1} = \overset{2}{T}{}^{\cdots\alpha}_{r_0 e_1},$$

$$\mathfrak{D}_{r_a} \overset{a}{P}{}^{\alpha}_{e_a} = \overset{a+1}{T}{}^{\cdots\alpha}_{r_0 e_a} - \overset{a}{T}{}^{\cdot\alpha}_{r_0 e_a} \quad (a = 2, 3, \ldots, k),$$

$$\overset{k+1}{T}{}^{\cdots\alpha}_{r_0 e_k} = 0,$$

где k— наименьшее из чисел, для которых $E_{n_0+n_1+\ldots+n_k}$ совпадает с $E_{n_0+n_1+\ldots+n_k+n_{k+1}}$, а индекс α принадлежит пространству $K_{n\alpha}$.

В § 3 показывается, что если тензор $M^{\cdots\alpha}_{r_0 q_x}$ принадлежит индексом r_0 пространству E_{n_0}, индексом q_x пространству K_{n_x} и конформно инвариантен, то тензор

$$\mathfrak{D}_{[p_0} M^{\cdots\tau}_{r_0]q_x} \equiv D_{[p_0} M^{\cdots\tau}_{r_0]q_x} - \overset{0}{B}{}^{\tau}_{t_0} B^{t_0}_{\nu} D_{[p_0} M^{\cdots\nu}_{r_0]q_x}$$

также инвариантен относительно конформного преобразования V_m. На основе введенных операций и выведенных формул автор выводит уравнения, аналогичные уравнениям Гаусса и Кодацци, но инвариантные относительно конформного преобразования V_m. Автор называет их конформными уравнениями Гаусса и Кодацци подпространства V_n риманова пространства V_m относительно поля тензоров $\overset{1}{P}{}^{\alpha}_{e_1}$.

В § 4 для частного случая кривой основная операция вводится равенством

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}_s} w_1^{\alpha} = \frac{\delta}{\delta_s} w_1^{\alpha} - \xi^{\alpha}\, \xi^{\nu} \frac{\delta}{\delta_s} w_1^{\nu},$$

где предполагается, что вектор w_1^{α} при конформном преобразовании изменяется по закону $\overline{w}_1^{\alpha} = e^{-\sigma} w_1^{\alpha}$, а ξ^{α} — касательный вектор кривой. Для этого частного случая записываются формулы Френе. В. И. Ведерников

824. Аксиома плоскостей в дескриптивной геометрии пространств K-протяжений. **Су Бу-цин** (Axiom of the plane in a descriptive geometry of K-spreads. Su Buchin), Math. Nachr., 1957, **16**, № 3-4, 215—226 (англ.)

Излагается доказательство одного признака дескриптивной плоскостности пространства K-протяженностей Дугласа. Результат был опубликован в китайском журнале Sci. Record Acad. Sinica, 1950, **3**, 7—16. В N-мерном пространстве K-протяженностей L-мерное подпространство $S(K<L<N)$ называется вполне плоским, если всякая K-протяженность, касающаяся S в одной точке, лежит целиком в S. Следующее предложение называется аксиомой плоскостей: Существует L-мерное дважды дифференцируемое вполне плоское подмногообразие, касающееся произвольно заданного L-вектора в произвольной точке (L фиксировано). Доказана теорема: Если аксиома плоскостей выполняется, то пространство дескриптивно плоское. Эта теорема является обобщением аналогичной теоремы Картана для римановых пространств и теоремы Ван Сянь-чжуна для пространств обобщенных путей. Гу Чао-хао

825. О тензоре, присоединенном к соответствию между проективными пространствами. Врэнчану (Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proiettivi. Vrănceanu Gheorghe), Boll. Unione mat. ital., 1957, **12**, № 4, 489—506 (итал.; рез. англ.)

Пусть $E_n(u^1, \ldots, u^n)$ — евклидово пространство в декартовых координатах и $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ — проективно-евклидово пространство в криволинейных координатах. Пусть отображение этих пространств, переводящее геодезические в прямые, определяется уравнениями

$$u^i = u^i(x^1, \ldots, x^n). \tag{1}$$

В пространстве A_n вводится тензор $\Pi_{jk}{}^i$ проективной связности, связанный с аффинной связностью $\Gamma_{jk}{}^i$ этого пространства соотношением

$$\Gamma_{jk}{}^i = \Pi_{jk}{}^i + \delta_j{}^i \frac{v_k}{v} + \delta^i{}_k \frac{v_j}{v},$$

где $v_k = \partial v/\partial x^k$, $v = \Delta^{-\frac{1}{n+1}}$ и Δ — якобиан системы (1).

Автор находит условия, которым подчиняется тензор $\Pi_{jk}{}^i$, и показывает, как, зная этот тензор, найти уравнения (1).

Находится геометрический смысл ковариантных тензоров

$$\Pi_{jk} = \Pi_{sj}{}^i \Pi_{ik}{}^s, \quad \Pi_{jkl} = \Pi_{sj}{}^i \Pi_{qk}{}^s \Pi_{il}{}^q.$$

Рассматривается квадратичное соответствие

$$\rho v'^i = \Pi_{jk}{}^i v^j v^k$$

между векторами, исходящими из одной точки в A_n. При $n = 2$ отмечается случай, когда это соответствие является вырожденным в том смысле, что в нем каждому вектору v ставится в соответствие один и тот же вектор v'. В этом случае тензор Π_{jk} равен нулю и преобразование (1) будет преобразованием 3-го рода. Находится широта класса преобразований (1) (одна функция $n-1$ переменных), для которых $\Pi_{jk}{}^{\alpha} = 0$ $(\alpha > 1)$.

Два преобразования $u^i = u^i(x^1, \ldots, x^n)$, $u'^i = u'^i(x'^1, \ldots, x'^n)$ проективно-эквивалентны (связаны соотношениями $u'^i = (\alpha^i{}_j u^j + \alpha^i)/(\alpha_j{}^0 u^j + \alpha^0)$), если существует преобразование $x'^i = (a_j{}^i x^j + a^i)/(a_j{}^0 x^j + a^j)$, переводящее тензор $\Pi_{jk}{}^i$ в тензор $\Pi'_{jk}{}^i$. Справедливо и обратное.

Если существует просто транзитивная абелева группа проективных преобразований в себя соответствия (1) и если эта группа может быть рассматриваема как группа переносов, то $\Pi_{jk}{}^i$ будут постоянными. Дается классификация соответствий (1) для этого случая при $n = 2$. Доказывается ряд предложений, например: 1) соответствие первого рода между плоскостями не может допускать преобразований, которые оставляют неподвижной некоторую точку, 2) точечное соответствие между проективными плоскостями может допускать группу движений не более чем от 2, 3 и 4 параметров, в зависимости от того, будет ли это соответствие первого, второго или третьего рода, причем максимум достигается только для пространств с постоянным тензором проективной связности.

При $n > 2$ соответствие между проективными пространствами может иметь лишь одну группу преобразований в себя, зависящую от $n^2 - n + 2$ параметров.
Н. И. Кованцов

826. Об определении некоторой аффинной связности в пространстве ареальной метрики. Су Бу-цин (On the determination of certain affine connections in an areal space. Su Buchin), Кэсюэ цзилу Sci. Rec., 1957, **1**, № 4, 195—198 (англ.)

В n-мерном ареальном пространстве S_n с m-мерной ареальной метрикой

$$V = \int_{(m)} F(x, p)\, du^1 \dots du^m, \qquad (1)$$

где $x^i = x^i(u^\alpha), (p) \equiv (p_\alpha{}^i) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right)$ $(i = 1, \dots, n;$ $\alpha = 1, \dots, m)$ определяют m-мерную аналитическую поверхность V_m, по которой распространен интеграл (1), а фундаментальная функция $F(x, p)$ удовлетворяет условиям инвариантности, ищется произвол некоторого класса связностей $\Gamma_{jk}^{*i}(x, p) = \Gamma_{kj}^{*i}(x, p)$. Эти связности определяются двумя условиями:

1) ареальная метрика инвариантна при параллельных перенесениях,

2) $\Gamma^{*h}_{jk} \left|{}^{\alpha}_{i}\right. p^j_\alpha p^k_h = 0,$

где $p^k_h = \frac{1}{F} F \left|{}^{\alpha}_{h}\right. p^k_\alpha$ и символ $\left|{}^{\alpha}_{k}\right.$ обозначает производную по p^k_α.

Автор показывает, что такие связности определяются с произволом $\rho = \frac{1}{2} n(n^2 + n - 4) + m$ функций от $n + mn$ аргументов x^i и p^r_α.
Л. Е. Евтушик

827. Физические свойства некоторых пустых пространств-времен. Джозеф (Physical properties of some empty space-times. Joseuh V.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1957, **53**, № 4, 836—842 (англ.)

Автор, исходя из идеи, что сингулярность в решениях уравнений поля $R_{\alpha\beta} = 0$ пустого пространства-времени общей теории относительности должна определяться или физическими свойствами („физическая сингулярность"), или возникать за счет выбора координат („координатная сингулярность"), делает вывод, что первая из них должна иметь инвариантный смысл.

Положив в основу теорему, доказанную референтом (РЖМат, 1956, 4866), о том, что существуют три и только три типа полей тяготения, и используя канонические формы для компонент тензора кривизны в ортрепере для каждого из этих трех типов, автор применяет этот результат к конкретным известным решениям уравнений $R_{\alpha\beta} = 0$. Рассматривая пространства, определяемые метрикой $ds^2 = A^{-1} \exp\{(c_1 + c_2)t\}\, dt^2 - A^{-1} \exp(c_2 t)\, dx^2 - A dy^2 - \{Ax^2 + A^{-1} \exp(c_1 t)\}\, dz^2 + 2Ax\, dy dz$, где $A = k \operatorname{sech}(kt + a)$, c_1, c_2, k, a — постоянные, $c_1 c_2 = k^2$, он находит, что пространство допускает геодезически параллельные гиперповерхности $t = \text{const}$, которые будут минимальными инвариантными многообразиями 3-членной группы движений. Это пространство принадлежит к первому типу полей тяготения классификации референта, для которого в неголономном ортрепере бивекторного 6-мерного пространства (с собирательными индексами 23—1, 31—2, 12—3, 10—4, 20—5, 30—6) канонический вид тензора кривизны будет

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \sum \alpha_i = \sum \beta_i = 0;$$

автор находит значения инвариантов α_i, β_i как функций от A, k, c_1 c_2, dA/dt. Отсюда следует, что сингулярность при $x = \infty$ не физическая, а координатная, Исследуется поведение инвариантов α_i, β_i при $t = \pm\infty$. Наоборот, для статического пространства с метрикой $ds^2 = x^{-2} dt^2 - x^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, допускающего 4-членную группу движений и не регулярное решение уравнений поля, когда инварианты α_k и β_k имеют вид $-(1/2)\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -2x^{-6}$, $\beta_k = 0$, сингулярность в $x = 0$ физическая. Этот метод, очевидно, может быть распространен, в принципе, на любое пространство Эйнштейна.

Автор применяет также теорию Пирани гравитационной радиации, основным результатом которой (Pirani F. A. E. Phys. Rev., 1957, **105**, № 31, 1089—1099) является теорема: Только пространства II и III типов, по классификации референта, могут обладать гравитационной радиацией, к конкретным пространствам.

Примечание референта. В результате переписки, имевшей место между референтом и Пирани, между ними установилось согласованное мнение, что среди гипотез, положенных Пирани в основу развиваемой им теории гравитационной радиации, имеются такие, которые требуют уточнения. Поэтому результаты, полученные автором о сингулярностях поля, не вызывают возражения, чего нельзя сказать о выводах, касающихся гравитационной радиации,
А. З. Петров

828. Электромагнитные индукции в общем релятивизме и принцип Ферма. Фам Мау Куан (Induction électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat. Pham Mau Quan), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1957, **1**, № 1, 54—80 (франц.)

Подытоживаются исследования автора об электромагнитных индукциях в пространстве времени с метрикой $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, характеристических многообразиях уравнений Максвелла, а также рассматривается принцип Ферма в гравитационной теории. Электромагнитное поле задается двумя кососимметрическими тензорами: электрическое поле $H_{\alpha\beta}$ и магнитное $G_{\alpha\beta}$ при условиях $G_{oi} = \varepsilon H_{oi}$, $H_{ij} = \mu G_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$, где скаляры ε и μ представляют диэлектрик и магнитную проницаемость среды. Векторы электрической индукции определяются в виде

$$E^\beta = \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta}, \quad D^\beta = \nabla_\alpha \overset{*}{G}{}^{\alpha\beta}.$$

При этом $G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} = \varepsilon H_{\alpha\beta}$ (если $\varepsilon\mu = 1$),

$\overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta}$, $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминатный тензор пространства, а уравнения Максвелла имеют вид $\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0$, $\nabla_\alpha \overset{*}{G}{}^{\alpha\beta} = I^\beta$, где I^β — вектор тока.

Формулируется постановка задачи Коши для системы уравнений гравитационного поля и уравнений Мак-

свелла и результаты Фурес — Брюа (Fourés — Bruhat) для решения этой задачи, показавшей существование и единственность решения в классе аналитических функций (РЖМат, 1955, 234), исследуются характеристические многообразия системы уравнений Максвелла, определяемые уравнениями $g^{00}-(1-\varepsilon\mu)(u^0)^2=0$.

Исследуя присоединенную к данной метрику $\bar{g}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}-\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)\mu_\alpha\,\mu_\beta$ (u_α — единичный вектор скорости точки среды), автор определяет бихарактеристику уравнений Максвелла как изотропные геодезические в пространстве присоединенной метрики. Записываются условия непрерывного движения заряженной жидкости в стационарном случае.

Доказывается теорема: Если движущуюся среду считать непрерывной и для присоединенной метрики $\bar{g}_{00}\neq 0$, то электромагнитные линии тока пространства реализуются как линии, на которых достигает экстремума интеграл

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0=\int_{z_0}^{z_1}\left(\varepsilon\varepsilon'\sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}}\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}_f}-\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}\right)du$$

($\varepsilon,\ \varepsilon'=\mp 1$), т. е. время — экстремально. Эту теорему автор предлагает рассматривать, как обобщение принципа Ферма, для рассматриваемой задачи. В случае плоского пространства Минковского этот интеграл приводит к обычному принципу Ферма. А. З. Петров

829. Проблема эволюции в случае чистой материи. Фурес-Брюа (Le problème de l'évolution dans le cas matière pure. Fourès-Bruhat Yvonne), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 12, 1809—1812 (франц.)

Теорема существования и единственности, сформулированная Лихнеровичем для неаналитических решений, применяется к случаю „чистой" материи, когда тензор энергии-импульса материи $T^{\alpha\beta}=\rho u^\alpha u^\beta$, где ρ — плотность материи, а u^α — единичный вектор 4-скорости материи. Метрика пространства задается формой $ds^2=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$, а уравнение поля $S^{\alpha\beta}=\varkappa T^{\alpha\beta}$ ($\varkappa$ — постоянный множитель), $S^{\alpha\beta}=R^{\alpha\beta}-\frac{R}{2}g^{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна, удовлетворяющий закону сохранения $\nabla_\alpha S^{\alpha\beta}=0$. Тензор Риччи можно представить в виде $R^{\alpha\beta}=G^{\alpha\beta}+L^{\alpha\beta}$, где $G^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}+H^{\alpha\beta}$, $L^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left(g^{\beta\lambda}\partial_\lambda F^\alpha+g^{\alpha\lambda}\partial_\lambda F^\beta\right)$. $H^{\alpha\beta}$ зависит только от $g_{\alpha\beta}$ и его первых производных, а $F^\lambda=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\,g^{\lambda\mu}\right)$.

Вводя изотермические (гармонические) координаты, для которых $F^\lambda=0$, уравнение поля можно записать в виде (1) $G^{\alpha\beta}=\varkappa\left(T^{\alpha\beta}-\frac{T}{2}g^{\alpha\beta}\right)$, где имеет место закон сохранения $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}=0$; эти уравнения могут быть преобразованы к двум системам: (2) $u^\alpha\nabla_\alpha u^\beta=0$, (3) $\nabla_\alpha(\rho u^\alpha)=0$.

Решается задача Коши, которая, как показал Лихнерович, может быть приведена к двум задачам: определение начальных данных Коши (проблема эволюции) и интегрирование по времени. Доказывается существование решений, удовлетворяющих уравнениям исследуемой системы (1), (2) (3). А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

830. Косые произведения в алгебраической геометрии. Вейль (Fibre-spaces in algebraic geometry. Weil André), Algebr. Geom. Conf. Notes, Univ. Chicago. Chicago, s. a., 55—59 (англ.)

Излагается (аналогично обычному) определение косого произведения, у которого база, слой, группа — абстрактные алгебраические многообразия, снабженные топологией Зарисского, а координатные отображения предполагаются рациональными (регулярными). Указываются виды таких произведений, представляющие интерес: а) произведения, группой которых является мультипликативная группа проективной прямой — они находятся во взаимно однозначном соответствии с классами дивизоров (относительно линейной эквивалентности); б) произведения над кривой с одномерной аффинной или проективной группой (последние соответствуют линейчатым поверхностям); в) произведения над неособым многообразием с аффинным пространством в качестве слоя и аффинной группой (например, касательный пучок, существенный для чисто алгебраического определения эйлеровой характеристики, канонического дивизора и инвариантов типа Штифеля, Уитнея, Черна).

Отмечается, что Чжоу предложена концепция косого произведения, более общая и имеющая, по-видимому, более широкие приложения. И. З. Розенкноп

831. Тензоры кривизны двух линейных связностей, связанные посредством регулярного тензора типа (0,2). Маурер-Тизон (Les tenseurs de courbure de deux connexions linéaires associées par l'intermédiaire d'un tenseur régulier de type (0, 2). Maurer-Tison Françoise), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 1, 38—40 (франц.)

Предполагая, что дифференцируемое многообразие V_n класса C^2 снабжено полем тензора $g_{\alpha\beta}$ и произвольной линейной связностью L непрерывных коэффициентов $L^\alpha_{\beta\gamma}$, автор получает для тензора кривизны $\bar{P}^\alpha_{\beta\lambda\mu}$ линейной связности $\bar{L}$ коэффициентов $\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}$, связанной с L формулой

$$\bar{L}^\alpha_{\beta\gamma}=L^\alpha_{\beta\gamma}+g^{\sigma\alpha}D_\gamma\,g_{\sigma\beta},$$

где D_γ — символ ковариантного дифференцирования относительно L, следующее выражение:

$$\bar{P}^\alpha_{\beta\lambda\mu}=-g^{\sigma\alpha}P^\rho_{\sigma\lambda\mu}\,g_{\rho\beta}.$$

Автор показывает, что полученный результат непосредственно применим в единой теории поля.

Наконец, дополнительно предполагая, что

$$S_\lambda=\frac{1}{2}\left(L^\alpha_{\lambda\alpha}-L^\alpha_{\alpha\lambda}\right)=0,$$

он получает следующее соотношение между тензором Риччи $P_{\alpha\beta}$ и тензором кривизны связности L:

$$P_{\alpha\beta}+g^{\sigma\lambda}P^\rho_{\sigma\lambda\alpha}\,g_{\rho\beta}=0.$$

И. Г. Гаспарян

832. Объединенная кривизна векторного поля. Каул (Union curvature of a vector field. Kaul R. N.), Tensor, 1957, 7, № 3, 185—189 (англ.)

Пусть риманово пространство V_{n+1}, отнесенное к координатам $y^1,\ldots,y^{n+1}$, с метрическим тензором $a_{\mu\nu}$ ($\mu,\nu=1,\ldots,n+1$) содержит риманово пространство V_n, отнесенное к координатам $x^1,\ldots,x^n$, с метрическим тен-

зором g_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$. Пусть, далее, $\overline{V}$ — единичное векторное поле V_n с компонентами p^i и $v^\mu = p^i y^\mu_{,i}$, где функции $y^\mu = y^\mu(x^1, \ldots, x^n)$ определяют вложение V_n в V_{n+1}, а запятая „,“ — знак ковариантного дифференцирования в V_n. Если C — кривая в V_n, заданная в виде $x^i = x(s)$, то из деривационных формул первой группы следует, что

$$v^\alpha_{|\beta}\frac{dy^\beta}{ds} = {}_vK^\alpha = \Omega_{ij}p^i\frac{dx^j}{ds}N^\alpha + p^i_{,j}\frac{dx^j}{ds}\ y^\alpha_{,i},$$

где Ω_{ij} — коэффициенты 2-й квадратичной формы V_n, N^α — единичная нормаль к V_n, „|“ — знак ковариантной производной в V_{n+1}. При этом ${}_vK^\alpha$ и $p^i_{,j}\frac{dx^j}{ds}$ соответственно называются векторами абсолютной и геодезической кривизны векторного поля $\overline{V}$ относительно кривой C, а $\Omega_{ij}p^i\frac{dx^j}{ds} = {}_vK_n$ — нормальной кривизной $\overline{V}$ вдоль C.

Если еще дан единичный вектор $\overline{w}$ в V_{n+1} с компонентами $w^\alpha = t^i y^\alpha_{,i} + rN^\alpha$, то вектор

$$\mu^i = p^i_{,k}\frac{dx^k}{ds} - e({}_vK_n)\sigma^i,$$

где $\sigma^i = p_l(p^l u^i - u^l p^i)$, $u^i = \frac{t^i}{r}$, автор называет вектором объединенной кривизны векторного поля $\overline{V}$ относительно кривой C (и вектора $\overline{w}$), а его длину — объединенной кривизной. Из этого определения получено несколько элементарных следствий.

Н. С. Синюков

833. Заметка об инфинитезимальных группах голономии. Нейенхёйс (A note on infinitesimal holonomy groups. Nijenhuis Albert), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 145—146 (англ.)

Автор дает более прямое доказательство леммы: Если размерность инфинитезимальной группы голономии $H^t(x)$ постоянна в окрестности точки x многообразия P, то инфинитезимальная группа голономии $H_i(x)$ совпадает с локальной группой голономии $H^*(x)$. С. П. Фиников

834. О вложении в целом пространств аффинной связности в аффинное пространство. Гу-Чао-хао, Кэсюэ цзилу, Sci, Rec., 1958, 2, № 1, 7—9 (русск.)

Задача погружения пространства аффинной связности без кручения в аффинное пространство (Лаптев Г. Ф., Докл. АН СССР, 1943, **41**, 329—335) ставится в целом. Доказывается, что всякое n-мерное пространство аффинной связности R^n без кручения класса C^s $(3 \leqslant s \leqslant \infty, \omega)$ можно погрузить C^s в $\frac{n(n+5)}{2}$ - мерное аффинное пространство.

Г. Ф. Лаптев

835. Поток, присоединенный к мероморфной дифференциальной форме на комплексном аналитическом многообразии. Шварц (Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analitique complexe. Schwartz Laurent), Colloque internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 185—195) (франц.)

Пусть V — связное аналитическое многообразие n комплексных измерений. Дифференциальная форма называется мероморфной, если в окрестности каждой точки V она является отношением голоморфной формы к голоморфной функции. Дифференциальная форма называется полумероморфной, если она в окрестности каждой точки V является отношением бесконечно дифференцируемой формы к голоморфной функции. Полумероморфная форма называется регулярной, если в окрестности каждой точки она является суммой конечного числа полумероморфных форм, все полюсы которых расположены в одном подмногообразии (n—1 измерений) без особенностей. В соответствии с комплексными координатами z и сопряженными $\bar{z}$ каждая форма имеет две степени (p,q).

Доказывается теорема: Для всего аналитического многообразия V существует операция vp (главное значение Коши), и только одна, которая каждой дифференциальной регулярной полумероморфной форме $\{\omega\}$ степеней $\{p, q\}$ на V приводит в соответствие поток $vp\omega$ степеней (p, q) со следующими свойствами: 1) если локально форма $\{\omega\}$ обладает суммируемыми коэффициентами, то $vp\,\omega = \omega$; 2) операция vp линейна по отношению к структурам модулей на конце полуголоморфных, дифференциальных операторов.

В качестве приложения исследуется проблема Кузена (Cousin) о нахождении на V дифференциальной мероморфной формы $\{\omega\}$, имеющей данное полярное многообразие и данную особенную часть в его окрестности. В связи с понятием потока автор ссылается на работы: Де-Рама и Кодаиры (De Rham et Kodaira, Harmonic integrals, Institute for Advanced Study, Princeton, 1950) и Шварца (Schwartz, Théorie de distributions, Paris, Hermann, 1950—1951). В настоящее время имеется книга Де-Рама (РЖМат, 1958, 703 К).

Г. Ф. Лаптев

836. Гомология и течения на многообразиях. Франкель (Homology and flows on manifolds. Frankel Theodore), Ann. Math., 1957, **65**, № 2, 331—339 (англ.)

Пусть M — компактное дифференцируемое многообразие с положительной скалярной плотностью ρ. Поле контравариантных векторов w называется течением, если его дивергенция $dw = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\omega^i) = 0$. В случае риманова многообразия изометрическое течение определяется как поле векторов Киллинга. Течение определяет гомологический класс $[w]$ в следующем смысле: если α — замкнутая 1-форма на M, то $\int_{[w]}\alpha = \int_M \alpha\Lambda * w$. Для риманова многообразия имеют место следующие результаты. Каждая замкнутая траектория C изометрического течения v находится в гомологическом классе $k[v]$ $(k \neq 0)$. Если $v = 0$ в какой-либо точке, то $[v] = 0$. В случае однородного многообразия $M = G/g$, где G — компактная группа Ли, g — замкнутая подгруппа, получаются: 1) все замкнутые траектории однопараметрической группы A принадлежат зависимым гомологическим классам; 2) если v — течение на M с мерой, инвариантной относительно группы, то существует течение w, гомологичное v и определяемое однопараметрической подгруппой. Отсюда и следует, что если G — компактная и полупростая, то первое число Бетти многообразия M равняется нулю.

Гу Чао-хао

837. Локально компактные группы преобразований. Эллис (Locally compact transformation groups. Ellis Robert), Duke Math. J., 1957, **24**, № 2, 119—125 (англ.)

Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство, T — некоторая группа автоморфизмов пространства X, π: $X \times T \to X$ — отображение, определенное формулой $\pi(x, t) = xt$ $(x \in X, t \in T)$. Доказывается, что если группа T снабжена локально компактной топологией, такой, что все правые и левые сдвиги на группе

непрерывны и что π непрерывно по каждому из аргументов, то π непрерывно. Отсюда выводится, что локально компактное хаусдорфово пространство, на котором определена такая групповая структура, что все правые и левые сдвиги непрерывны, является топологической группой.

А. Л. Онищик

838. Изучение свойств дифференциальных операторов прямыми методами внешней алгебры. Вивье (Etude des propriétés d'opérateurs différentiels par des méthodes d'algèbre extérieure directe. Vivier Marcel), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1957, **64**, № 2, 179—195 (франц.)

Пусть V — келерово многообразие, ω — келерова форма на нем. Показывается, что если форма A эффективна, то $\Delta(A \wedge \omega^k) = \Delta A \wedge \omega^k$ для всех k. Отсюда вытекает, что форма на многообразии V гармонична тогда и только тогда, когда все ее эффективные компоненты гармоничны.

А. Л. Онищик

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

839. Частный класс функций множества. Грабиель (Una clase peculiar de funciones de conjunto. Grabiel Federico), Rev. Soc cubana cienc. fís. y mat., 1954, **3**, № 3, 76—78 (исп.)

Связное множество C в n-мерном пространстве, отнесенное к системе координат $x^1, \ldots, x^n$ при преобразовании координат

$$\bar{x}^j = \bar{x}^j(x_1, \ldots, x_n)$$

переходит в $\bar{C}$. Все функции системы (1) имеют непрерывные частные производные, и якобиан системы отличен от нуля.

Целью заметки является установление факта существования такой функции $F(C)$ множества C в системе x, которая при преобразовании (1) переходит в функцию $\bar{F}(\bar{C})$ с соблюдением следующих условий:

1° $$\bar{F} = \frac{J}{J_P^{\rho}} F,$$

где J_p есть якобиан системы (1) в точке $P \in C$, а ρ — положительное число;

2° при стягивании множества C в точку P

$$\lim_{C=P} F = 1 = \lim_{\bar{C}=\bar{P}} \bar{F}.$$

Построение функции F проводится эффективно для $n = 2$.

Г. М. Фихтенгольц

840. Об одном отображении поверхности отрицательной кривизны. Стрельцов В. В., Изв. АН КазССР. Сер. матем. и механ., 1956, вып. 5 (9), 29—44

Как известно, всякую регулярную поверхность можно отобразить на плоскость (разумеется «в малом») так, что наперед заданная геодезическая γ перейдет в отрезок прямой. Этого можно достигнуть, вводя координаты: на поверхности — полугеодезические u и v, где v — длина вдоль γ, а u — расстояние до кривой γ, на плоскости — декартовы и сопоставляя точки с одинаковыми координатами. Автор получил аналогичную, но более общую теорему для нерегулярных поверхностей неположительной кривизны. При этом, сохраняя упомянутую выше идею вывода, он оперирует с понятиями внутренней геометрии нерегулярных поверхностей в том виде, как они установлены А. Д. Александровым (подробнее см. РЖМат, 1954, 5778). Основной результат работы состоит в том, что всякую гомеоморфную кругу поверхность P со всюду неположительной кривизной, у которой дуга границы AB имеет положительную часть поворота, не большую π, можно так отобразить на плоскость, что 1) дуге AB соответствует дуга A_0B_0 той же длины; 2) каждый отрезок дуги A_0B_0 имеет неотрицательный поворот, величина которого равна положительной части поворота соответствующего отрезка дуги AB; 3) всякой кривой L на P соответствует кривая L_0, длина которой не больше длины L.

При этом построенное отображение непрерывно и однозначно.

Ю. А. Волков

841. О кривых наименьшей длины, соединяющих две данные точки и имеющих данные направления в этих точках, с кривизной не превосходящей данного числа. Дьюбинс (On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. Dubins L. E.), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 3, 497—516 (англ.)

Рассматривается задача: две данные точки n-мерного евклидова пространства соединить кривой наименьшей длины, которая имела бы в этих точках заданные направления и среднюю кривизну на любом участке не большую заданного числа $1/R_0$. Под средней кривизной на отрезке AB кривой понимается отношение

$$\left| \frac{r'(A) - r'(B)}{S(A,B)} \right|,$$

где $r'(A)$ и $r'(B)$ — единичные касательные векторы кривой в точках A и B, а $S(A,B)$ — дуга отрезка AB кривой. Доказывается, что в случае плоскости ($n=2$) кривая наименьшей длины, удовлетворяющая указанным условиям, состоит не более чем из трех отрезков, каждый из которых представляет собой либо дугу окружности радиуса R_0, либо прямолинейный отрезок.

А. В. Погорелов

842. Покрытия сфер и соответствия между топологическими многообразиями. Сегре (Recouvrements de sphères et correspondances entre variétés topologiques. Segre Beniamino), Colloq. quest. réalité géom. Liège, 1955, Liège-Paris, 1956, 149—175 (франц.)

В первых §§ статьи рассматриваются покрытия n-мерной сферы ν замкнутыми множествами; каждому такому покрытию относится число $\theta(n,\nu)$ — нижняя грань максимального угла, под которым видны из центра сферы две точки, принадлежащие одному и тому же множеству покрытия. Указываются некоторые свойства функции θ, способы вычисления верхней и нижней граней ее и ее связь с теоремой Люстерника-Шнирельмана и теорией Борсука о степени отображения сферы в себя.

Большая часть статьи посвящена исследованию соответствий T между двумя замкнутыми связными ориентируемыми топологическими многообразиями V и V' одной и той же размерности n, т. е. n-мерных циклов Γ на произведении $W = V \times V'$ (связь, задаваемая просто n-мерным множеством на W, называется автором отношением). Такое соответствие определяет отображения

$$\theta_p : H_p(V) \to H_p(V'), \quad \theta_p' : H_p(V') \to H_p(V),$$

где H_p — p-я группа Бетти. Указываются способы построения топологических инвариантов и ковариантов соответствия T и приводятся примеры.

Полагая $V = V'$, автор рассматривает на W симметрию S и инволютивные соответствия V с собой, характеризуемые тем, что задающий их цикл Γ на W переводится симметрией S в себя. В частности, если Γ — неприводимый циклоид, то $S\Gamma \approx \pm\Gamma$. Вообще, если

$S\Gamma \approx \Gamma$ или $-\Gamma$, то инволютивное соответствие называется соответствием первого или второго рода. Изучаются свойства инволютивных соответствий, в частности даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы соответствие было первого или второго рода.

Особо изучается случай дифференцируемых многообразий V и V'; если отношение между ними полурегулярно (т. е. регулярно всюду, за исключением некоторых пар гомологичных точек, образующих на W подкомплекс размерности $\leqslant n-2$, и, кроме того, замкнуто), то оно оказывается соответствием; такие соответствия называются элементарными. Указывается ряд свойств инволютивных элементарных соответствий, преимущественно относящихся к числу их неподвижных точек.

В заключение выводится обобщение формулы Цейтена. Если T — элементарное соответствие между V и V', P — точка из V, P' — точка из V', то $TP \approx \alpha' P'$, $TV \approx \alpha V'$. Пусть $\alpha_1 = \alpha \operatorname{sgn} \alpha'$, $\alpha_1' = \alpha_1 \operatorname{sgn} \alpha$. Если I' — тождественное соответствие V' с собой, то соответствие $L' = TT^{-1} - \alpha_1 I'$ инволютивно и относит общей точке из V' только ее саму. Число неподвижных точек для L' дается формулой $\delta' = \sum (-1)^p \operatorname{tr} (\theta_p' \theta_p) - \alpha_1 \chi'$, где χ' — характеристика Эйлера — Пуанкаре для V' (это число равно числу так называемых точек дирамации для T). Аналогично для соответствия $L = T^{-1}T = \alpha' I$ будет $\delta = \sum (-1)^p \operatorname{tr} (\theta_p \theta_p') - \alpha' \chi$, откуда следует формула, обобщающая формулу Цейтена на случай топологических многообразий

$$\delta - \delta' = \alpha_1 \chi' - \alpha_1' \chi.$$

По поводу подробностей выводов и деталей автор отсылает к своему литографированному курсу, который должен вскоре выйти в свет. В. В. Морозов

843. Геометрия без меры, но с конгруэнтностью отрезков прямой. Росье (Une géométrie sans mesure, mais avec congruence des segments de droite. Rossier Paul), Arch. sci., 1957, 10, № 3, 470—473 (франц.)

Известно, что задание на проективной плоскости абсолюта в виде кривой второго порядка определяет проективную метрику Кэли. Рассматривается соответствующий евклидовой планиметрии случай вырождения абсолюта в пару точек. В этом случае метрика Кэли определена только на «особой» прямой, проходящей через обе точки абсолюта. (1) Окружностью автор называет каждую кривую второго порядка, проходящую через две точки абсолюта; центром ее считается пересечение касательных, проведенных в точках абсолюта. Конгруэнтными называются любые два радиуса окружности. (2) Независимо от этого, считая «параллельными» прямые, пересекающиеся на особой прямой, называют конгруэнтными отрезки, являющиеся противоположными сторонами четырехугольника с попарно параллельными противоположными сторонами. Эти определения конгруэнтности не противоречат друг другу и вместе определяют отношение, обладающее всеми свойствами равенства отрезков на евклидовой плоскости. Таким образом отношение конгруэнтности вводится независимо от измерения. Недостаточность определения (1) связывается с отсутствием метрической двойственности между длинами и углами. В. А. Залгаллер

844. Линейчатые поверхности в метрических пространствах. Александров А. Д., Вестн. Ленингр. ун-та, 1957, № 1, 5—26, 207 (рез. англ.)

Линейчатая поверхность в евклидовом пространстве имеет, как известно, неположительную кривизну. Эта теорема легко обобщается на линейчатые, т. е. образованные геодезическими, поверхности в римановом пространстве: кривизна такой поверхности не превосходит кривизны пространства в направлении двумерного элемента, касающегося поверхности в рассматриваемой точке.

В реферируемой работе эта теорема обобщается на линейчатые поверхности в метрическом пространстве. При этом предполагается, что у каждой точки пространства есть окрестность, любые две точки которой соединимы кратчайшей; линейчатой называется поверхность, составленная из кратчайших; а кривизны поверхности и пространства определяются в духе геометрии нерегулярных многообразий, т. е. в основном как (верхние) пределы отношений избытков и площадей определенным образом выбираемых треугольников. Указаны также некоторые из возможных применений полученного результата в теории кривых метрического пространства с кривизной, не большей данного K. Ю. А. Волков

845. Об аксиоме Кантора. Ван Сян-хао (Цзыжань кэсюэ сюэбао, Acta sci. natur., 1956, №2, 305—310 (кит.; рез. русск.)

Строится неархимедова система чисел, в которой имеет место усиленная аксиома Кантора, требующая наличия общей точки любой монотонной последовательности сегментов. Тем самым в основах геометрии устанавливается независимость аксиомы Архимеда от усиленной аксиомы Кантора (обычная аксиома Кантора требует обязательного наличия общей точки лишь для монотонной стягивающейся последовательности сегментов, т. е. для монотонной последовательности, сегменты которой становятся меньше любого заранее данного сегмента). Н. В. Ефимов

846. Об отношении порядка в геометриях над полем Галуа. Кустаанхеймо (On the relation of order in geometries over a Galois field. Kustaanheimo Paul. Comment. phys-math., 1957, 20, № 8, 9 pp.) (англ.)

Пусть для коллинеарных точек A, B, C аффинной плоскости над полем Галуа $GP(p^n)$ определено отношение порядка: „B лежит между A и C“ (в обозначениях: ABC). Рассматриваются следующие аксиомы: 1. Отношение порядка сохраняется при нормальном проектировании; 2. Если A, B, C, D — четыре различные коллинеарные точки, то среди соотношений BAC, CAD, DAB являются справедливыми в точности два или ни одного. Эти две аксиомы в совокупности эквивалентны аксиоме Паша (Coxeter H. S. M., The real projective plane. Cambridge, 1955). Из аксиомы 1 вытекает, что соотношение ABC зависит только от отношения $t_{ABC} = (z_A - z_B) : (z_C - z_A)$, где z_A, z_B, z_C — координаты соответствующих точек. Если выполнены аксиомы 1 и 2 а $p \neq 2$, то ABC оказывается справедливым тогда и только тогда, когда t_{ABC} является квадратическим невычетом. Кроме того, из аксиом 1 и 2 вытекает аксиома 3: ABC и CBA имеют место одновременно. Исследование порядка для этого случая проведено в работах Ернфельта (Järnefelt G., Ann. Ac. Sci. Fenn., 1951, 1, 96) и автора (Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys.-Math., 1950, 15, 19). Далее исследуется случай $p=2$. Так как в этом случае одновременное выполнение аксиом 1 и 2 ведет к тому, что порядок тривиальный, то рассматривается система аксиом, состоящая из аксиом 1, 3 и 4: ABA никогда не имеет места. К ней можно присоединить одну из следующих аксиом: 5. Если A, B, C — различные коллинеарные точки, то из соотношений ABC, BCA, CAB справедливы одно или три; 6. Если A, B, C, — различные коллинеарные точки, то из соотношений ABC, BCA, CAB справедливы два или ни одного. Подсчитывается число N возможных упорядочений плоскости, подчиненных аксиомам 1, 3, 4, 5 или 1, 3, 4, 6. Оказывается, что $N = 2^{(2^n-2)/3}$, если n — нечетное, и $N = 2^{(2^{n-1}-4)/3}$ если n — четное. При нечетном n существует $3^{(2^{n-1}-1)/3}$ упорядочений, подчинен-

ных аксиомам 1,3, 4, и 7. Если A, B, C — различные коллинеарные точки, то среди соотношений ABC, BCA, CAB справедливо в точности одно. Л. А. Скорняков

847. О проективных плоскостях, транзитивных относительно четырехвершинников. Уагнер (On projective planes transitive on quadrangles. Wagner A.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 25—33 (англ.)

Было известно, что всякая альтернативная плоскость транзитивна относительно четырехвершинников. Обратный результат оказывается справедливым, если группа коллинеаций плоскости содержит сдвиг или инволюторную гомологию. Доказывается также, что конечная проективная плоскость, транзитивная относительно четырехвершинников, всегда дезаргова. Л. А. Скорняков

848. Дуальная транзитивность в конечных проективных плоскостях. Остром (Dual transitivity in finite projective planes. Ostrom T. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 1, 55—56 (англ.)

Если при любом выборе точек p,p^1 и прямых L,L^1, удовлетворяющих условиям: $p \notin L, p^1 \notin L^1$ найдется коллинеация φ конечной плоскости π такая, что $\varphi(p) = p^1$, $\varphi(L) = L'$, то π оказывается дважды транзитивной (РЖМат, 1958, 709). Л. А. Скорняков

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

849. Заметка о выпуклом многоугольнике. Седлачек (Poznámka konvexním mnohoúhelníku. Sedlá ček Jiří), Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 3, 349—352 (чешск.; рез. русск., нем.)

Автор продолжает работу над своей статьей (РЖМат, 1958, 1565), где введено понятие системы $S_k^{(n)}$ следующим образом: 1) $S_k^{(n)}$ — множество диагоналей (т. е. открытых отрезков) выпуклого n-угольника ($n > 3$) в плоскости, никакие три диагонали которого не пересекаются в одной точке; 2) диагонали на $S_k^{(n)}$ определяют в точности k точек пересечения и это число увеличится прибавлением какой-либо дальнейшей диагонали.

Доказывается: Если $n \geq 2k+2 \geq 4$ и $n-k-1 \leq m \leq n+k-3$, то существует такая $S_k^{(n)}$, что $\operatorname{card} S_k^{(n)} = m$ ($\operatorname{card} S_k^{(n)}$ — число элементов множества $S_k^{(n)}$). Если существует $S_k^{(n)}$ ($k \geq 1$), то $n-k-1 \leq \operatorname{card} S_k^{(n)} \leq n+k-3$ и равенство $\operatorname{card} S_k^{(n)} = n+k-3$ справедливо тогда и только тогда, когда никакие две точки пересечения диагоналей из $S_k^{(n)}$ не лежат на той же диагонали. K. Čulik

850. О пересечении переносов выпуклого тела. Ханнер (Intersections of translates of convex bodies. Hanner Olof), Math. scand., 1956, **4**, № 1, 65—87 (англ.)

В n-мерном евклидовом пространстве R_n для каждого выпуклого тела K (ограниченного выпуклого множества, содержащего внутренние точки) определяется величина $I(K)$. Эта величина равна наименьшему натуральному числу $m \geq 3$, при котором существуют векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m \in R_n$ такие, что множества $K+u_1$, $K+u_2, \ldots, K+u_m$, представляющие переносы (результат параллельного переноса) тела K, удовлетворяют условиям:

$$(K+u_k) \cap (K+u_l) \neq \Lambda \quad (k \neq l), \tag{1}$$

$$\bigcap_{k=1}^{m} (K+u_k) = \Lambda, \tag{2}$$

т. е. среди попарно пересекающихся тел $K+u_k$ нет точки, принадлежащей им всем. Если векторов, обладающих свойствами (1) и (2), не существует (ни при каком m), величина $I(K) = \infty$.

Надь (РЖМат, 1956, 2339) показал, что $I(K) = \infty$ тогда и только тогда, когда K — параллелепипед. В работе доказывается более общее предложение.

Теорема. Величина $I(K)$ обладает следующими свойствами:

а) $I(K)$ равно 3, 4 или ∞;

б) $I(K) > 3$ тогда и только тогда, когда 1) K — выпуклый многогранник, 2) K — центрально-симметричное тело, 3) для любых двух непересекающихся граней L_1 и L_2 тела K существуют две параллельные опорные к K гиперплоскости Π_1 и Π_2 такие, что $L_1 \subset \Pi_1$, $L_2 \subset \Pi_2$;

в) $I(K) = \infty$ тогда и только тогда, когда K — параллелепипед (теорема Надя);

г) при любом n в R_n имеется лишь конечное число аффино неэквивалентных многогранников K, для которых $I(K) > 3$.

Кроме того, показано, что если при определении величин $I(K)$, следуя Нахбину (Nachbin L., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **68**, 28—46), допускать, помимо переносов, более общие преобразования подобия: $\lambda_k K + u_k$, где $\lambda_k > 0$, то значение $I(K)$ не меняется. Г. Ш. Рубинштейн

851. Однозначная определенность некоторых выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского. Данелич И. А., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 2, 217—219

Формулируется ряд теорем существования и единственности для выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского. Например, если конечная область на выпуклой поверхности является выпуклой в себе, то существует изометричная этой области обобщенная орисферная шапка. Иначе говоря, выпуклую в себе область на выпуклой поверхности можно изометрично реализовать в виде выпуклой поверхности пространства Лобачевского, которая каждой компонентой своего края опирается на некоторую орисферу, причем лучи, параллельные осям любой из таких орисфер, проектируют поверхность во внутрь области, охваченной на орисфере соответствующей компонентой края. Эта теорема представляет собой обобщение известной теоремы А. Д. Александрова о том, что всякая гомеоморфная кругу выпуклая в себе область на выпуклой поверхности изометрична некоторой евклидовой выпуклой шапке.

В теоремах единственности рассматриваемые поверхности предполагаются поверхностями ограниченной удельной кривизны. В этих теоремах утверждается конгруэнтность (с точностью до зеркального отражения) изометричных выпуклых шапок; конгруэнтность изометричных обобщенных орисферных шапок при условии гладкости края и конгруэнтности соответствующих пар компонент края, кроме, быть может, одной пары; конгруэнтность некоторых изометричных бесконечных выпуклых поверхностей. Указывается, что теоремы единственности получены путем проективного отображения пространства Лобачевского на открытый евклидов шар и применением метода А. В. Погорелова. Н. В. Ефимов

852. Обобщенные решения уравнений Монжа-Ампера. Бакельман И. Я., Докл. АН СССР, **114**, № 6, 1957, 1143—1145

Используя геометрические методы (Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей, 1948), автор доказывает теоремы существования и единственности решений для краевых задач уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y)\, R(p,q), \tag{1}$$

где $$\varphi(x,y) > 0 \text{ и } R(p,q) \geq R_0 > 0$$

—непрерывные функции. Введено в рассмотрение понятие нормального изображения выпуклой поверхности $z(x,y)$ на плоскости p, q, а также R-площади нормального изображения; последняя обобщает понятие площади сферического изображения поверхности. Обобщен-

ные решения уравнения (1) задаются как выпуклые поверхности, удовлетворяющие этому уравнению, записанному в интегральной форме в терминах R-площади.

Устанавливается существование и единственность (с точностью до переноса в направлении оси z) решений уравнения (1), задающих бесконечные выпуклые поверхности с данным предельным конусом.

Для задачи Дирихле устанавливается разрешимость при условии

$$\Omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dpdq}{R(p,q)} = +\infty;$$

если же $\Omega < +\infty$, то условие

$$\omega \equiv \iint_D \varphi(x,y)\,dxdy \leqslant \Omega$$

необходимо, а условие $\omega < \Omega$ достаточно для разрешимости задачи (D — внутренность выпуклой области, в которой ставится задача Дирихле).

Единственность доказана в следующей форме. Пусть $\{\Phi\}$ — обращенные выпуклостью в сторону $z < 0$ поверхности, являющиеся обобщенными решениями одной и той же задачи Дирихле для уравнения (1). Положим

$$z_\Phi(P) = \lim_{(x,y)\to P} z(x,y),$$

где (x, y) — внутренняя, а P — граничная точки D. Тогда существует не более одного решения Φ_0, для которого $z_{\Phi_0}(P) \leqslant z_\Phi(P)$, для всех P и Φ.

Формулируются обобщения на случай n независимых переменных. Исследуется регулярность решения: при условиях $\varphi(x,y) \geqslant \varphi_0 > 0$, $R(p,q) \geqslant R_0 > 0$, $\varphi(x,y) \in C^3$, $R(p,q) \in C^3$ устанавливается, что $z(x,y) \in C^4$. Доказательств не приводится.

В последних строках работы опечатка: вместо $R(p,q) \geqslant R_0 = c > 0$ должно стоять $R(p,q) = (1+p^2+q^2)^{n/4}$. В.-А. Залгаллер

853. **Два кратких доказательства изопериметрического неравенства. Плейель** (Zwei kurze Beweise der isoperimetrischen Ungleichung. Pleijel Arne), Arch. Math., 1956, 7, № 4, 317—319 (нем.)

В работе даны два новых и очень простых доказательства известного изопериметрического неравенства $U^2 - 4\pi F \geqslant 0$, где U — длина замкнутой плоской кривой, а F — площадь области, ею ограничиваемой. Доказательства проводятся для выпуклых кривых и основаны на рассмотрении некоторых интегральных представлений величин U и F, например,

$$U^2 = \int_0^{2\pi} ds(\alpha) \int_0^{2\pi} ds(\beta) \text{ и } 2\pi F = \int_0^{2\pi} ds(\alpha) \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \sin u \cdot \sin v\, ds(\beta),$$

где s — длина дуги, α и β углы между касательными в некоторых точках кривой и фиксированным направлением, а u и v — углы между хордой, соединяющей эти точки, и упомянутыми касательными. Ю. А. Волков

854. **Два характеристических свойства окружности. Плейель** (Zwei kennzeichnende Kreiseigenschaften Pleijel Arne), Arch. Math., 1957, 7, № 6, 420—424 (нем.)

Для замкнутых выпуклых кривых на плоскости устанавливаются некоторые интегральные неравенства, обращающиеся в равенства лишь для окружности. В неравенства входят интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} ds(\alpha) \int_\alpha^{2\pi+\alpha} r^n \sin^\nu u\, \sin^{m-\nu} v\, ds(\beta)$$

(n, m, ν — целые числа, другие обозначения см. в реф. 853). Ю. А. Волков

855. **Дискретные неравенства изопериметрического типа. Блок** (Discrete isoperimetric — type inequalities. Block H. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 860—862 (англ.)

Автор рассматривает выпуклые плоские области целочисленной сети, границы которых не проходят ни через один узел. Вводится понятие внутренней и граничной узловой точки и понятие кратности граничной узловой точки (число ближайших к ней узловых точек, расположенных вне области). Затем устанавливаются неравенства, относящиеся к общему числу узловых граничных точек, числу, равному сумме кратностей этих точек, и общему числу узловых точек, принадлежащих области. Получены неравенства, относящиеся к осредненным величинам. Э. Г. Позняк

856. **Бесконечно малые изгибания поверхностей в себя. Рембс** (Infinitesimale Verbiegungen von Flächen in sich. Rembs Eduard), Math. Nachr., 1957, 16, № 2, 134—136 (нем.)

Рассматривается бесконечно малое изгибание $\mathbf{x}(u,v)+\varepsilon\mathbf{z}(u,v,)$ поверхности $\boldsymbol{x}(u,v)$; пусть $a=\mathbf{z}\mathbf{x}_u$ $b=\mathbf{z}\mathbf{x}_v$, $c=\mathbf{z}\mathfrak{n}$ ($\mathfrak{n}$ - единичная нормаль). Если $c\equiv 0$, т. е. поверхность $\mathbf{x}(u,v)$ изгибается в себя, то она изометрична поверхности вращения. Пусть S — односвязный кусок такой поверхности, регулярно покрытый образами меридианов и параллелей. Доказывается предложение: если $a=0$, $c=0$ на границе S, то $a=0$, $c=0$ внутри S. Н. В. Ефимов

857. **Бесконечно малые изгибания с краевым заданием вектора скорости или вектора вращения. Рембс** (Infinitesimale Verbiegungen mit Randvorgabe des Geschwindigkeitsvektors oder des Drehvektors. Rembs Eduard), Arch. Math., 1957, 3, № 1, 77—80 (нем.)

Рассматривается бесконечно малое изгибание $\mathbf{x}(u,v)+\varepsilon\mathbf{z}(u,v)$ поверхности $\mathbf{x}(u,v)$ положительной кривизны; пусть $\mathbf{y}=\mathbf{y}(u,v)$ — соответствующий ему вектор вращения ($\mathbf{z}=\mathbf{z}(u,v)$—вектор скорости) Если $a=\mathbf{z}\mathbf{x}_u$, $b=\mathbf{z}\mathbf{x}_v$ и система координат (u,v) — изотермически сопряженная (т. е. $N=L$, $M=0$), то система уравнений теории бесконечно малых изгибаний принимает вид:

$$a_u - b_v = Aa + Bb, \quad a_v + b_u = Ca + Db. \qquad (1)$$

Аналогичным уравнениям удовлетворяют функции $\alpha=\alpha(u,v)$, $\beta=\beta(u,v)$, которые участвуют в разложениях: $\mathbf{y}_u=\alpha\mathbf{x}_u+\beta\mathbf{x}_v$, $\mathbf{y}_v=\beta\mathbf{x}_u-\alpha\mathbf{x}_v$. Ссылаясь на работы Хаака К (Haack W., Math. Nachr., 1952, 8, 123—132) и Векуа И. Н. (Матем. сб., 1952, 31, № 2, 217—314; немецкий перевод: РЖМат, 1958, 2991), где даны теоремы существования краевых задач для системы вида (1), автор указывает условия разрешимости двух краевых задач теории бесконечно малых изгибаний: 1) вдоль края поверхности задана тангенциальная составляющая $\mathbf{z}_t$ вектора скорости $\mathbf{z}$; 2) вдоль края задана производная $\mathbf{y}'$ вектора вращения $\mathbf{y}$ (имеется в виду производная по дуге края). Условия выражены с помощью индекса вектора $\mathbf{z}_t$, соответственно $\mathbf{y}'$. В первом случае непосредственно усматривается, что индекс краевой задачи для системы (1) совпадает с индексом $\mathbf{z}_t$; во втором случае автор доказывает, что

индекс краевой задачи для системы (1) равен $n+1$, где n — индекс вектора. Н. В. Ефимов

858. Пример замкнутой с особой точкой поверхности, имеющей счетную фундаментальную систему бесконечно малых изгибаний. Позняк Э. Г., Успехи матем. наук, 1957, 12, № 3, 363—367

Автор называет фундаментальной системой бесконечно малых изгибаний поверхности S систему линейно независимых изгибаний этой поверхности, из которых линейными комбинациями (конечными или бесконечными) может быть получено любое бесконечно малое изгибание S. Приводится пример замкнутой поверхности вращения с особенностью в одном полюсе, которая имеет счетную фундаментальную систему бесконечно малых изгибаний такую же, как и любая окрестность ее регулярного полюса. Эта поверхность обладает также следующим свойством: на ней существует счетное множество параллелей, по которым можно вклеить плоские перепонки с сохранением нежесткости поверхности. Н. В. Ефимов

859. Об одной теореме А. Д. Александрова и Е. П. Сенькина о жесткости поверхностей и некоторый ее аналог. Рембс (Über einen Starrheitssatz von A. D. Alexandrow und E. P. Senkin und ein Analogon. Rembs Eduard), Math. Nachr., 1957, **16**, № 2, 130—133 (нем.)

Используя прием, который употребляли А. Д. Александров и Е. П. Сенькин (РЖМат, 1958, 6181), автор доказывает теорему: выпуклая поверхность M, сферический образ которой лежит в одной полусфере, не может допускать нетривиальных бесконечно малых изгибаний, при условии, что вектор вращения вдоль края тангенциален к M. Как следствие этой теоремы получается предложение: если выпуклая поверхность M постоянной средней кривизны H имеет сферический образ в одной полусфере и если вдоль края опорная функция равна $-\frac{1}{H}$, то M является куском сферы. Другое следствие той же теоремы: если вдоль края выпуклой поверхности соблюдается равенство $\mathfrak{ne} = C = \text{const} \neq 0$ ($\mathfrak{n}$-единичная нормаль, $\mathfrak{e}$-const, $|\mathfrak{e}|=1$), то при краевом условии $\delta(\mathfrak{ne})=0$ поверхность будет жесткой. Н. В. Ефимов

860. Векторные подпространства в пространстве локально выпуклом. Депри (Sous-espaces vectoriels d'un espace localement convexe séparé. Deprit André), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1956, **42**, № 10, 1012—1017 (франц.)

Для теоремы Фукухара (РЖМат, 1956, 2019), доказанной в общих векторных пространствах, дается обобщение для локально выпуклых пространств в следующем виде:

Пусть $M_j (0 \leqslant j \leqslant m+1)$ — конечное семейство векторных подпространств в векторном локально выпуклом пространстве E, удовлетворяющее следующим условиям: а) $M_0 = \{0\}$, $M_{m+1} = E$, б) для всякого $1 \leqslant j \leqslant m$ пространство M_j есть собственно подпространство конечной размерности в E, в) $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \ldots \subsetneq M_m \subsetneq M_{m+1} = E$.

Пусть далее $(L_k)_{0<k<n+1}$ — конечное семейство векторных подпространств в E при условиях: а) $L_0 = E$, $L_{n+1} = \{0\}$, б) L_k для всякого $1 \leqslant k \leqslant n$ есть собственно замкнутое подпространство конечной коразмерности в E, в) $\{0\} = L_{n+1} \subsetneq L_n \subsetneq \ldots L_1 \subsetneq L_0 = E$.

Тогда существуют $(m+1)(n+1)$ векторных подпространств L_k^j $(1 \leqslant j \leqslant m+1)$ таких, что

а) для $1 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant k \leqslant n$ и для $0 \leqslant k \leqslant n-1$ при $j = m+1$ L_k^j есть векторное подпространство конечного измерения, в то время как L_n^{m+1} есть векторное замкнутое подпространство конечного коизмерения,

б) для $1 \leqslant j \leqslant m+1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$ семейство L_k^j линейно независимое,

в) $M_j = L_0^j \oplus L_1^j \oplus \ldots L_n \oplus M_{j-1}$ $(1 \leqslant j \leqslant m+1)$,

г) $L_k = L_k' \oplus L_k^2 \ldots \oplus L_k^{n+1} \oplus L_{k+1}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

Имея в виду дать для E разложение в прямую топологическую сумму ($\oplus$), а не только в прямую алгебраическую сумму, автор принужден был наложить дополнительные ограничения; в качестве таковых он принимает, что векторные подпространства M_j конечной размерности, а подпространства L_k замкнуты в E и конечного коизмерения. Доказательство ведется рекуррентно в отношении m и n; сначала предложение усиливается для $m=n=1$, затем доказываются две леммы: а) если предложение верно для $m=p$ и $n=q$, то оно верно для $m=p+1$ и $n=q$, б) если оно верно для $m=p$ и $n=q$, то оно верно для $m=p$ и $n=q+1$. Автор отмечает, что он обязан замечаниям Растона (F. Ruston), которые позволили ему дать большую симметрию предложению и провести более прямое доказательство, которое у него раньше слишком следовало образцу Фукухара. С. С. Бюшгенс

См. также: 29, 37, 111, 248, 274, 340, 489, 628, 381, 388

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

861. Применение операционного исчисления в численном анализе. Тейлер, Боксер (An operational calculus for numerical analysis. Thaler Samuel, Boxer Rubin), IRE Convent. Rec., 1956, Part 2, **4**, 100—105 (англ.)

Пусть s — оператор дифференцирования, z — оператор сдвига на шаг T. Тогда, как известно, $z = e^{sT}$. В формулах $1/s^k = (T/\ln z)^k$ берутся главные части разложения в ряд Лорана в окрестности $z=1$, которые рассматриваются как разностные аппроксимации операторов k-кратного интегрирования. Если данное дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} d^k/dt^k [g_k(t)\, y] = h(t) \qquad (1)$$

проинтегрировать n раз по t, а затем заменить операторы k-кратного последовательного интегрирования ($k=1, 2, \ldots, n$) их z-аппроксимациями, получим формулу численного интегрирования уравнения (1). Методы операционного исчисления позволяют также выделить особенности решения уравнения (1) с разрывной правой частью и свести его к уравнению, имеющему гладкие решения.

Рассмотрена также обратная задача синтеза системы, т. е. дается метод численного подбора коэффициентов передаточной функции системы, имеющей заданную (например, графически) переходную функцию, т. е. функцию на выходе, соответствующую единичному скачку на входе. М. Л. Бродский

862. Применение интерпретирующих программ в универсальных цифровых вычислительных машинах для расчета линейных и нелинейных систем автоматического регулирования. Уэрти (Use of interpretation routines on a general-purpose digital computer for the de-

sign of linear and non-linear control systems. Worthy W. D.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, **B 103**, Suppl. № 1, 68—76 (англ.)

Линейная система автоматического регулирования описывается системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$\frac{dx_N}{dt} = f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$

где f_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ есть линейная форма от переменных $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_N(t)$.

Для решения системы (1) используется формула Рунге-Кутта

$$p_m = x_m(t) + \frac{2}{3}h' f_m(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)),$$
$$x_m(t+h') = x_m(t) + \frac{1}{4}h' f_m(x_1, x_2, \ldots, x_N) +$$
$$+ \frac{3}{4}h' f_m(p_1, p_2, \ldots, p_N).$$

Здесь h' — шаг интегрирования. Рассматривается программа интегрирования системы (1) методом Рунге-Кутта. Автор также рассматривает вопросы исследования нелинейных систем автоматического регулирования. В заключение рассматриваются вопросы интегрирования системы (1) с помощью дифференциальных анализаторов. Ю. М. Барабошкин

863. Об асимптотических приближениях типа Грина решения дифференциального уравнения, коэффициенты которого имеют нули. Джефрис (On the use of asymptotic approximations of Green's type when the coefficient has zeros. Jeffreys Harold), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **62**, № 1, 61—66 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$y'' = h^2 \chi(x) y, \quad (1)$$

где функция $\chi(x)$ имеет простой нуль при $x=0$ или два простых нуля при $x=-1$ и $x=1$, а параметр h может быть сколь угодно большим.

Исходя из асимптотического вида двух линейно независимых решений и используя только первые члены этих решений, автор решает некоторые граничные задачи для уравнения (1). Показывается, что при достаточно большом h влияние отброшенных членов разложения незначительно. Работа иллюстрирована примерами.

Б. Н. Бабкин

864. Элементарный обзор численных решений уравнения Матье — Хилла вещественного переменного. Зарудный (An elementary review of the Mathieu — Hill equation of real variable based on numerical solutions. Zaroodny S. J. Memo. Rept. Ballistic Res. Lab., Aberdeen Proving Ground, Md., 1955, № 878, 29 pp.) (англ.)

Приведено большое число решений уравнения Матье найденных на ЭНИАК. Для уравнения $y'' + \varepsilon(1 + k\cos t)y = 0$ приведены решения u и v с начальными условиями $u = 1$, $u' = 0$, $v = 0$, $v' = 1$ с десятью знаками и их производные с пятью для $\varepsilon = 1(1)10$ и $k = 0{,}1(0{,}1)1$, 0. Для уравнения $y'' + \frac{1}{4}(n^2 + \gamma\cos t)y = 0$ вычисления были произведены приблизительно для 700 комбинаций n^2 и γ в области $\gamma = 0$ до 16, $n^2 = 0$ до 12, помещенных на диаграмме. Поведения устойчивого решения $e^{\mu t}\Phi(t)$, где $\Phi(t)$ — периодическая, и неустойчивого решения $e^{i\beta t}\Phi(t)$ иллюстрируются на второй, более полной, чем в предыдущей публикации, диаграмме, на которой изображены β и $S = e^{\mu\pi}$ с n и γ/n^2 в качестве абсциссы и ординаты соответственно.

Во введении обсуждаются методы вычисления и приводятся некоторые соображения относительно „редкого потребления теории Матье", касающейся выбора и поведения, устойчивости, неустойчивости и характеристик различных решений уравнения Матье. L. Fox

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 671.

865. О точности метода сопряженных уравнений при вычислении дифференциальных поправок. Лоткин, Браун (On the accuracy of the adjoint method of differential corrections. Litkin M., Browne H. N.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 2, 97—105 (англ.)

При исследовании влияния возмущений на решение системы дифференциальных уравнений приходят к уравнениям в вариациях.

Рассматривая систему, сопряженную с системой уравнений в вариациях, авторы получают формулы, удобные для исследования влияния малых возмущений $\eta(0)$ на величины q, дифференциалы которых имеют вид $dq = \lambda'(T)\eta(T)$. Здесь $\lambda'(T)$ — решение сопряженной системы, а штрих обозначает операцию транспонирования. Обсуждается вопрос о влиянии погрешностей в членах матрицы Якоби на величины такого типа. Имеется подробный пример. Б. Н. Бабкин

866. Применение метода сеток при изучении движения тяжелых жидкостей со свободной поверхностью. Думитреску Д., Ионеску В., Тотт Р., Ж. прикл. механ. Акад. РНР, 1956, **1**, № 2, 43—81

Даны примеры численного интегрирования уравнений, описывающих плоские и осесимметричные движения несжимаемой жидкости. Работа имеет введение и 3 раздела.

В первом разделе излагаются известные способы замены дифференциальных уравнений конечноразностными. Уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \text{const} \quad (1)$$

записано через конечные разности при различных типах сетки.

Во втором разделе метод сеток прилагается к расчету плоских течений тяжелых вязких жидкостей в каналах различных сечений. Решается задача Дирихле для уравнения (1) с нулевыми граничными условиями на контуре. Дан пример расчета течения в треугольном канале.

В последнем разделе рассмотрены примеры расчета установившихся потенциальных течений идеальной тяжелой жидкости со свободными поверхностями, форма которых неизвестна. В плоском случае методом сеток решается уравнение Лапласа с заданными условиями на границе области течения, причем часть границы (назовем ее L) неизвестна. Для ее определения имеется дополнительное нелинейное граничное условие (уравнение Бернулли)

$$V^2 + 2gz = \text{const} \quad (2)$$

(V — скорость, g — ускорение силы тяжести), выполняющееся на L.

Авторы задают приближенно форму границы L из физических соображений. Далее решается задача Дирихле, проверяется условие (2) и граница L исправляется так, чтобы (2) выполнялось по возможности точнее. Решает-

ся задача Дирихле для уточненной границы и т. д. Процесс заканчивается, когда все условия удовлетворены с достаточной степенью точности. Рассчитаны примеры: течение через плоский вертикальный водослив с совершенно затопленной струей и течение через заслонку в форме дуги окружности.

В конце дан расчет осесимметричной задачи о движении воздушного пузырька в вертикальной трубке. В этом случае функция тока ψ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0. \qquad (3)$$

В этой задаче также имеется неизвестная граница L — поверхность пузырька, на которой функция ψ постоянна и выполняется условие (2). Для численного решения уравнения (3) и (2) заменяются конечноразностными уравнениями на квадратной сетке. Аналогично плоским задачам, при решении используется метод последовательного уточнения формы границы L. Результаты расчета сравниваются с результатами других авторов.

Вопросы сходимости и улучшения быстроты сходимости применяемых в последнем разделе методов в работе не рассматриваются. В. П. Коробейников

867. Численное решение двухгрупповых уравнений диффузии в x, y-геометрии. Варга (Numerical solution of the two-group diffusion equations in x y geometry. Varga R. S.), IRE Trans. Nucl. Sci., 1957, 4, № 2, 52—62 (англ.)

Обсуждается вопрос о численном решении для гетерогенных реакторов в прямоугольной области R плоскости x, y с внешней границей Γ двухгрупповых уравнений диффузии (для быстрого и медленного нейтронных потоков) при однородных краевых условиях на Γ.

Уравнения диффузии решаются конечно-разностным методом, в результате чего исходная дифференциальная задача на собственные значения сводится к соответствующей задаче для линейных систем алгебраических уравнений. Обстоятельно изучаются свойства матриц последних систем. Для нахождения наименьшего собственного значения и соответствующего собственного вектора используется известный метод последовательных приближений. В каждой же группе решение ищется известным итерационным методом последовательной верхней релаксации. В связи с выбором релаксационных множителей обсуждается вопрос об оценке спектральных норм некоторых матриц. Для оценки этих норм используются пределы Перрона, отношения Релея и Шварца, а также отношения Релея и Шварца, полученные с помощью взвешенных скалярных произведений. Результаты иллюстрируются на числовом примере матрицы пятого порядка.

В заключение обсуждается вопрос об улучшении скорости сходимости метода последовательных приближений. Н. Я. Лященко

868. Метод численного интегрирования линейного уравнения диффузии. Хартри (A method for the numerical integration of the linear diffusion equation. Hartree D. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 2, 207—213 (англ.)

Предлагается численный метод решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

с краевыми условиями

$$u\to 0 \qquad \text{при } x\to\infty,$$

$$\alpha du/dx+\beta u=\varphi(t) \qquad \text{при } x=0;$$

α, β — постоянные, и некоторыми начальными условиями.

Заменяя производную по времени центральной конечной разностью

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x,\ t_0+\frac{1}{2}\delta t}=\frac{u(t_0+\delta t)-u(t_0)}{\delta t},$$

а производную по пространству — средним арифметическим ее значений на концах временного интервала

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x,\ t_0+\frac{1}{2}\delta t}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u(t_0+\delta t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t_0)}{\partial x^2}\right]$$

и вводя обозначения

$$w=u(t_0+\delta t)+u(t_0),\ k^2=2/\delta t,$$

автор исходную задачу сводит к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 w}{dx^2}-k^2 w=-2k^2 u(t_0) \qquad (1)$$

с двухточечными краевыми условиями вида

$$w\to 0 \qquad \text{при} \qquad x\to\infty,$$

$$\alpha dw/dx+\beta w=\varphi(t_0+\delta t)+\varphi(t_0) \quad \text{при } x=0.$$

Известным приемом факторизации уравнение (1) приводится к системе двух уравнений 1-го порядка, причем одно из них удовлетворяет правому краевому условию и интегрируется справа налево, а второе — наоборот.

Уравнение 1-го порядка $y'+ky=g(x)$ с известной функцией $g(x)$ решается численно по формуле

$$y_{j+1}=y_j e^{-k\delta x}+\delta x\,[a_0 g_j+b_0 g_{j+1}+a_2\delta^2 g_j+b_2\delta^2 g_{j+1}+\ldots],$$

где коэффициенты a_0, b_0, a_2, b_2, ... зависят только от произведения $k\delta x$, а $\delta^2 g_j$, $\delta^2\delta_{j+1}$ представляют собой центральные разности известной функции $g(x)$. Коэффициенты a_0, b_0, a_2, ... определяются из условия, что формула

$$e^{-k\delta x}\int_{\delta x} g(x_j+\xi)\,e^{k\xi}\,d\xi=\delta x\,[a_0 g_j+b_0 g_{j+1}+a_2\delta^2 g_j+$$

$$+b_2\delta^2 g_{j+1}+\ldots]$$

должна быть точной для системы полиномов степени 0, 1, 2, ... m. Приведена таблица значений указанных выше коэффициентов для значений $k\delta x=\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}, 2$.

В заключение обсуждается вопрос о распространении метода на случай осесимметричной диффузии, когда ось симметрии находится вне области определения решения. Н. Я. Лященко

869. О методах повышенной точности и двухсторонних приближениях к решению параболических уравнений. Саульев В. К., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 6, 1088—1090

Рассматриваются разностные методы решения краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\quad 0<t\leqslant T;$$

$$u(x,0)=f(x);\quad u(0,t)=u(1,t)=0. \qquad (1)$$

Для разностной схемы

$$-\alpha(v_{l-1,\,k+1}+v_{l+1,\,k+1})+2(\omega+\alpha)v_{l,\,k+1}= \\ =(2-\alpha)(v_{l-1,\,k}+v_{l+1,\,k})-2(2-\omega-\alpha)v_{l,\,k}, \qquad (2)$$

где $v_{l,\,k}=v(l\Delta x,\ k\Delta t)$; $\Delta x=\frac{1}{n+1}$; $\Delta t>0$; $\omega=\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$;

$0\leqslant\alpha\leqslant 1$, сформулирована теорема:

При выполнении условия $\omega\geqslant 2(1-\alpha)$ справедливы соотношения

$$\sup_k\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(u_{l,\,k}-v_{l,\,k})^2\right]^{1/2}=\begin{cases}O((\Delta x)^2), \text{ если } \alpha\neq 1-\\ -\omega/6,\ \alpha\geqslant 1-\omega/2;\\ O((\Delta x)^4), \text{ если } \alpha=1-\\ -\omega/6,\ \omega\neq 2\sqrt{5};\\ O((\Delta x)^6), \text{ если } \alpha=1-\\ -\omega/6,\ \omega=2\sqrt{5}.\end{cases} \qquad (3)$$

Для разностной схемы (2) и

$$v_{l,\,k+1}=\frac{1}{2(1+\omega)^p}(v_{l-p,\,k+1}+v_{l+p,\,k+1})- \\ -\frac{1-\omega}{2(1+\omega)^p}(v_{l-p+1,\,k}+v_{l+p-1,\,k})+ \\ +\frac{\omega_2}{2(1+\omega)^2}\sum_{\gamma=0}^{p-2}\frac{1}{(1+\omega)^\gamma}(v_{l-\gamma,\,k}+v_{l+\gamma,\,k})+ \\ +\frac{1}{2(1+\omega)}(v_{l-1,\,k}+v_{l+1,\,k})\quad(p=1,\,2,\ldots)$$

сформулирована теорема:

Если начальная функция удовлетворяет условию $2\int_0^1 f(\xi)\sin\pi\xi\,d\xi>0$, то для достаточно больших t и достаточно малых Δx обычное явное разностное уравнение, получающееся из (2) при $\alpha=0$, дает при $\omega<6$ приближение к решению задачи (1) снизу, а явное уравнение (4) — сверху.

Доказательства не приведены. Сделаны некоторые рекомендации о числовом решении (1) разностными методами. Н. П. Жидков

870. Два метода численного решения краевой задачи с подвижной границей в теории диффузии и распространения тепла. Кранк (Two methods for the numerical solution of moving-boundary problems in diffusion and heat flow. Crank J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1957, 10, № 2, 220—231 (англ.)

Рассматривается: а) задача распространения тепла в среде с подвижной границей и б) диффузия в среде, содержащей некоторое количество фиксированных участков, где часть диффундируемого вещества может выходить из процесса мгновенно и необратимо. Специальная задача Коши для уравнения теплопроводности с краевыми условиями на подвижной границе, к которой приводятся обе задачи, путем преобразования переменных сводится к некоторой задаче о собственных значениях при неподвижной границе для одного специального дифференциального уравнения. Строится также другой, конечно-разностный метод, основанный на применении интегральной формулы Лагранжа.

Отмечается наличие в литературе большого количества попыток решения этих математических задач в частных случаях. В. Д. Купрадзе

871. Численное решение уравнений сферических волн с конечной амплитудой. I. Фокс, Ролстон (On the numerical solution of the equations for spherical waves of finite amplitude. I. Fox P., Ralston A.), J. Math. and Phys., 1958, 36, № 4, 313—328 (англ.)

Задача Коши

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+u\frac{\partial\sigma}{\partial r}=-\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{c^2}{\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial r}; \\ u=0,\ \sigma=1+2e^{-\alpha r^2},\ t=0 \qquad (1) \\ u=0,\ \frac{\partial\sigma}{\partial r}=0,\ r=0$$

(c — известная константа) решается методом характеристик. Уравнения характеристик Γ_+ и Γ_- задачи (1) и дифференциальные соотношения на них будут соответственно

$$dr=(u+c)\,dt, \qquad dr=(u-c)\,dt; \\ \frac{d\sigma}{\sigma}+\frac{du}{c}=-\frac{2u}{r}\,dt, \qquad \frac{d\sigma}{\sigma}-\frac{du}{c}=-\frac{2u}{r}\,dt. \qquad (2)$$

Уравнения (2) приближенно заменяются следующими разностными уравнениями:

$$(r_P-r_A)=(u+c)_{+\text{ср.}}(t_P-t_A), \\ (\sigma_P-\sigma_A)+\left(\frac{\sigma}{c}\right)_{+\text{ср.}}(u_P-u_A)=-\left(\frac{2u\sigma}{r}\right)_{+\text{ср.}}(t_P-t_A), \qquad (3) \\ (r_P-r_B)=(u-c)_{-\text{ср.}}(t_P-t_B), \\ (\sigma_P-\sigma_B)-\left(\frac{\sigma}{c}\right)_{-\text{ср.}}(u_P-u_B)=-\left(\frac{2u\sigma}{r}\right)_{-\text{ср.}}(t_P-t_B),$$

где через P обозначена точка пересечения характеристик Γ_+ и Γ_-, через A и B — точки, лежащие недалеко от P на Γ_+ и Γ_- соответственно; индекс „+ ср.“ означает среднее из значений в точках P и A (например, $(\sigma/c)_{+\text{ср.}}=(\sigma_A/c_A+\sigma_P/c_P)/2$), а индекс „— ср.“ — среднее из значений в точках P и B.

Если координаты точек A и B известны и известны значения плотности σ и скорости u в этих точках, то четыре алгебраических уравнения (3) дают четыре неизвестные r_P, t_P, u_P, σ_P (решение осуществляется итеративно).

В точках на прямой $r=0$ величина $2u\sigma/r$, входящая в систему (3), неопределенна. В этих точках употребляются специальные разностные уравнения.

Авторы подробно анализируют результаты вычислений, произведенные на электронной вычислительной машине „Вихрь“. В частности, они указывают на качественное расхождение с результатами Ануин (Unwin I. I., Proc. Roy. Soc., 1941, A, 178) и на отсутствие ударной волны. В. К. Саульев

872. Численное решение уравнений сферических волн с конечной амплитудой. II. Робертс (On the numerical solution of the equations for spherical waves of finite amplitude, II. Roberts Leonard), J. Math. and Phys., 1958, 36, № 4, 329—337 (англ.)

Рассматривается та же проблема (только в других обозначениях), что и в реф. 871. Кроме того, исследован случай другого начального условия, именно $\sigma=1+5e^{-\alpha r^2}$. В отличие от работы Фокса и Ролстона

(реф. 871) автор для численного решения задачи применяет нехарактеристический метод, заменяя на прямоугольной сетке непосредственно данные дифференциальные уравнения, записанные в консервативной форме $g_t + f_t + 2h/r = 0$, следующими разностными уравнениями:

$$\frac{g_{n+1,\,k} - (g_{n,\,k+1} + g_{n,\,k-1})/2}{\Delta t} + \frac{(f_{n,\,k+1} - f_{n,\,k-1})/2}{\Delta r} + \frac{2h_{n,\,k}}{k\Delta r} = 0 \qquad (1)$$

(при $k = 0$ применяется специальное уравнение

$$\frac{g_{n+1,\,0} - g_{n,\,1}}{\Delta t} + 3\,\frac{f_{n,\,1}}{\Delta r} = 0).$$

Разностные уравнения (1), предложенные Лаксом, соответствуют случаю, когда в данном дифференциальном уравнении учитывается эффект вязкости. Это легко видеть, если записать уравнение (1) в виде

$$\frac{g_{n+1,\,k} - g_{n,\,k}}{\Delta t} + \frac{(f_{n,\,k+1} - f_{n,\,k-1})/2}{\Delta r} + \frac{2h_{n,\,k}}{k\Delta r} = \frac{\Delta r^2}{2\Delta t}\,\frac{g_{n,\,k+1} - 2g_{n,\,k} + g_{n,\,k-1}}{\Delta x^2}.$$

Уравнения типа (1) позволяют обходить специфические трудности в окрестности ударной волны.

Для получения бо́льшей точности автор просчитывает задачу с шагами Δt, $\Delta t/2$ и $\Delta t/4$ (при фиксированном $\Delta r/\Delta t = s$), а затем известным методом экстраполяции уменьшает погрешность до $O(\Delta t^3)$. При этом отмечается, что для численной устойчивости s не должно быть слишком малым.

Подробно анализируются результаты численных просчетов. Указывается на, вообще говоря, хорошее качественное и даже количественное (за исключением окрестности центра, $r = 0$) согласование с расчетами той же задачи Фоксом и Ролстоном (реф. 871). Отмечается, что при начальном условии $1 + 5e^{-4r^2}$, так же как и при $1 + 2e^{-4r^2}$, не наступает ударной волны.

В. К. Саульев

873. Замечание к одной оценке Л. В. Канторовича. **Цалюк З. Б.**, Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 11, 127—128

Оценка Л. В. Канторовича погрешности приближенного решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad (1)$$

при решении его методом замены системой линейных алгебраических уравнений, обладает тем недостатком, что она не позволяет определить число уравнений системы по заранее заданной точности.

Автор дает оценку погрешности, свободную от этого недостатка, но только для достаточно малых λ. Результат формулируется следующей теоремой. Если $\Lambda = 1 - |\lambda|\,(b-a)M^{(0)} > 0$, то

$$|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| \leqslant |\lambda|\,k_n\,\frac{P_s\Lambda + Q_s N^{(0)}}{\Lambda^2}$$

(обозначения здесь те же, что и в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова, Приближенные методы высшего анализа, 1952, 110—121).

Б. Н. Бабкин

874. Численное дифференцирование функций произвольного числа независимых переменных. **Станку** (Contributii la derivarea partiala numerica a functiilor de doua si mai multe variabile. Stancu D. D.), Bul. stiint. Acad. RPR. Sec. mat. si fiz., 1956, 8, № 4, 733—763 (рум.; рез. русск., франц.)

Выводятся разностные и безразностные формулы для вычисления частных производных любого порядка от функции многих переменных. Одна из таких формул для функции $f(x, y)$ двух независимых переменных x и y имеет вид:

$$\frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = \sum_{i=p}^{n} \sum_{k=q}^{m} u_i^{(p)}(x)\,v_k^{(q)}(y)\,f(x_1, \ldots, x_{i+1};\ y_1, \ldots, y_{k+1}) + R_2(x, y) \quad (p \leqslant n;\ q \leqslant m), \qquad (1)$$

где $f(x_1, \ldots, x_{i+1};\ y_1, \ldots, y_{k+1})$ — двойная разность $(i+k)$-го порядка функции $f(x, y)$,

$$u_i(x) = \sum_{\alpha=1}^{i} (x - x_\alpha), \qquad v_k(y) = \sum_{\beta=1}^{k} (y - y_\beta),$$

$$R_2(x, y) = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+q+1} f(\xi, y)}{\partial \xi^{n+1} \partial y^q} + \frac{v^{(q)}(y)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{p+m+1} f(x, \eta)}{\partial x^p \partial \eta^{m+1}} - \frac{u^{(p)}(x)\,v^{(q)}(y)}{(n+1)!(m+1)!}\,\frac{\partial^{n+m+2} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1}},$$

причем

$$u(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - a_k), \qquad v(y) = \prod_{k=0}^{m} (y - b_k).$$

Здесь x и y принимают всевозможные значения, отличные от нулей функций $u^{(p)}(x)$ и $v^{(q)}(y)$; числа ξ и η заключены соответственно между наибольшим и наименьшим из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n, y$.

Полученные формулы справедливы не для всех возможных случаев. Так, полагая в (1) $n = m = p = q = 1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, мы получим формулу

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{4}\left[f(-1, -1) - f(-1, 1) - f(1, -1) + f(1, 1)\right] + x\,\frac{\partial^3 f(\xi, y)}{\partial \xi^2 \partial y} + y\,\frac{\partial^3 f(x, \eta)}{\partial x\,\partial \eta^2} - xy\,\frac{\partial^4 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}, \qquad (2)$$

для которой, согласно результатам автора, должны иметь место неравенства $-1 < \xi < 1$, $-1 < \eta < 1$, при любых x и y из $[-1, 1]$. Положим теперь $f(x, y) = xy^3$. Принимая во внимание (2), получаем $3y^2 = (1 + 6\eta)y$ и, следовательно, если точка y выбрана достаточно близкой к нулю, можно найти настолько большое значение $|\eta|$, что неравенство $-1 < \eta < 1$ не будет выполняться.

Аналогичное имеет место и для формул численного дифференцирования для функции от одного переменного (РЖМат, 1957, 3557).

Ш. Е. Микеладзе

875. О некоторых последовательностях полиномов, полезных для построения итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. **Фаддеев Д. К.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 7, 155—159 (рез. англ.)

1. Рассматриваются полиномы $f_n(t)$, определяемые формулами:

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_n(t) = (1 + \alpha_n)\,t\,f_{n-1}(t) - \alpha_n f_{n-2}(t) \quad (n \geqslant 2).$$

Доказывается, что $|f_n(t)| \leqslant 1$ при $|t| \leqslant 1$, если $|\alpha_i| \leqslant 1$ $(i = 2, \ldots, n)$. Если же $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha < 1$, то при $|t| < a < 1$, $|f_n(t)| \leqslant a_1^n$, где $a_1 = \max\left(a, \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}\right)$.

2. Для системы линейных алгебраических уравнений

$$X = BX + F \qquad (1)$$

(B — вещественная симметричная матрица, спектр которой заключен в $(-1, 1)$) предлагается итерационный процесс

$$X_1 = BX_0 + F,\ X_n = (1+\alpha_n)(BX_{n-1}+F) - \alpha_n X_{n-2} \quad (n \geqslant 2). \qquad (2)$$

При $\alpha_n = 0$ процесс (2) переходит в обычный метод итераций. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и $u_1, \ldots, u_k$ — набор собственных чисел и векторов матрицы B, X^* — решение (1), $Y_n = X^* - X_n$ $(n \geqslant 0)$ и $Y_0 = c_1u_1 + \ldots + c_ku_k$. Тогда $Y_n = c_1 f_n(\lambda_1)\, u_1 + \ldots + c_k f_n(\lambda_k)\, u_k$, и при $\alpha_i \in [0, \alpha]$, $\alpha < 1$, процесс (2) сходится, причем, вообще говоря, быстрее, чем обычный метод итераций. При специальном выборе чисел α_n описанная схема приводит к некоторым методам, предложенным ранее другими авторами (Гавурин М. К., Успехи матем. наук, 1950, 5, № 3, 156 — 160; Бирман М. Ш., Вестн. Ленингр. ун-та, 1952, № 9, 69 — 76 и др.). М. Ш. Бирман

876. **Метод Харди Кросса и подтверждение его новым методом решения линейных алгебраических систем. Берардино** (Il metodo di Hardy Cross e la sua giustificazione mediante un nuovo procedimento di risoluzione dei sistemi di equazioni algebriche lineari. Berardino Vincenzo di), Ingegneria ferroviaria, 1957, 12, № 10, 821—831 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

Для решения линейных систем предлагается метод „последовательных приращений", который является незначительным видоизменением метода Некрасова (Приложение к т. LXIX. Записки АН С-Пб., 1892) и состоит в следующем: система $AX = N$ записывается в виде

$$x_i = -\sum_{j=1}^{n=1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{N_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Решение находится как сумма последовательных приращений Δx_i, которые определяются по формулам

$$\Delta x_i^{(1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \Delta x_j^{(1)} + \frac{N_i}{a_i},$$

$$\Delta x_i^{(k)} = -\sum_{j=1}^{i=1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \Delta x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \Delta x_j^{(k-1)} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Рассматриваемый метод автор применяет для расчета рамных конструкций. В. Н. Кублановская

877. **Об итеративном решении систем линейных уравнений. Тодоров** (Über die iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme. Todorow Marko), Bautechnik, 1958, 35, № 4, 136—138 (нем.)

При решении системы линейных алгебраических уравнений $x = Bx + y$ методом итераций предлагается x_{n+1} определять по формуле

$$x_{n+1} = B\bar{x}_n + y, \qquad \bar{x}_n = x_n + \alpha_n e, \qquad (1)$$

где e — вектор с единичными составляющими; параметр α_n определяется на каждом шаге из условия минимума расстояния между x_{n+1} и $\bar{x}_n$. Показано, что процесс (1) эквивалентен обычному методу итераций, но с другой матрицей. Необходимым условием сходимости процесса (1) является $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Области сходимости процесса (1) и обычного метода итераций, вообще говоря, перекрываются. Отмечено, что α_n в (1) можно определять и из других соображений. Приведен пример системы, для которой процесс (1) приводит к существенному улучшению сходимости. Аналогичные замечания делаются относительно метода Зейделя.

М. Ш. Бирман

878. **Метод сопряженных градиентов для решения линейных систем. Хестинс** (The conjugate-gradient method for solving linear systems. Hestenes Magnus R.), Proc. Symbos. Appl. Math., 6, New York — Toronto — London, 1956, 83—102 (англ.)

Новое изложение метода (РЖМат, 1956, 7645), содержащее некоторые обобщения и модификации. Указано, что проводится большая программа экспериментов по испытанию эффективности метода. Б. А. Самокиш

879. **Об обращении одного важного класса матриц. Стоякович** (Solution du problème d'inversion d'une classe importante de matrices. Stojakovic Mirko), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 8, 1133—1135 (франц.)

Задача определения коэффициентов интерполяционного полинома

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad f(x_k) = y_k = \sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i$$

по заданным узлам, равносильна обращению матриц

$$V_n = \left[x_{i-1}^{j-1}\right] \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n+1, x_i^0 = 1),$$

а именно:

$$f(x) = (V_n^{-1}\eta, \xi(x)), \text{ где } \eta = (y_0, \ldots, y_n),$$

$$V_n'\eta = (a_0, a_1, \ldots, a_n), \ \xi(x) = (1, x, x^2, \ldots, x^n).$$

Опираясь на свойства симметрических функций, автор

1) установил

$$V_n^{-1} = S_n V_n^* L_n,$$

где $S_n = [s_{ij}]$, $L_n = [l_{ij}]$,

$$s_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} S_{n+2-i-j,\, n}, & i + j \leqslant n + 2 \\ 0, & i + j > n+2 \end{cases},$$

$$l_{ij} = \begin{cases} (-1)^j \left[\prod_{\nu=0}^{j-2} (x_{i-1} - x_\nu) \prod_{\nu=i}^{n} (x_\nu - x_{i-1})\right]^{-1}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

2) дал простой, удобный для машин, алгорифм вычисления S_{kn},

3) вывел формулы, связывающие V_{n+1}^{-1} с V_n^{-1}.

В. Н. Кублановская

880. **К методу Штифеля вычисления собственных значений с помощью констант Шварца. Бодевиг** (Zu Stiefels Berechnung der Eigenwerte aus den Schwarz-

schen Konstanten. Bodewig E.), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 1-2, 72—73 (нем.)

Указывается, что некоторые известные методы разыскания собственных значений матрицы A не позволяют определить кратность этих значений. Предлагаются два приема. Первый широко известен. Второй служит для определения максимального порядка k элементарных делителей, принадлежащих наибольшему по модулю собственному значению λ_1. Основан он на том, что если S_m суть константы Шварца матрицы A, то сходимость в предельном равенстве

$$\lambda_1 = \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{m+p} \frac{s_{m+1}}{s_m}$$

будет наиболее быстрой при $p=k$. Предлагается (без указания определенного алгорифма) определять k путем проб, придавая p различные значения и сравнивая получаемую быстроту сходимости. М. К. Гавурин

881. К матричному исчислению. V. Бодевиг (Zum Matrizenkalkul. V. Bodewig E.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1957, A60, № 3, 242—247; Indagationes math., 1957, **19**, № 3, 242—247 (нем.)

Ч. I—IV см. РЖМат, 1955, 4876; 1957, 4614; 1958, 3298, 3299.

Критикуя алгорифмы деления и вычитания Рутисхаузера (РЖМат, 1955, 5316), автор противопоставляет им многократный степенной метод. Однако автор не принимает во внимание модификацию алгорифма деления и вычитания (РЖМат, 1956, 4926), приводящую к процессу с квадратичной сходимостью. В. Н. Фаддеева

882. Практический способ решения кубических уравнений. Салливан (Practical solution of cubic equations. Sullivan G. L.), Mach. Design, 1957, **29**, № 4, 135—136 (англ.)

Дан приближенный с ошибкой не более 0,1% метод решения кубических уравнений ($p^3+ap^2+bp+c=0$) для применения при решении электротехнических задач. При этом, как и при точном решении, производится исключение члена уравнения с неизвестным в квадрате введением коэффициентов $N=\frac{b}{3}-\frac{a^2}{9}$ и $Q=\frac{c}{2}-\frac{ab}{6}+\frac{a^3}{27}$ и вычислением отношения $K=\frac{N^3}{Q^2}$. Применяемое при точном решении уравнения тригонометрическое решение заменяется приближенным, основываясь на выражении для cos трети угла через cos целого угла:

$$\cos\frac{\theta}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+0{,}386\cos\theta}{1+0{,}2\cos\theta}\right)$$

при $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Дана таблица значений $\cos\frac{\theta}{3}$ точных и определенных по приведенной формуле. Е. Е. Эренбург

883. Определение комплексных корней алгебраических уравнений при помощи малых электронно-счетных устройств. Шпиндельбергер (Bestimmung der komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen auf elektronischen Kleinrechenanlagen. Spindelberger W.), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 2, 83—90 (нем.)

Излагается метод определения комплексных корней алгебраических уравнений, который включает как свою составную часть метод, описанный автором ранее.

Метод требует для отыскания каждой пары комплексных сопряженных корней выполнения на электронно-счетной машине двух операций, между которыми необходим перерыв в работе прибора, так как перед проведением второй операции необходимо изучение результатов первой операции.

Метод основан на отыскании таких трехчленов второй степени, которые содержат комплексные корни и на которые многочлен $f(x)$, являющийся левой частью уравнения $f(x)=0$, делится без остатка. Б. А. Ляхов

884. К методу решения алгебраических уравнений с многими парами комплексных корней по методу Греффе. Горак (K jedné metodě užívané při výpočtu hodnot komplexních kořenů algebraické rovnice metodu Graeffeovou. Horák Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1957, **82**, № 4, 440—453 (чешск.; рез. русск., нем.)

Пусть имеется алгебраическое уравнение степени $2n$ с одними комплексными корнями:

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{2n-1}x+a_{2n}=0$$

и пусть $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — абсолютные величины корней этого уравнения. Если ввести новое переменное $y=x+u$, где u — вещественное, $0<u<U=\frac{1}{2}\min(r_{i+1}-r_i)$, то получим новое уравнение

$$\alpha_0y^{2n}+\alpha_1y^{2n-1}+\ldots+\alpha_n=0,$$

абсолютные величины корней которого равны $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Тогда корни исходного уравнения можно выбрать из n^2 квадратных уравнений:

$$x^2+\frac{\rho_p{}^2-r_q{}^2-u^2}{u}x+r_q{}^2=0, \qquad p, q=1,2,\ldots n.$$

Приводятся достаточные условия для однозначного выбора нужных уравнений. Ход вычисления показан на числовом примере. Л. М. Голубева

885. Методы автоматического расчета линз. Федер (Automatic lens design methods. Feder Donald P.), J. Opt. Soc. America, 1957, **47**, № 10, 902—912 (англ.)

Расчет конструкций оптических линз сводится к решению нелинейных систем алгебраических уравнений, подчиненных граничным условиям.

Автор описывает некоторые известные методы решения (градиентный метод, метод последовательной замены переменных, методы линеаризации, наименьших квадратов и др.) и, не вдаваясь в глубокий анализ их, дает практические советы по их использованию. Приводится числовой пример, показывающий, как можно улучшить сходимость метода наискорейшего спуска подбором соответствующей метрики. В. Н. Кублановская

886. Эксперименты и модели для обучения методу Монте-Карло. Вальтер (Experiments and models for the Monte Carlo method. Walther Alwin), Sympos. Monte Carlo Methods, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1956, 278—282 (англ.)

Сообщается об опытах и моделях, которые демонстрировались студентам, изучающим метод Монте-Карло в Институте прикладной математики Высшей технической школы в Дармштадте.

Студентам, знающим обычные способы вычисления определенного интеграла $\int_0^1 x^2dx$, как предела суммы и как разности двух значений неопределенного интеграла, был показан следующий опыт по вычислению этого интеграла при помощи метода Монте-Карло. Двум студенткам были выданы две коробки, содержащие по 99 жетонов. Жетоны первой коробки (x-коробки) обозначались номерами 01, 02, 03 ..., 98, 99 и на них были написаны квадраты этих чисел 0001, 0004, 0009, ..., 9604, 9801. На жетонах второй коробки (y-коробки) стояли только номера 0100, 0200, 0300, ..., 9800, 9900. Каждый x или y жетон обозначал номер подынтервала, равного сотой

доле области интегрирования от 0 до 1, соответственно по осям x или y. Студентка, имевшая x-коробку, вытаскивала один жетон, объявляла квадрат номера этого жетона, опускала жетон в коробку и перемешивала жетоны. Студентка с y-коробкой вытаскивала свой жетон, сравнивала его номер с услышанным числом и объявляла «выше» или «ниже» в зависимости от того, является ли прочитанное ей число больше или меньше услышанного. Преподаватель отмечал на доске количество случаев «выше» и «ниже» и вычислял значение определенного интеграла по формуле

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \frac{B}{A+B}, \qquad (1)$$

где A и B — число случаев «выше» и «ниже» соответственно.

Для наглядного вычисления интеграла (1) таким же методом был построен простой прибор с зажигающимися лампочками. Лампочки были расположены позади вертикального листа плексигласа с изображением координатных осей, параболы $y=x^2$ и области интегрирования (0,1). Площадь квадрата со стороной, равной единице, была разбита на 144 квадратика, в центре каждого из которых размещалась одна лампочка. Для включения какого-либо параллельного оси x или y ряда лампочек, лампочки были подключены к двенадцатипозиционным коммутаторам. Какой-либо из x или y рядов лампочек загорался случайно при нажатии кнопки, и место пересечения рядов x и y лежало выше или ниже параболы $y=x^2$. Значение интеграла получалось также по формуле (1).

В заключение автор выражает надежду, что при помощи изложенной методики идеи метода Монте-Карло станут доступными уже для студентов младших курсов.

В. Я. Евфанов

887. Методы «Монте-Карло» для итерации линейных операторов. Кертисс («Monte Carlo» methods for the iteration of linear operators. Curtiss J. H.), J. Math. and Phys., 1954, **32**, № 4, 209—232 (англ.)

Русский перевод см. РЖМат, 1958, 6210

888. Линейные уравнения вместо интегрирований в математической теории упругости. Альтерман (Linear equations instead of integrations in the mathematical theory of elasticity. Alterman I.), Bull. Res. Council Israel, 1956, **A6**, № 1, 50—54 (англ.)

При расчете статического прогиба балки под воздействием заданной сплошной нагрузки (приближенно), выражающейся полиномом или кусочно-полиномиальной функцией, функция $y(x)$, задающая упругую линию балки, и ее производные также являются полиномами (или кусочно-полиномиальны). Разлагая $y(x)$ и ее производные в ряды Тэйлора и учитывая краевые условия, получим систему линейных уравнений, из которых можно определить неизвестные коэффициенты полиномов. Метод отличается по форме от обычного (последовательного интегрирования и определения постоянных интегрирования).

М. Л. Бродский

889. Операции с экспериментальными кривыми. Кульми (Operations sur les courbes expérimentales. Coulmi Geneviève), C. R. Acad. sci., 1958, **246**, № 12, 1799—1800 (франц.)

Рассматриваются 3 метода: метод шлифовки экспериментальных кривых, методы численного интегрирования и дифференцирования.

1. Метод шлифовки определяется как операция, применяемая для получения системы поправок ε_i таких, что $Y_i=y_i+\varepsilon_i$, где Y_i — точные значения функции, а y_i — экспериментальные. 2. Выводятся формулы, дающие первую и вторую производные в каждой точке экспериментальной кривой путем рассмотрения последовательных приращений функций. 3. Выводятся различные формулы квадратур, в частности формула

$$Y_{0,n} = h\left[\frac{13}{36}(y_0+y_n)+\frac{7}{6}(y_1+y_{n-1})+y_2+y_{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{35}{36}(y_3+y_{n-3})+\sum_{q=4}^{n-4} y_q\right].$$

М. А. Мертвецова

890. Применение полиномов для математической характеристики сложности рельефа земной поверхности. Хейфец Б. С., Изв. высш. учебн. заведений. Геод. и аэрофотосъемка, 1958, № 1, 79—86

Элементарные соображения относительно нахождения полиномов, аппроксимирующих данные, заданные таблично, функции одной и двух независимых переменных.

В. К. Саульев

891. Вычисление экспериментальной кривой при условии ее регулярности. Вернотт (Calcul effectif d'une courbe expérimentale par la clause de régularité. Application à la dérivation. Vernotte Pierre), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 9, 1389—1391 (франц.)

Решается задача вычисления экспериментальной кривой при условии регулярности сведением ее к решению линейных неравенств с двумя неизвестными. Приближения для ординат определяются из уравнения

$$(n+5)^2 Y_{n+6} = (5n^2+43n+93)Y_{n+5} - (10n^2+72n+$$
$$+131)Y_{n+4} + (10n^2+58n+85)Y_{n+1} - (5n^2+22n+$$
$$+24)Y_{n+2} + (n+1)(n+2)Y_{n+1}.$$

при $n=0$ и $n=1$ имеем

$$25Y_6 = 93Y_5 - 131Y_4 + 85Y_3 - 24Y_2 + 2Y_1,$$
$$12Y_7 = 47Y_6 - 71Y_6 + 51Y_4 - 17Y_3 + 2Y_2.$$

Поправки определяются из неравенств

$$\varepsilon_6 > \frac{47}{42}\varepsilon_5 + \frac{58}{189}\varepsilon_1 + \frac{17(M+N)}{482} + \frac{20H_3-7H_2}{6048},$$

$$\varepsilon_6 < \frac{418}{371}\varepsilon_5 + \frac{1012}{3339}\varepsilon_7 + \frac{17N}{477} + \frac{15H_3-6H_2}{6678},$$

где M, N, H_2, H_3 — известные величины.

М. А. Мертвецова

892. Графические версии методов численного решения интегралов. Новые пути графического интегрирования. Шмагель (Grafické verse různých integračních method numerického počtu. Nové cesty grafického integrování. Šmahel Josef), Elektrotechn. obzor, 1955, **44**, № 4, 186—192 (чешск.; рез. русск., англ., франц., нем.).

Автор в сущности опирается на формулу Ньютона-Котеса для численного интегрирования; он приводит лишь некоторые частные случаи ее при $n=1, 2, 3, 4, 5$ (включая остаточные члены):

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0+f_1) \qquad \text{(для } n=1\text{)};$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2) \qquad \text{(для } n=2\text{)};$$

$$\int_{x_0}^{x_0+5h} f(x)\,dx = \frac{5h}{188}\,(19f_0+75f_1+50f_2+50f_3+75f_4+19f_5)$$

(для $n=5$).

Если значения функции f_k $(k=0, 1, \ldots, 5)$ изобразить как ординаты графика функции, то вычисления по приведенным формулам можно проводить средствами графической арифметики (применение геометрического построения произведения двух чисел). Группируя подходящим способом члены f_k в скобках в правой части формул, автор находит различные возможности (версии) графического представления данной формулы.

Поскольку с увеличением числа частей деления уменьшается число необходимых соединяющих прямых (для представления формулы), то некоторые из этих графических версий можно считать более выгодными, чем обычно применяемый метод Симпсона. Автор не рассматривает вопросы о неточностях, возникающих при черчении. V. Pleskot

893 К. Тезисы докладов на Совещании по вычислительной математике и применению средств вычислительной техники, Баку, 1958, (АН АзербССР, Вычисл. центр. АН СССР, Ин-т автоматики и телемехан. АН СССР). Баку, АН АзербССР, 1958, 64 стр., беспл.

894 Д. Некоторые разностные схемы решения первой краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Юань Чжао-дин. — Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

ТАБЛИЦЫ

895. К вопросу о создании новых числовых таблиц для средней школы. Конрад (Zur Frage der Entwicklung neuer Zahlentafeln für die Mittel — und Oberschulen. Conrad Rudolf), Math. und Phys. Schule, 1958, 5, № 3, 158—166 (нем.)

В немецких средних школах уже более 60 лет используются четырехзначные таблицы Шульке. Однако современное производство требует от трудящихся все более основательных математических знаний, хороших навыков в обращении с таблицами, диаграммами, номограммами и пр. В связи с этим, таблицы Шульке уже не могут более удовлетворять современным задачам школы в рабоче-крестьянском немецком государстве. Среди 30 учителей средней школы была проведена анкета, содержащая в основном следующие вопросы: а) Нужны ли в школе четырехзначные или пятизначные таблицы? б) Какие из таблиц Шульке могут быть сохранены и в каком виде? в) Какие числовые таблицы, приближенные формулы, номограммы, сведения из техники, физики, химии, астрономии целесообразно включить в сборник таблиц? г) Какие улучшения можно предложить в отношении вида таблиц?

Отметим, в частности, что большинство опрошенных высказалось за четырехзначные таблицы, за возможность сохранения в основном таблиц Шульке при некоторой их модернизации. По многим вопросам мнения опрошенных расходились. Так, только 15 человек высказались за таблицу натуральных логарифмов целых чисел от 1 до 1000 и лишь 10 — за формулы, выходящие за пределы школьного материала.

Автор подробно разбирает полученные ответы, часто не соглашаясь с мнением большинства, высказываясь, например, за введение в таблицы разнообразных приближенных формул и номограмм. Он выражает надежду на дальнейшую дискуссию по вопросу о создании новых таблиц. З. Х. Рафальсон

896. Нужна ли интерполяция в таблицах квадратов чисел для учеников 8-го класса? Шёбль (Quadrattafel im achten Schuljahr mit oder ohne Interpolation? Schöbl Felix), Math. und Phys. Schule, 1958, 5, № 1, 13—23 (нем.)

897. Субтабулирование в связи с быстродействующими вычислительными машинами. Буллетт (Subtabulation with special reference to a high-speed computer. Woollett Enid R.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, 11, № 2, 185—195 (англ.)

Предложены формулы для субтабулирования, несколько обобщающие формулы Комри (Comrie L. J., J. Roy. Statist. Soc., 1936, Suppl. 11, 2, 87—113) и Бауэра (Bower E. C., Lick Observ. Bull. 1935, № 467, 65—76). Произведено сравнение методов в связи с их использованием в быстродействующих вычислительных машинах. Получены выражения для накопления ошибок округления. Приведены примеры. Н. П. Жидков

898. Сглаживание конечной таблицы: матричный подход. Гревилл (On smoothing a finite table: a matrix approach. Greville T. N. E.), J. Soc. Industr. and Appl. Math, 1957, 5, № 3, 137—154 (англ.)

Сглаживание конечной таблицы значений функции в равноотстоящих точках сложнее, чем сглаживание бесконечной таблицы, исследованное Шёнбергом (см., например, РЖМат, 1953, 1614), так как вблизи концов требуются специальные формулы. Будем рассматривать совокупность значений сглаживаемой функции в n равноотстоящих точках как вектор u, сглаживание — как применение к нему матрицы A: $v=Au$. На процесс сглаживания налагаются два требования: 1) должно существовать линейное подпространство L „гладких" векторов, для которых $Au=u$; 2) при неограниченном последовательном применении A к любому вектору u $\lim_{n\to\infty} A^n u$ должен существовать и, следовательно, входить в L. Для этого необходимо и достаточно, чтобы единица была простым корнем минимального многочлена матрицы A и все остальные корни этого многочлена были по модулю меньше единицы. Выводится ряд удобных для применения признаков того, что процесс сглаживания, задаваемый данной матрицей A, удовлетворяет этим требованиям. Рассмотрены специальные классы методов сглаживания, в частности, если $\lim_{n\to\infty} A^n$ — оператор ортогонального проектирования на множество L векторов, соответствующих полиномам не выше $(m-1)$-й степени (удовлетворяющих условиям $\Delta^m u_i = 0$). Рассмотрены также более общие методы сглаживания, например минимизирующие сумму двух квадратичных форм, из которых одна характеризует гладкость v, а другая — отклонение v от u. Анализируется большое число работ по различным методам сглаживания. М. Л. Бродский

899. Использование полиномов в математических таблицах. Кленшоу, Олвер (The use of economized polynomials in mathematical tables. Clenshaw C. W., Olver F. W. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 614—628 (англ.)

Демонстрируется значение метода аппроксимации функций полиномами для уже опубликованных таблиц. Пусть разложение функции $f(x)$ по полиномам Чебышева на табулируемом интервале $a \leqslant x \leqslant a+h$

$$f(a+ph) = \alpha_0 + 2\alpha_1 T_1^*(p) + 2\alpha_2 T_2^*(p) + \ldots \qquad (1)$$

$(0 \leqslant p \leqslant 1, \quad T_n^*(x) = T_n(2x-1) = T_{2n}(\sqrt{x}))$

оборвано на члене $2\alpha_n T_n^*(p)$. Разложим результат по степеням p:

$$f(a+ph) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots + c_n p^n + \eta(p). \qquad (2)$$

Остаточный член ряда

$$\eta(p) = 2\alpha_{n+1}T^*_{n+1}(p) = 2\alpha_{n+2}T^*_{n+2}(p) + \ldots \qquad (3)$$

не превышает единицы в последнем десятичном знаке, удерживаемом при достаточно большом n. Коэффициенты $c_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ могут быть даны в таблицах рядом с $f(x)$. Тогда интерполяция может осуществляться по формуле (2).

В § 2 и § 3 рассматривается случай, когда c_i неудобно табулировать вместе с $f(x)$ и желательно заменить постоянный член в формуле (2) через $f(u)$. В § 4 рассматриваются ошибки округления, связанные с вычислениями по формуле (2). В § 5 речь идет о наиболее разумном выборе интерполяционных полиномов для интервала $0 \leqslant p \leqslant 1$, если принять во внимание совместное действие ошибок округления и ошибок, полученных при отбрасывании остаточного члена (3). Точные формулы для коэффициентов полиномов степени n, где $2 \leqslant n \leqslant 6$, даны в § 6. Другие формы аппроксимации полиномами рассмотрены в § 7. В § 8 даются оценки производных, которые используются при интерполяции экономизированными полиномами. Этот же вопрос рассмотрен и в § 9, где, кроме того, даны числовые примеры, использующие разные стандартные методы интерполяции. Л. А. Сорокина

900. Коэффициенты Клебш-Гордан для $j_2 = 5/2$. Сайто, Морита (Clebsch-Gordan coefficients for $j_2 = 5/2$. Saito Reiko, Morita Masato), Progr. Theoret. Phys., 1955, 13, 540—542 (англ.)

Используя формулу, данную на стр. 75 книги Кондона и Шортли «Теория атомных спектров» (Кембридж, 1935), автор табулирует явные выражения коэффициентов Клебш — Гордан $(j_1 j_2 m_1 m_2 / j_1 j_2 | m)$ через j_1 и m для $j_2 = 5/2$, $j - j_1 = -5/2\,(1)\,5/2$, $m_2 = m - m_1 = -5/2\,(1)\,5/2$.

A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 415.

901. Расширение таблиц Мак—Дугалл—Стонера функций Ферми—Дирака. Бир, Чейс, Шокар (Extension of McDougall-Stoner tables of the Fermi—Dirac-functions. Beer A. C., Chase M. N., Choquard P. F.), Helv. Phys. Acta, 1955, **28**, 529—542 (англ.)

Функции Ферми—Дирака $F_k(\tau_l) = \int_0^\infty x^k (1 + e^{x-\tau_l})^{-1} dx$ были протабулированы Мак—Дугаллом и Стонером (Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1938, **A237**, 67—104) по существу для $k = -1/2, +1/2, +3/2$. В силу соотношения $(\partial/\partial\tau_l) F_k(\tau_l) = k F_{k-1}(\tau_l)$ при помощи численного интегрирования и использования таблиц Мак—Дугалл—Стонера можно получить F_k для больших значений k. Было применено соотношение

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{12}[f'(1) - f'(0)] + \frac{1}{720}[f'''(1) - f'''(0)]$$

и использовался табулятор. Таблица, включающая таблицу Мак-Дугалл-Стонера, дает $F_k(\tau_l)$ для $k = -\frac{1}{2}\,(1)\,11/2$ и $k = -4\,(0{,}1)\,20$. Начальные значения были получены при помощи степенного ряда и контроль осуществлялся при помощи $F_k(0) = (1 - 2^{-k})\,k! \times \zeta(k+1)$ в $\tau_l = 0$ и при помощи асимптотического разложения в $\tau_l = 10\,(2)\,20$. Имеются небольшие таблицы, дающие коэффициенты в асимптотическом разложении и разность между табулированными значениями и контрольными значениями. Для $k \geqslant 3/2$ таблицы точны с пятью знаками и для $\tau_l > 0$ ошибки не превосходят единицы шестого знака. Имеются ссылки на более ранние таблицы. John Todd

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 6, 672.

902. Осесимметричное сверхзвуковое течение свободно расширяющегося газа с плоской переходной поверхностью (таблицы). Кацкова О. Н., Шмыглевский Ю. Д., Вычисл. математика, сб. 2, 1957, 45—89

Осесимметрическое безвихревое движение газа описывается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial r\rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial r\rho v_r}{\partial r} = 0 \qquad (1)$$

и уравнением отсутствия вихрей

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

Здесь x, r — декартовы координаты в меридиональной плоскости течения, v_x, v_r — составляющие скорости и ρ — относительная плотность, определяемая через скорость уравнением

$$\rho = \left[\frac{\varkappa + 1}{2} - \frac{\varkappa - 1}{2}(v_x^2 + v_r^2)\right]^{\frac{1}{\varkappa - 1}}, \qquad (3)$$

где $\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей. Если теперь в качестве новых искомых функций выбрать угол Маха α и угол наклона скорости ϑ, а в качестве новых независимых переменных взять z и χ такие, что линии $z = \text{const}$ дают линию тока, а $\chi = \text{const}$ — характеристики второго семейства, выходящие пучком из одной точки, то в результате преобразований мы получим систему уравнений, относительно α, ϑ и r, эквивалентную системе (1)—(3). Решение этой новой системы в окрестности звуковой линии может быть найдено с помощью следующих степенных рядов:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi}{2} + \alpha_1(z)\,\chi + \alpha_2(z)\,\chi^2 + \ldots \\ \vartheta &= \vartheta_1(z)\,\chi + \vartheta_2(z)\,\chi^2 + \ldots \\ r &= z + r_1(z)\,\chi + r_2(z)\,\chi^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Если ряды (4) подставить в нашу систему и приравнять нулю суммы коэффициентов при одинаковых степенях χ, то получится система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\alpha_i(z)$, $\vartheta_i(z)$ и $r_i(z)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Значения α, ϑ и r, определенные на некоторой характеристике $\chi = \chi_*$, достаточно близкой к $\chi = 0$, позволяют найти функцию $X(z)$. Остальная часть течения может быть легко рассчитана методом характеристик. Если же ввести новую искомую функцию ω по формуле $\omega = 4\frac{r_4}{\vartheta_3}$, то можно легко показать, что она может быть определена из уравнения

$$\omega''' = \frac{1}{\omega\omega'}\left[\omega''(5\omega'^2 - \omega\omega'') + \frac{\omega'}{z}(\omega'^2 - \omega\omega'')\right]. \qquad (5)$$

Уравнение (5) позволяет создать универсальную таблицу для $\omega(z)$. В работе приводятся несколько таблиц. Таблица № 1 содержит величины $\omega(z)$, $\omega'(z)$, $\omega''(z)$ для $z = 0{,}000(0{,}001)1{,}000$. Таблица № 2 дает величины α, ϑ, r, x в точках пересечения линий тока $z = \text{const}$ с характеристиками второго семейства $\chi = \text{const}$. Там же приводятся значения интеграла давления

$$P = \int_{r=z}^{r}\left[\frac{1 - \cos 2\alpha}{\varkappa - \cos 2\alpha}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} r\,dr.$$

Интегрирование здесь ведется вдоль линии тока $z = \text{const}$. Характеристики второго семейства нумеруются в таблице не с помощью χ, а с помошью угла ϑ при $z = 1$, который обозначен через θ.

Таблицы приводятся для значений $\varkappa = 1{,}14000$, 1,33000, 1,40000, 1,66667 и для $z^2 = 0{,}0000\,(0{,}0525)\,1{,}0000$. Значения функции P приводятся для $z^2 = 0{,}5625\,(0{,}0625)\,1{,}0000$ и тех же значений $\varkappa$. Все таблицы даны с четырьмя десятичными знаками.

Расчет таблиц произведен на быстродействующей счетной машине БЭСМ АН СССР. Л. А. Сорокина

903. Таблица полиномов Эрмита, предназначенная для расчетов с волновыми функциями гармонического осциллятора. Грамонтань (Table de polynômes d'Hermite destinée au calcul des fonctions d'onde harmoniques. Grandmontagne Raymond), J. phys. et radium, 1958, **19**, № 2, 153—158 (франц.; рез. англ.)

Рассматривается волновая функция гармонического осциллятора

$$\Psi_v = \sqrt[4]{\alpha}\cdot N_v \cdot H_v(x)\exp(-x^2/2),$$

где α — число, зависящее от природы молекулы, $N_v = (2^v \cdot v!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}$ — нормирующий множитель, $H_v(x)$ — полином Эрмита степени v. Приведена таблица шестизначных логарифмов $H_v(x)$ $(2 \leqslant v \leqslant 30)$ и выражения $\exp(-x^2/2)$; кроме того, дается логарифм N_v (логарифмы десятичные). Для $0 \leqslant x \leqslant 7$ даются 12 значений x в каждом промежутке длины 1; для $7 \leqslant x \leqslant 8{,}5$ значения x даются через 0,5. Вычисления велись с помощью электронной машины. Автор заверяет, что в этой работе сделано все возможное, чтобы избежать ошибок. З. Х. Рафальсон

904. Таблицы первого момента упорядоченных экстремумов. Либлейн, Солзер (Table of the first moment of ranked extremes. Lieblein Julius Salzer Herbert E.), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1957, **59**, № 3, 203—206 (англ.)

Приводится таблица ожидаемых значений

$$E(y_m) = C + \sum_{t=0}^{m-1}(-1)^t\left[\frac{n}{t}\right]\Delta^t \ln(n-t), \qquad (1)$$

где $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_m \geqslant \ldots \geqslant y_{n-1} \geqslant y_n$ обозначают порядковые статистики, т. е. n наблюденных значений случайных величин, расположенных в порядке убывания; C — константа Эйлера.

Функция $E(y_m)$ протабулирована для $m = 1(1)\min(n, 26)$, $n = 1\,(1)\,10\,(5)\,60\,(10)\,100$. Все значения даны с семью десятичными знаками. Интерполяция в таблицах может быть выполнена графическим способом по схеме, приложенной к таблице.

Вычисление $E(y_m)$ из уравнения (1) было выполнено с помощью настольных вычислительных машин Л. А. Сорокина

905. Новые таблицы амплитудных функций повторных интегральных синусов и косинусов и некоторые примечания об апериодических функциях в теории антенн Халлена. Брунделль (A new table of the amplitude functions of the iterated sine- and cosine-integrals and some comments on the aperiodic functions in Hallén's antenna theory. Brundell P.-O. Kgl. tekn. högskolans handl., 1957, № 108, 14 pp.) (англ.)

Рассматриваются определение и свойства апериодических функций. Затем автор переходит к рассмотрению свойств апериодических амплитудных функций повторных интегральных синусов и косинусов. Приводятся таблицы значений действительных и мнимых частей этих функций для $x = 0{,}0\,(0{,}2)\,14{,}0$. Таблицы даны с шестью десятичными знаками. Вычисления были выполнены на электронной машине БЭСК. Для некоторых функций был сделан числовой контроль по рекуррентным формулам. Л. А. Сорокина

906 К. Таблица регулярных непрерывных дробей и их полных отношений для квадратных корней из натуральных чисел от 1 до 10000. Пац (Tafel der regelmässigen Kettenbrüche und ihrer vollständigen Quotienten für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1—10000. Patz Wilhelm. Berlin, Akad.-Verl., 1955, xi, 1210S., 53 00 DM) (нем.)

Книгу можно рассматривать как значительно расширенное второе издание предыдущей книги автора, озаглавленной „Tafel der regelmässigen Kettenbrüche für die Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1—10 000" (Leipzig, 1941). Как указывает новое заглавие, новый материал, включенный в настоящую таблицу, заключается в положительных целых P_n и Q_n, находящихся в полном отношении $x_n = (D^{1/2} + P_n)/Q_n$. Прежняя таблица дает только частные отношения $[x_n]$. Эта новая таблица неожиданно оказалась по крайней мере в четыре раза больше. Конечно, она намного полезнее. Например, можно с одного взгляда сказать, возможно или нет диофантово уравнение $x^2 - Dy^2 = k\,(k^2 < D)$. Таблица фактически продолжается до 10010 и посвящается памяти Брандта, который написал объяснительное введение. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 4, 347

907 К. Таблицы логарифмов. Шрон, Уэль (Tábuas de logaritimos com sete decimais; dos números inteiros desde I até 108.000, e para fraçoes trigonométricas de 10 em 10 segundos. Schron L., Houel J. Rio de Janeiro, Ed. Cientifica, 1957, XVI, 550 p., 220,00 cruz.) Bol. bibliogr. brasil., 1957, **5**, № 2, 78 (порт.)

См. также: 371, 399, 424, 472, 557, 596, 597, 598, 600

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

908. Сверхвысокочастотная импульсная техника и логические схемы. Розенхейм, Андерсон (VHF pulse techniques and logical circuitry. Rosenheim D. E., Anderson A. G.), Proc. I. R. E., 1957, **45**, № 2, 212—219, 244, 245 (англ.)

Системы передачи информации, а также современные быстродействующие вычислительные машины используют сверхвысокочастотные импульсные схемы с длительностями импульсов порядка 10 нсек и частотой 50 *мгц*. Доступные в настоящее время транзисторы еще непригодны для этих целей. Поэтому в таких схемах можно применять вакуумные триоды тока

417A/5842 фирмы «Вестерн Электрик» и пентоды со вторичной эмиссией типа EFP-60 фирмы «Филипс», имеющие исключительно высокую крутизну 20—25 *ма/в*. В триоде EFP-60 время нарастания сигнала на диоде может быть получено 3 нсек.

Широкое применение в логических схемах получили полупроводниковые диоды. Однако они имеют существенные ограничения в скорости работы, накладываемые так называемым эффектом «времени обратного возврата» (т. е. тенденцией диода задержать на некоторое время высокую обратную проводимость после приложения к нему обратного смещения, что обусловлено конечным временем удаления носителей из проводящего диода) и эффектом «времени прямого возврата» (т. е. тенденцией диода сохранять высокое прямое сопротивление спустя некоторое время после приложения прямого напряжения). Специальные золоченые плоскостные германиевые диоды были разработаны для получения высокой прямой проводимости при удовлетворительной характеристике обратного возврата. Для получения хороших временных характеристик логических схем типа «И» необходимы источники с малым внутренним сопротивлением, для чего применяются катодные повторители на лампах 5842. Пентод EFP-60 был также применен для быстродействующих регенеративных схем мультивибраторов, кипп-реле, блокинг-генераторов, формирователей. Длительность импульсов при этом составляла 20—25 нсек.

На базе этих компонентов был разработан арифметический узел, который выполняет двоичное сложение, умножение и динамическую фиксацию информации при частоте повторения импульсов 50 *мгц*, которую дает специальный генератор. С помощью делителей частоты на мультивибраторах получались синхронизирующие сигналы частотой 3,125 *мгц* с длительностью импульсов 10 нсек. Следует подчеркнуть, что использование ламп EFP-60 и 5842 непрактично, ибо они дороги, габаритны и малоэффективны.

Г. Х. Новик

909. Метод деления в цифровых вычислительных машинах. Надлер (A method of division in digital computers. Nadler M.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 11-12, 463—464 (англ.)

Так как деление является обратной операцией по отношению к умножению, то «идеальным» методом деления в вычислительных машинах явился бы метод, позволяющий использовать те же схемы и то же число элементарных операций, что и при умножении. Рассматриваемый метод деления десятичных чисел приближается в этом смысле к идеальному.

Пусть a и b — делимое и делитель. Предлагаемый метод нахождения частного заключается в разложении числа, обратного b (т. е. b^{-1}), на легко получаемые множители p_i, на произведение которых затем умножается число a. Иначе говоря, деление заменяется умножением на приближающиеся к единице числа p_i вида $1+10^{-p}\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant 9)$, или, на языке машинных операций, сводится к умножению на одну цифру, сдвигу на определенное число позиций и сложению. Этот процесс повторяется несколько раз в зависимости от заданной степени точности деления. Максимальное число шагов при таком делении, требующихся для получения N значащих цифр, будет $i_N\leqslant N+6$.

В статье подробно рассматриваются конкретные примеры деления чисел, причем число операций выбирается так, что достигается желаемая точность деления.

Указывается, что этот метод деления обладает еще большими достоинствами применительно к двоичным числам; поэтому, вероятно, его окажется удобно использовать в больших вычислительных устройствах.

В. С. Бородин

910. Измененная логическая схема для улучшения быстродействия двухрядных счетчиков. Басу, Рао (A modified gating logic to improve the speed of operation of double rank counters. Basu B. K., Rao P. V. S.), Proc. Indian Acad. Sci., 1957, **A46**, № 5, 354—359 (англ.)

Описывается блок-схема электронного счетчика импульсов, которая, по утверждению автора, обладает повышенным быстродействием по сравнению с обычными схемами. Каждый счет, т. е. увеличение числа, содержащегося в счетчике, на единицу, совершается при поступлении на вход счетчика пары импульсов. Каждый каскад счетчика состоит из двух триггеров, один из которых хранит истинное значение данного разряда числа, представляющего собой количество сосчитанных импульсов, а второй — некоторое значение, называемое ложным. Триггеры соединены между собой системой вентилей, реализующей выполнение следующих правил:

а) каждый первый импульс каждой пары вызывает передачу содержимого i-го триггера истинных значений в соответствующий триггер ложных значений тогда и только тогда, когда значения во всех младших разрядах счетчика с 1-го по i—1-й равны 1;

б) каждый первый импульс каждой пары всегда вызывает передачу содержимого первого (самого младшего) триггера истинных значений в первый триггер ложных значений;

в) каждый второй импульс каждой пары всегда вызывает передачу содержимого всех триггеров ложных значений в соответствующие триггеры истинных значений дополнительным кодом.

Экспериментальные исследования четырехразрядного макета счетчика показали, что полная длительность передачи числа из триггеров истинных значений в триггеры ложных значений равна длительности переходного процесса в одном триггере. Библ. 4 назв.

А. В. Шилейко

911. Перевод чисел из системы остаточных классов в полиадическую систему изменением масштаба периода. Валах (Převod čísel ze soustavy zbytkových tříd do polyadické soustavy změnou měřítka periody. Valach Miroslav), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 53—64 (чешск.; рез. русск., англ.)

Статья является продолжением двух предыдущих работ (РЖМат, 1957, 5224; 1958, 7257) и содержит теоретические основы перевода чисел из системы остаточных классов в полиадическую систему посредством так называемого изменения масштаба периода. В первых параграфах описывается вычисление так называемой оценочной таблицы и её применение. Например, для системы остаточных классов $p_0=3$, $p_1=4$, $p_2=5$, $p_3=7$, $p_4=11$ таблица имеет следующий вид:

Таблица 1

$p_0=3$	$p_1=4$	$p_2=5$	$p_3=7$	$p_4=11$	
012	0123	01234	0123456	0123456789	10
m_1 036	0752	08642	0517284	0506172839	4
m_2 036	0505	00000	0741852	0483827160	5
m_3 036	0000	00000	0124578	0506172839	4
m_4 036	0000	00000	0482715	0493827160	5
m_5 036	0000	00000	0258147	0506172839	4

Период данной системы: $P=3\cdot4\cdot5\cdot7\cdot11=4620$. Произвольное число $N<P$ мы можем однозначно изобразить при помощи остатков N_i ($i=0, 1, 2, 3, 4$) после деления избранными основаниями. Имеем

$$N_i \equiv N \pmod{P_i},\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (1)$$

К числу N составляется новая таблица, возникающая выписанием таких столбцов табл. 1, которые обозначены цифрами N_i по уравнению (1). Например, для числа $N=1702$ имеем $N_0=1$, $N_1=2$, $N_2=2$, $N_3=1$, $N_4=8$. Новая таблица в этом случае имеет вид:

Таблица 2

12218	h	M_h	V_h
35653	1	22	22
30076	2	16	16
30013	3	7	7
30046	4	13	13
30023	5	8	8

Числа V_h — так называемые десятичные векторы. Между M_h и V_h существует соотношение: $V_h = M_h 10^{5-h}$. Сумма десятичных векторов, взятых по модулю 10^5, представляет число, пропорциональное числу N, и определяется из уравнения

$$N = b\left[\sum_{h=1}^{h=5} V_h \pmod{10^5} + \varepsilon\right],$$

где b — постоянная пропорциональности и ε — ошибка оценки. Автор приводит выражение $b = \nu\, 10^{-5}$. Например, для выбранного числа $N = 1702$ имеем $N = 1701,9155 + \varepsilon \approx 1702$. В следующих параграфах статья содержит определение некоторых новых понятий и доказательства некоторых теорем. Автор предлагает теорию перевода посредством изменения масштаба периода

J. Klír

912. Моделирование с целью проверки и оценки программ для вычислительных машин, работающих в истинном масштабе времени. Израэл (Simulation techniques for the test and evaluation of real-time computer programs. Israel David R.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 3, 354—361 (англ.)

Рассматривается возможность проверки и оценки программы для цифровой вычислительной машины, входящей в систему управления объектом и работающую в истинном масштабе времени, причем для такой проверки и оценки используется моделирование входных данных.

Приводится блок-схема системы управления, включающая управляемый объект, входные устройства, принимающие данные от объекта, вычислительную машину и выходные управляющие устройства. Задача моделирования — сымитировать ввод данных в машину и изучить полученное решение. Для имитации входных данных, не зависящих от работы системы управления, целесообразно иметь «библиотеку» данных, записанных на магнитной ленте. Для имитации входных сигналов, поступающих от управляемого объекта по цепи обратной связи, можно использовать вычислительную машину, вложив в нее дополнительную программу для преобразования выходных данных в соответствии с передаточной функцией управляемого объекта. Если передаточную функцию трудно или невозможно выразить математически, то ввод данных в этом случае может быть осуществлен оператором с помощью переключателей. Кроме проверки программы, моделирование входных данных позволяет проводить тренировку операторов, работающих на машине.

Н. В. Петрова

913. Обобщенная система программирования «Флексиматик» для машин УНИВАК (UNIVAC Flex-Matic generalized programming system), J. Mach. Account., 1957, 8, № 11, 23 (англ.)

Краткое сообщение о системе обобщенного программирования «Флексиматик», разработанной отделом «Ремингтон Рэнд» фирмы «Сперри-Рэнд» (США) для машин УНИВАК. Согласно этой системе, по исходным данным задачи, закодированным в коде «Флексиматик», машина автоматически выбирет подпрогрммы из библиотеки подпрограмм, также закодированных в коде «Флексиматик». Из выбранных подпрограмм составляется окончательная программа решения задачи, закодированная в коде машин УНИВАК. Большинство программ содержит отдельные элементы, которые могут быть использованы в других задачах. Система «Флексиматик» дает возможность оператору изолировать эти элементы и направлять их в библиотеку подпрограмм, которая, таким образом, непрерывно пополняется. В настоящее время библиотека «Флексиматик» содержит около 300 подпрограмм, полученных при решении задач на различных машинах УНИВАК. Даже при отсутствии библиотеки организация программирования по системе «Флексиматик» сокращает время программирования на одну четверть и значительно облегчает операции проверки и исправления программ. Система описана в инструкции, рассылаемой в места эксплуатации машин УНИВАК.

А. В. Шилейко

914. К вопросу об автоматизации программирования задач перевода с одного языка на другой. Разумовский С. Н., Докл. АН СССР, 1957, 113, № 4, 760—761

Отмечается сложность логической структуры алгоритмов перевода. Предлагается представлять схему задачи перевода как последовательность операторов трех типов: логических, тождественных и арифметических. Каждый оператор схемы должен быть снабжен информацией, необходимой для его программной реализации. По этой информации программирующая программа синтезирует программу перевода, которая затем сжимается за счет устранения повторений и излишних передач управления; в случае надобности построенная программа делится на части.

О. С. Кулагина

915. Методика и программирование для вычислительных машин. Волмер (Computer programming and methods. Vollmer William G.), Punched Card Annual, 1956—1957, 5, 58—67 (англ.)

Приводится перечень основных операций, выполняемых с помощью вычислительных машин и табуляторов в правлении и на предприятиях фирмы «Carrier Corporation» (фирма занимается системами кондиционирования воздуха). Недавно фирмой приобретена новая вычислительная машина ИБМ-650, которая используется теперь взамен двух табуляторов ИБМ-604 и КПК (CPC). Такая замена позволила, в частности, сократить время обработки ведомостей почасовой оплаты служащих фирмы с 32—36 час. до 3—3,5 часа.

Обсуждаются вопросы, возникающие в связи с переходом к использованию более совершенной вычислительной техники, в особенности вопросы подготовки высококвалифицированных кадров программистов. Подробно излагается опыт внедрения ИБМ-650. На конкретном примере составления и обработки перфокарт для определения зарплаты, исходя из почасовой дифференцированной оплаты разных видов работ, квалификации и т. п., подробно излагается методика программирования, применяемая фирмой.

З. Д. Доброхотова

916. Программа для определения волновых функций атома на цифровой вычислительной машине. Пайпер (A digital computer program for determining atomic-wave functions. Piper W. W.), Commun. and Electronics, 1956, № 24, 152—155 (англ.)

Решение системы неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка в частых производных для определения волновых функций иона, окруженного несколькими электронными оболочками, дает возможность определить энергетические спектры веществ, например люминесцентных фосфоров. Подобные задачи возникают очень часто при исследованиях тел, имеющих кристаллическую структуру. Решение таких систем уравнений воз-

можно лишь методом последовательных приближений, поскольку коэффициенты уравнений зависят от результатов решения. За 20 лет со времени опубликования этих уравнений было сделано лишь около 24 расчетов, поскольку они выполнялись вручную и на каждое решение требовалось от нескольких месяцев до года работы. Описывается методика решения таких систем уравнений на вычислительной машине ИБМ-650 при помощи уравнений в конечных разностях. Приводится блок-схема программы одной итерации для нахождения одной из волновых функций.

Машина ИБМ-650 имеет запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью в 2000 чисел. Программа всей задачи может целиком поместиться в таком запоминающем устройстве, если рассчитывается величина сферического пространственного заряда для 64 значений радиуса. Это позволяет учитывать при достаточной точности решения до 6 электронных оболочек. Для входных данных и констант требуется около 600 ячеек запоминающего устройства. Еще 260 ячеек требуется для хранения промежуточных результатов. Для подпрограмм считывания и перфорирования требуется около 100 позиций. Остающиеся 1000 ячеек с лишним почти полностью используются для программы. Поскольку диапазон величин для любых ионов начальной части периодической таблицы составляет не более двух порядков, то вся программа может быть записана для вычислений с фиксированной запятой.

Для одного цикла итерации на ИБМ-650 требуется 15—25 мин. машинного времени. Поскольку экстраполяция решений для близко расположенных (в периодической таблице) ионов позволяет оценить начальное значение функций в пределах нескольких процентов, то нахождение решения, когда две последующие итерации не расходятся больше чем на 0,01—0,02%, отнимает две—три итерации для каждой электронной оболочки. Для иона с 6 электронными оболочками решение находится приблизительно за 5 час. машинного времени. При оптимальном программировании, когда обращение происходит к последовательно расположенным на барабане ячейкам, время решения может быть сокращено в несколько раз. Машина со средней скоростью работы удобна для таких задач, поскольку имеет времена выполнения операций ввода-вывода, сравнимые с временами арифметических операций, а в подобных задачах имеется много операций ввода-вывода. В машине ИБМ-650 при решении подобных задач до 10—20% времени занимают операции ввода-вывода; для более быстродействующих машин этот процент был бы несоразмерно велик.

В. К. Зейденберг

917. Ошибки из-за переполнения при арифметических операциях в частном случае электронной вычислительной машины ФИНАК. Эрколи, Вакка (Errors due to overflow in arithmetic operations particularly as regards FINAC electronic computer. Ercoli Paolo, Vacca Roberto), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, 4, № 4, 450—455 (англ.)

Исследуется вопрос о получении признаков переполнения разрядной сетки при арифметических операциях над числами, представленными в дополнительном коде вида

$$x = -b_n 2^n + \sum_{i=1}^{m} b_{n-i} 2^{n-i}, \qquad (1)$$

где n—целое число, а m фиксировано для каждой данной машины. Подобная система счисления принята в машине ФИНАК и ряде других цифровых вычислительных машин.

В качестве основы для получения признаков используется то обстоятельство, что равенство

$$-b_{n+p} 2^{n+p} + \sum_{i=1}^{m+p} b_{n+p-i} 2^{n+p-i} = -b_n 2^n + \sum_{i=1}^{m} b_{n-i} 2^{n-i}$$

справедливо тогда и только тогда, когда удовлетворяется равенство

$$b_{n+j} + b_n \qquad (j = 0, 1, \ldots, p). \qquad (2)$$

Из операций сложения и вычитания достаточно рассмотреть только сложение, так как вычитание в машинах, использующих дополнительный код, выполняется в форме прибавления дополнения. Очевидно также, что при сложении двух чисел с разными знаками никогда не будет переполнения разрядной сетки. Таким образом, достаточно иметь критерий правильности суммы для случая сложения двух положительных или двух отрицательных чисел. Таким критерием для чисел вида (1) будет: $c_n = c_{n-1}$, где c_n и c_{n-1} — сигналы переноса соответственно из n-го и $n-1$-го разрядов. Нормальным сдвигом влево в статье называется сдвиг влево на s разрядов при том условии, что $s < m + 1$. В соответствии с вышесказанным, переполнением при сдвиге влево можно назвать тот случай, когда $s + 1$ старших разрядов сдвигаемого числа не равны друг другу. При использовании системы счисления вида (1) отсутствует возможность образовать дополнение к числу -2^n. Этот случай также рассматривается в качестве переполнения.

При умножении двух чисел, представленных в системе (1), в случае, принятом в рассматриваемых машинах ($n = 1$, $m = 39$), произведение будет иметь вид: $-b_2 2^2 + b_1 2 + b_0 2^0 + b_{-1} 2^{-1}$.

Критерием правильности будет условие (2), которое в данном частном случае примет вид: $b_2 = b_1$.

В рассматриваемых машинах произведение суммируется с предыдущим содержимым регистра арифметического устройства. При этом снова будет справедлив критерий, выведенный выше для сложения.

А. В. Шилейко

918. Выбор кода при конструировании десятичных вычислительных машин. Линсман (Le choix du code dans la construction des machines mathématiques décimales. Linsman M.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 12, 608—635 (франц.)

Приводятся соображения, которые приходится принимать во внимание при выборе представления десятичных цифр в вычислительной машине. Рассматриваются взвешенные и невзвешенные 4-разрядные коды. Приведены таблицы взвешенных кодов с положительными весами, кодов с одним отрицательным весом и кодов с двумя отрицательными весами. Рассматриваются проблемы, возникающие при выполнении арифметических операций для различных кодов. Рассматриваются способы отыскания кода, удовлетворяющего некоторым условиям.

Н. Н. Поснов

919. Графическо-механические пособия, используемые для анализа и синтеза контактных схем. Свобода (Graficko-mechanické pomůcky užívané při analyse a synthese kontaktových obvodů. Svoboda Antonín), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 9—21 (чешск.; рез. русск., англ.)

Автор описывает состояние контактной сети индексом i, состоящим из двух чисел N и n. Число $N = A, B, C, \ldots$ однозначно определяет значения булевых переменных $X, Y, Z, \ldots$, число $n = 0, 1, 2, \ldots$ однозначно определяет значения булевых переменных $x, y, z, \ldots$. Графическо-механические пособия — это так называемые «контактные косточки» и «контактные решетки». Первые используются для упрощения анализа сложных контактных цепей.

Это полоски бумаги, на которых записаны значения индекса состояния N, n и соответствующий символ булевой переменной ($X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, \ldots, x, \bar{x}, y, \bar{y}, \ldots$). Из косточек строится модель анализированной схемы. По виду этой модели можно определить проводимость сети между произвольными ее узлами. «Контактные решетки» используются для синтеза релейно-контактных схем. Они представляют ссбой бумажные маски квадратной формы и кладутся на формуляр, который выражает соответствующую булеву функцию в виде матрицы. Индекс строки этой матрицы N, индекс столбца n. Отдельным элементарным функциям $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, \ldots, x, \bar{x}, y, \bar{y}, \ldots$ соответствуют отдельные «контактные решетки». Если на формуляр положить одновременно, например, решетки для $x, \bar{y}, X, \bar{Z}$, мы увидим лишь те элементы матрицы, для которых имеет место равенство $x\,\bar{y}\,X\,\bar{Z}=1$. Если данная на формуляре функция принимает значение 1 во всех этих элементах матрицы, то произведение $x\,\bar{y}\,X\,\bar{Z}$ является конституэнтом данной булевой функции. Значение «контактных решеток» в том, что они позволяют удобнее получить алгебраическую форму булевой функции, которая имеет табличную форму.

J. Klír

920. Вот азбука программирования цифровой вычислительной машины. Магиннисс (Here are the ABC's of digital computer programing. Maginniss F. J.), Electr. World, 1958, **149**, № 2, 54—57 (англ.)

Подробно рассматривается программа вычисления e^x для $x=1$ на вычислительной машине дискретного действия. А. Н. Чуйкин

921. Будущее автоматического программирования. Хоппер (Tomorrow—automatic programming. Hopper Grace Murray), Petrol. Refiner, 1957, **36**, № 2, 109—112 (англ.)

На основании краткого рассмотрения состояния техники автоматического программирования на сегодняшний день, автор указывает направления дальнейшего развития систем автоматического программирования и их характеристики в ближайшие пять лет.

В. И. Смирнов

922. О программировании арифметических операторов. Ершов А. П., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 3, 427—430

923. ЧИФА-1—электронная вычислительная машина Физического института Академии наук Румынской Народной Республики. Тома (Cifa-1 the electronic computer of the Institute of Physics of the Academy of the Rumanian People's Republic. Toma Victor), Ber. Internat. Math.-Kolloq., 1955 (1957), Nov., 27—41 (англ.)

Сообщается, что в 1953 г. в Физическом институте Академии наук Румынской Народной Республики начато создание электронной вычислительной машины. Построена небольшая модель, осуществлявшая 4 основных действия, проведены эксперименты с памятью на магнитном барабане и на базе полученных результатов завершено проектирование большой вычислительной машины, строительство которой начато в марте 1955 г. Ко времени написания статьи осуществлено 60% всего объема работ.

Вычислительная машина, описываемая в статье, является машиной параллельного типа, работающей по двоичной системе. Числовой материал вводится и выводится в десятичной системе. Команды программы вводятся в восьмеричной системе. Машинное «слово» состоит из знака и 30 двоичных разрядов. Запятая фиксирована, и абсолютные значения чисел, с которыми оперирует машина, лежат между 0 и 1. Цена младшего разреза 2^{-30}, или примерно 10^{-9}. Отрицательные числа представлены везде, в том числе и в памяти, в дополнительном коде. Перевод в дополнительный код отрицательных чисел и перевод из дополнительного кода в прямой осуществляется вводными и выводными устройствами соответственно.

Память на магнитном барабане рассчитана на 1024 слова, для обозначения адреса используется 10 двоичных разрядов. Среднее время выборки числа из памяти 10 мсек. Мотор барабана и кварцевый генератор вычислительной машины взаимно не синхронизированы. Команды одноадресные и содержат 5 разрядов для обозначения операций и 10 разрядов для обозначения адреса. Таким образом, машинное слово может представлять либо одно число, либо 2 команды, которые последовательно выполняются вычислительной машиной. Машина содержит 1500 электронных ламп (600 из них в дальнейшем, по-видимому, будут заменены германиевыми диодами). Машина выполняет 21 команду. Машина производит сложение и вычитание за 150 мксек, умножение и деление — за 5 мсек. Излагается перечень команд.

Приводится блок-схема арифметического узла и описание его работы при сложении и вычитании, при умножении и делении; блок-схема контроля переполнения разрядной сетки, блок-схема памяти на магнитном барабане, блок-схема центрального управления. Описывается последовательность осуществления команды.

Приводятся краткие сведения по вводным и выводным устройствам машины. Отмечается, что в машине используются советские сопротивления типа ВС.

Г. Г. Рабинович

924. Универсальная электронная машина дискретного действия («Урал») для инженерных исследований. Базилевский (The universal electronic digital machine (Ural) for engineering research. Bazilevskii Iu. Ia.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 4, 511—519 (англ.)

Описывается универсальная вычислительная машина дискретного действия «Урал», разработанная в научно-исследовательском институте Министерства приборостроения и средств автоматизации СССР. Машина предназначается для использования в научно-исследовательских институтах, в проектных организациях и предприятиях.

Конструктивно машина состоит из ячеек, в которых смонтированы триггеры, двойные инверторы, усилители мощности или формирователи импульсов. Всего в машине 800 электронных ламп и 3000 германиевых диодов. Потребляемая мощность составляет 8 *квт*. Площадь, необходимая для размещения машины,— около 40 $м^2$.

«Урал», оперируя с 36-разрядными двоичными числами с фиксированной запятой, выполняет 6000 операций в 1 мин. Благодаря наличию команды «нормализация» при использовании подпрограмм возможна работа с плавающей запятой. Арифметическое устройство принимает и выдает числа в параллельно-последовательном коде 9-разрядными группами. Список операций, выполняемых машиной, содержит 30 арифметических и логических действий, в том числе несколько групповых действий. Время выполнения операции деления 40 мсек, нормализации — 20 мсек, все остальные операции выполняются за 10 мсек.

Входные данные подаются в машину с перфоленты и считываются с помощью фотодиодов со скоростью 4500 кодов в 1 мин. В качестве перфоленты используется стандартная кинопленка шириной 35 *мм*, на которой перфорируются в 4 ряда 11 дорожек. На перфоленте, длиной 300 *м* и разбитой на 511 зон, помещается 10 000 кодов. Запоминающее устройство на магнитной ленте имеет емкость 40 000 кодов. Длина магнитной ленты 250 *м*.

Оперативная память на магнитном барабане работает на частоте 280 *кгц* и имеет емкость 1024 кода. Каждый код, записанный на барабане, состоит из 4 групп по 9

разрядов в группе. 3 дорожки барабана отведены под синхроимпульсы. Магнитные головки расположены двумя блоками по 9 головок в блоке с зазором 30 *мк*. Плотность записи составляет 4 импульса на 1 *мм*. Устойчивая работа машины возможна при изменении питающего напряжения на ±10%.

В машине возможно ручное управление процессом вычисления. С пульта можно управлять работой магнитной ленты, перфоленты, магнитного барабана, печатающего устройства. Имеется возможность записывать числа и инструкции в оперативную память, осуществлять шаговую работу. Содержимое любой ячейки магнитного барабана можно вывести на экран электронно-лучевой трубки. Кроме того, на пульте помещены индикаторы для контроля содержимого основных регистров машины.

Н. В. Петрова

925. Вычислительная машина полностью на полупроводниковых триодах (Completely transistorized computer), J. Franklin Inst., 1957, **263**, № 6, 571—572 (англ.)

Фирма «Филко» в 1958 г. выпустит вычислительную машину на полупроводниковых триодах ТРАНЗАК, S-2000 (TRANSAK S-2000), предназначенную для экономических, научных и военных целей. Триоды и печатные схемы обеспечивают компактность, малый вес, малое протребление мощности, высокую скорость и надежность машины. Для нее требуется незначительное количество охлаждающего воздуха.

Система ТРАНЗАК-S-2000 состоит из вычислительного устройства, устройств ввода и вывода на перфоленту и устройств магнитной ленты. Имеется также внутренняя память на магнитных сердечниках на 256 тыс. знаков. Вес машины 2 718 *кг*, площадь 23,2 *м*², питается она от сети переменного тока 110 *в*. Машина может в 1 сек. выполнять 39 000 сложений и вычитаний, 12 000 умножений и 10 000 делений. Магнитная лента длиной 730 *м* вмещает 5 млн. алфавитных и цифровых знаков, которые считываются со скоростью 15 000 в 1 сек. Выходное устройство в системе работает со скоростью 600 строк в сек. по 120 знаков в каждой строке.

М. С. Саплин

926. Цифровая вычислительная машина Лундского университета СМИЛ. Фрёберг, Вальстрём (SMIL siffermaskinen i Lund. Fröberg Carl-Erik, Wahlström Gunnar. Lunds univ. arsskr., 1957, Avd. 2, 53, № 4, 38 pp., ill.) (шведск.; рез. англ.)

Описание электронной цифровой вычислительной машины средней скорости СМИЛ, построенной Отделом теоретической физики Лундского университета, а также популярное изложение основ вычислительной техники. Арифметическое устройство машины СМИЛ является копией арифметического устройства машины БЭСК. Оперативное запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 2048 40-разрядных двоичных чисел. Диаметр барабана 15 *см*, длина 22 *см*, скорость вращения 5800 об/мин. Считывание чисел с барабана осуществляется параллельно двумя группами головок, по 41 головке в группе. Рассматривается возможность замены барабана запоминающим устройством на ферритовых сердечниках. Ввод с пятидорожечной бумажной перфоленты со скоростью 200 строк в 1 сек. при помощи диэлектрического считывания. С одной стороны ленты установлен один общий щуп, представляющий одну обкладку конденсаторов, а с другой стороны имеется пять щупов, представляющих вторые обкладки пяти конденсаторов. Каждый из этих конденсаторов включен в одно плечо своего моста. Когда между щупами проходит бумажная лента, мосты уравновешены нейтрализующими постоянными конденсаторами, представляющими вторые плечи мостов. Когда между верхним щупом и каким-нибудь из нижних щупов проходит отверстие в ленте, т. е. меняется диэлектрическая постоянная среды в данном конденсаторе, то соответствующий мост оказывается неуравновешенным и сигнал разбаланса поступает на вход одного из пяти усилителей считывания. Питаются мосты от одного общего генератора синусоидальных колебаний. Вывод данных осуществляется на печатающую машинку со скоростью 12 чисел в 1 сек.

Машина СМИЛ одноадресная. Набор команд обеспечивает выполнение 15 различных типов операций; каждый тип может конкретизироваться при помощи еще четырех двоичных разрядов. Машинное слово включает две 20-разрядные команды; 8-разрядов команды составляют код операции, 12 разрядов — адресную часть, позволяющую увеличить в дальнейшем объем запоминающего устройства до 4096 чисел. При использовании оптимального кодирования время выполнения операции на машине сокращается с 7,5 мсек до 2—3 мсек. Чистое время сложения составляет 150 мксек.

В машине имеется около 2000 электронных ламп 10 различных типов и около 200 германиевых диодов. 12 *квт* потребляемой мощности, выделяющейся в виде тепла, отводится при помощи двух вентиляционных установок с расходом воздуха 4000 *м*³ в 1 час. Температура отводимого воздуха не более 25°С. Напряжение накала ламп машина получает прямо от сети. Имеется 7 номиналов постоянного напряжения: +300 *в* (2,8 *а*), +225 *в* (1,5 *а*), +150 *в* (12.5 *а*), +100 *в* (6,3 *а*), —30 *в* (0,5 *а*), —200 *в* (12,5 *а*), —400 *в* (0,45 *а*). Регулируемые напряжения +300 *в*, +150 *в* и —200 *в* получаются при помощи выпрямителей на тиратронах. Стабилизированное напряжение —400 *в* имеет стабильность около 0,5% и применяется также как опорное напряжение для других номиналов комплекта. При тестовых испытаниях машины питающее напряжение изменяют в пределах ±10%.

Машина СМИЛ находится в работе с июня 1956 г.

В. К. Зейденберг

927. Новая электронная цифровая вычислительная машина (A new electronic digital computer), Nature, 1957, **179**, № 4572, 1234—1235. (англ.)

Компания «Метрополитен-Виккерс» (Metropolitan-Vickers Electrical Co., Ltd.) проводит испытания первого образца новой модели универсальной электронной вычислительной машины с программным управлением «Метровик-950» (Metrovick-950), подготовляемой к запуску в серийное производство. Машина сконструирована на полупроводниковых триодах с применением печатных схем. Ввод чисел осуществляется с помощью бумажной перфоленты (5 дорожек). Скорость ввода 200 десятичных цифр в 1 сек. Система счисления двоичная. Число разрядов 32. Запоминающее устройство на магнитном барабане —4096 чисел. Максимальное время выборки числа с барабана 10 мсек. Машина работает на частоте 75 *кгц*. Размеры машины, состоящей из трех стоек, таковы: 4,4×1,9×1,5 *м*. Вывод данных либо на перфоленты, либо на печатающее устройство. Потребляемая мощность 3 *квт*.

Н. Н. Поснов

928. Действительно ли быстродействие автоматических вычислительных машин больше, чем это нужно при коммерческих расчетах? Чейпин (Are automatic computer speeds faster than business needs? Chapin Ned), Computers and Automat., 1957, **6**, № 10, 12, 14—17 (англ.)

Обсуждается вопрос о быстродействии вычислительных машин, применяемых при коммерческих расчетах. Отмечается, что в зависимости от решаемых задач быстродействие может быть ограничено входными устройствами, устройствами, выполняющими арифметические и логические действия, и выходными устройствами. Скорость работы входных устройств часто бывает ограничена из-за того, что они не только вводят данные в машину, но и выполняют некоторые пресбразования. Быстродействие входных устройств может быть увеличено, если все преобразования будут выполняться в ма-

шине. Выходные устройства, работая с максимальной скоростью, за 1 день могут напечатать такое количество числовых данных, что человек не сможет воспринять и использовать их. Поэтому целесообразно, используя логические возможности вычислительных машин, выводить только наиболее важные данные, в результате чего скорость работы выходных устройств уменьшится и они не будут лимитировать скорость работы машины.

Подчеркиваются основные преимущества использования автоматических вычислительных машин при коммерческих расчетах — скорость работы и малая стоимость вычислений. Указывается, что вычислительные машины, применяемые при коммерческих расчетах, должны обладать надежностью, достаточными логическими возможностями и иметь высокую точность. А. Н. Чуйкин

929. Новый универсальный вычислитель, запланированный фирмой ИБМ (New general purpose calculator planned by IBM), S. Afric. Ind. and Trade, 1957, Oct., Spec. Serv. Feature, 23, 25 (англ.)

Сообщается, что фирма ИБМ заключила контракт с Комиссией по атомной энергии США о проектировании универсальной цифровой вычислительной машины СТРЕТЧ (STRETCH), которая будет установлена в научно-исследовательской лаборатории в Лос-Анжелосе. Машина предназначается для решения задач, связанных с управлением термоядерными реакциями, проектированием ядерных реакторов, а также с производством ядерного и термоядерного оружия.

Предполагается, что машина будет работать с очень большой скоростью. Оперируя с 12÷15-разрядными числами, СТРЕТЧ будет выполнять более 500 000 умножений и около 2 млн. сложений в 1 сек. Чтобы обеспечить такое быстродействие, разрабатываются новые типы транзисторов и запоминающие устройства на магнитных сердечниках с малым временем выборки. Входные данные будут поступать из нескольких источников на распределительное устройство, цель которого — регулировать подачу данных.

Предусматривается возможность использования уже существующих входных устройств. Для печати выходных данных разрабатывается быстродействующее печатающее устройство. При проектировании элементов и схем новой машины предполагается использовать вычислительные машины. А. Н. Чуйкин

930. Разработка коммерческой вычислительной системы. Сент-Джонстон, Кларк (The development of a business computer system. St. Johnston A., Clarke S. L. H.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1957, 17, № 7, 351—364 (англ.)

Описывается основная логическая схема системы «Эллиотт-405», вслед за которой дается более подробное описание блоков. Особое внимание уделяется новому типу памяти, использующему 35-миллиметровую пленку, покрытую магнитной окисью. Приводятся два примера использования системы. Из резюме авторов

931. Конструкция современных вычислительных систем широкого применения. Бауэр (Modern large scale computer system design. Bauer Walter F.), Computers and Automat., 1957, 6, № 1, part 1, 8—25, 32, 34 (англ.)

Статья является обзором современных конструкций вычислительных систем, используемых для решения широкого круга задач как коммерческого, так и научного порядка. Рассмотрены устройства памяти, накопитель информации, внутренний контроль, скорости операций, программирование, входные и выходные устройства известных машин: ИБМ-701, ИБМ-704, ИБМ-705, НОРК, БИЗМАК, УНИВАК-I, УНИВАК-II, модели УНИВАК-1103 и 1103А, а также машина ЛАРК.

Обзор составлен по фирменным материалам (проспекты, каталоги, отчеты) при непосредственной консультации сотрудников фирм. Материалы обзора являются содержанием лекций, прочитанных автором в Мичиганском университете в 1954—56 гг. В. В. Васманов

932. Новая установка электронной вычислительной машины (Nuova installazione di un calcolatore elettronico), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, 3, № 17, 28 (итал.)

Короткое сообщение о разработке фирмой «Бритиш Табулейтинг Машин» (Англия) электронной вычислительной машины ГЭК для фирмы «Морган Крусибл». Машина используется для научных вычислений, а также для различных бухгалтерских и учетных работ на предприятиях фирмы, выпускающих до 20 000 артикулов, содержащих в свою очередь от 2 до 500 000 деталей.

А. В. Шилейко

933. Вычислительная машина МАДАМ. Вильямс (MADAM. Williams F. C.), Automat. Digital Comput., London, 1954, 35—38 (англ.)

Подводится итог работы коммерческой цифровой вычислительной машины МАДАМ Манчестерского университета за 20 месяцев эксплуатации. Машина использовалась для научных и практических расчетов, а также для обучения широкого круга математиков различных организаций. В процессе работы велись учет рабочего времени и статистика отказов. Режим работы машины характеризуется непрерывными включениями в течение 12 дней, последующим двухдневным техническим осмотром и ежедневной профилактикой. Среднее рабочее время составляет 72% включенного состояния машины. Эффективность машины эквивалентна труду 15 математиков. Основными техническими недостатками, потребовавшими изменения конструкции, являлись малый диаметр магнитного барабана и применение генераторов постоянного тока для питания анодных цепей электронных ламп. Первый недостаток определял недостаточную расстановку цифр, второй — наличие высокочастотных наводок большой мощности, обусловленных искрением щеточных контактов. Е. М. Баскаков

934. Цифровая счетная машина «Fujic». Ито, Тэнки, 1957, 4, № 10, 303—306 (японск.)

935. Матричный дешифратор на ферритовых сердечниках для выбора головок при магнитной записи. Уиллис (A ferrite-core switch-matrix for magnetic-recording-head-selection. Willis D. W.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1957, B104, Suppl. № 7, 464—469. Discuss., 481—482 (англ.)

Описываются бесконтактные схемы выбора головок записи-считывания магнитного барабана с использованием трансформаторной матрицы на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса. Такие схемы, сохраняя преимущества бесконтактного выбора (например, по сравнению с релейными), позволяют значительно сократить число мощных ламповых формирователей тока записи.

Ячейка трансформаторной матрицы содержит два сердечника с общими входной и выходной обмотками и двумя обмотками токового смещения, направленного в сторону, противоположную перемагничиванию. Выбранным оказывается сердечник, на который воздействует перемагничивающий импульс тока и рабочая точка которого не смещена в сторону полного насыщения (смещение также фактически импульсное с весьма большой длительностью импульсов). Применение двух сердечников в ячейке дает возможность использовать двухполярную систему записи и систему фазовой модуляции.

Исследовались 3 варианта коммутации дешифрирующей матрицы: 1) трехкоординатная матрица с использованием двух обмоток смещения (2 координаты) и импульсного перемагничивания по 3-й координате; 2) двухкоординатная матрица с выборкой также по двум координатам смещения и общим импульсным перемагничиванием, подаваемым одновременно на все сердечники;

3) двухкоординатная матрица с использованием по одной координате смещения и по другой — импульсного перемагничивания.

Исследовались вопросы подавления помех с неизбранных и полуизбранных ячеек матрицы при различных величинах тока смещения и различных схемах коммутации. С точки зрения экономии аппаратуры выгодно использовать одну и ту же магнитную головку как для целей записи, так и для считывания. Однако в обычных условиях обмотка головки в такт считывания оказывается нагруженной на выходную обмотку ячейки матрицы, индуктивность которой для малых сигналов ничтожна; т. е. для сигнала считывания выходная цепь практически оказывается короткозамкнутой. Для устранения этого эффекта используется нелинейность характеристики точечных германиевых диодов: при больших прямых токах их прямое сопротивление сравнительно мало (для выбранного типа 120 *ом*), тогда как для малых сигналов они представляют собой значительное сопротивление, величина которого асимптотически приближается к величине обратного сопротивления, по мере уменьшения сигнала.

Цепочка из двух встречно включенных точечных диодов включается в цепь записи последовательно с обмоткой головки. Для тока записи сопротивление этой цепочки несущественно. Вход усилителя считывания подключается между цепочкой и выходом ячейки матрицы. Таким образом, при считывании индуктивность (практически нулевая) выходной обмотки ячейки оказывается включенной последовательно, а сопротивление цепочки (практически бесконечное) — параллельно входу усилителя.

Приводятся параметры головок и трансформаторов ферритовой матрицы. Магнитные головки изготавливались из феррита с прямоугольной петлей гистерезиса (такой феррит резко снижает чувствительность к помехам) марки FX 1289. Полюса головки стачивались до ширины около 1 *мм*; работа велась при воздушном зазоре порядка 0,025 *мм* на рабочих частотах от 135 до 270 *кгц*.

Все головки барабана были выполнены конструктивно в виде одного блока; полюса головок экранировались друг от друга фольгой 0,038 *мм* толщины. Трансформаторная матрица была собрана на сердечниках марки FX 1396 с внешним диаметром 8 *мм*. Каждый сердечник имел 2 обмотки смещения (по 70 витков), две входные испульсные обмотки (по 30 витков) и выходную обмотку (60 витков); все обмотки были выполнены эмалированным медным проводом.

Сердечники монтировались на печатных панелях в виде полных матричных дешифраторов на 8×8=64 выхода. При необходимости получить большее число выходов может быть скоммутировано любое число таких панелей. Библ. 5 назв. А. А. Крупский

936. Применение схем на магнитных сердечниках для цифровых систем управления (Magnetic core components for digital control applications), Automat. Control, 1957, 5, № 1, 34—40 (англ.)

Окончание большой обзорной статьи по применению магнитных элементов (тороидальных ферритовых сердечников с прямоугольной и непрямоугольной петлями гистерезиса, ленточных сердечников и трансфлюкторов) в цифровой автоматике.

Описываются логические схемы на ферритах, примененные в новом устройстве для обработки данных КОРДАТ (CORDAT), разработанном фирмой «Берроус» (Burroughs) для Службы связи США. КОРДАТ предназначено для передачи данных в двоичном цифровом коде по телефонным линиям с радиолокационных постов и других наблюдательных пунктов в основную систему ПВО.

Логика и арифметика в КОРДАТ преимущественно последовательные, построены на трехтактных магнитных элементах, описанных ранее (РЖМат, 1957, 1883). Ряд операций (получение полусуммы, сдвиг и т. д.) выполняется параллельно, на тех же элементах.

В качестве счетчиков на малую частоту счета применяются параметрические схемы на сердечнике с прямоугольной петлей гистерезиса. Импульсы счета поступают на сердечник со вторичной обмотки импульсного трансформатора через дисд. За счет того, что потокосцепление на выходе трансформатора значительно меньше, чем на входе счетного сердечника (при полном перепаде потока в последнем), а ток достаточен для перемагничивания, счетный сердечник через определенное число импульсов полностью перемагнитится. Число таких импульсов (т. е. коэффициент пересчета) может быть весьма значительным. Указывается, что пересчет на 10 осуществляется достаточно надежно. Связь между несколькими счетчиками и сброс счетного сердечника в «0» выполняется с помощью ламповой схемы. Предусмотрено переменное сопротивление (последовательно с диодом) для регулировки коэффициента пересчета. Недостаток таких счетчиков — значительное время переноса, равное $T(C+1)$, где T — время сброса одного сердечника, а C — количество последовательно включенных сердечников. Практически T составляет 3 мксек.

Описываются принципы действия матричных запоминающих устройств на ферритах, логических и счетных схем на феррорезонансных элементах и трансфлюкторах. Приведено фото устройства КОРДАТ.

Библ. 4 назв., с рекламными резюме по каждому названию. А. А. Крупский

937. «Твистор» — новое магнитное запоминающее устройство (The Twistor—a new magnetic memory device), Electronic and Radio Engr., 1958, **35**, № 2, 55 (англ.)

Сообщение фирмы «Белл» (Bell Telephone Labs) о разработках нового типа магнитного запоминающего устройства, условно названного «Твистор» (Twistor). В качестве элементов памяти используются участки ферромагнитной проволоки. Проволока предварительно несколько скручивается (в осевом направлении). При этом линии самопроизвольного намагничивания, ранее расположенные вдоль оси проволоки, располагаются спирально, т. е. приобретают продольную и роторную составляющие.

Перемагничивание отдельных участков такой проволоки может быть выполнено при совпадении продольного и кругового магнитных полей. Круговое поле осуществляется пропусканием тока непосредственно по самой ферромагнитной проволоке, продольное — с помощью витков обычного медного провода вокруг соответствующего участка этой проволоки. Таким образом осуществляется запись информации. Считывание производится путем пропускания импульса тока значительной величины и противоположного направления по медному проводу. При этом информация снимается с магнитного провода. Таким образом, матрица из m магнитных проводов, пересекаемых n медными проводами с витками в соответствующих точках, представляет собой полное запоминающее устройство на nm-разрядных чисел с прямым выбором при считывании и совпадением токов при записи.

Технологически такая матрица значительно проще и дешевле обычной матрицы на ферритовых сердечниках. Благодаря более низкому потреблению мощности перевод управления «Твистором» на кристаллические триоды также более перспективен.

В настоящее время ведутся эксперименты по выяснению оптимальных диаметра, химического состава и технологии магнитной проволоки. Указывается, что

реальны диаметры порядка 0,025 *мм* и плотность записи до 4 знаков на 1 *см* (до 10 знаков на дюйм). Быстродействие нового устройства памяти соизмеримо с быстродействием обычных запоминающих устройств на ферритах. А. А. Крупский

938. Полупроводниковые триоды и блочная конструкция придают малые габариты вычислительным машинам большой емкости (Transistors and modular design make large-capacity computer desk size), Mach. Design, 1957, **29**, № 21, 138—140 (англ.)

Приводятся некоторые данные цифровой вычислительной машины RW-300 фирмы «Рамо-Вулдридж» (Ramo-Wooldridge). Машина имеет размеры 1375×725×900 *мм* и вес 180 *кг*. Отличительной ее особенностью является возможность непосредственного включения машины в состав систем регулирования реальных объектов. Для этого в машине имеются преобразователи непрерывных величин в цифровые и специальные буферные устройства. Имеется возможность вручную регулировать скорость выполнения программы. Предусмотрен ряд средств, облегчающих контроль работы машины (в частности, специальный осциллограф, который можно подключать к различным точкам схемы, индикаторные неоновые лампы и т. п.). Конструкция машины основана на использовании съемных блоков. Приводятся фотографии машины и ее отдельных узлов. А. В. Шилейко

939. Получение характеристик транзисторов. Максуэлл (Transistor curve-tracing. Maxwell M. E.), Automat. Progr., 1958, **3**, № 4, 145 (англ.)

Сообщается о возможности получать семейства характеристик транзисторов, используя вычислительную машину непрерывного действия. В качестве независимой переменной используется напряжение с выхода интегратора, на вход которого подано постоянное напряжение. Характеристики можно наблюдать на экране электронно-лучевой трубки. А. Н. Чуйкин

940. «Трубки», получаемые в кристалле германия типа *N*. Оберли («Pipes» produced in *n*-type germanium. Oberly J. J.), Acta Metallurgica, 1957, **5**, № 2, 122—124 (англ.)

Описаны образования, наблюдавшиеся при струйном электролитическом травлении поверхности кристалла германия типа *N*, полученного вытягиванием из расплава в направлениях (111) и (001). Электролитическому травлению подвергались плоскости, перпендикулярные направлению роста, предварительно очищенные химическим травлением. Струя из 0,05% КОН, подаваемого под давлением 0,35 *атм*, имела диаметр 0,75 *мм*, и по ней пропускался ток 25 *ма* (5,5 *а* на 1 *см*). На поверхности кристалла образовывались углубления в виде «трубок», группировавшихся в «агрегаты». Эти группы трубок на поверхности (111) расходились симметричной звездой под углами 120° из центральной точки, ставававшейся на одном уровне с остальной обрабатываемой поверхностью. Трубки имели квадратное сечение, плоские стенки и постепенно сужались к концу. Размер входного отверстия трубок составлял около 3 *мк*. Подобные агрегаты из трубок длиной до 90 *мк* и размером входного отверстия около 4 *мк* наблюдались при такой же обработке поверхностей (001). Эти агрегаты были аналогичны образованиям, получающимся при травлении в электролитической ванне.

Иной тип агрегата, который был обнаружен на поверхностях (111), имел форму круга и неправильную структуру, а центральная часть агрегата вытравливалась глубже других частей.

Приведены фотографии агрегатов при увеличении в 500 раз. В. К. Зейденберг

941. Параметрон. Гото, Дэнси корё, Electronician, 1955, **4**, № 3, 53—54 (японск.)

942. Самое быстродействующее в мире выходное печатающее устройство (World's fastest electronic print-out equipment), Process Control and Automat., 1958, **5**, № 1, 12—13 (англ.)

Сообщается, что объединенными усилиями двух американских фирм («Стромберг-Карлсон» и «Галоид-Компани») недавно разработано выходное печатающее устройство, названное «Модель 5000». Оно объединяет в себе электронно-лучевую трубку с формируемым лучом («характрон») первой из вышеназванных компаний и ксерографическое печатающее устройство второй фирмы. По заявлению фирм, оно является самым быстродействующим в мире среди выпускаемых выходных печатающих устройств вычислительных машин. «Модель 5000» сможет печатать данные, получаемые от вычислительной машины, со скоростью 4680 строк в 1 мин. Полагают, что это устройство найдет широкое применение для печати данных, поступающих как непосредственно от вычислительных машин, так и с магнитных лент, благодаря большой скорости, отсутствию очень быстродвижущихся механических частей и сравнительно низкой стоимости работы по сравнению с другими печатающими устройствами. Принцип работы «Модели 5000» следующий. Электрические импульсы, поступающие из вычислительной машины, преобразуются в набор строк на 7-дюймовом экране характрона. Характрон допускает 64 различных знака: буквы алфавита, цифры и 23 других символа по желанию заказчика. С экрана характрона знаки проектируются оптической системой на заряженную поверхность барабана с селеновым покрытием. На поверхность барабана с образованным таким образом скрытым изображением напыляется сухой порошок, имеющий заряд противоположного знака, и затем отпечатывается на бумажной ленте, развертываемой с рулона. Использование ксирографического процесса не требует химической обработки и позволяет быстро получить результат в печатной форме на любой бумаге. В. И. Смирнов

943. Читающее устройство для программ производственных операций (Tape reader for programming manufacturing operations), Computers and Automat., 1958, **7**, № 4, 24 (англ.)

Сообщается о выпуске фирмой «Текстрон» (Textron) устройства для чтения стандартной бумажной перфоленты шириной 25,4 *мм*. В каждом положении устройство дает 80 двоичных знаков информации, располагающихся в 10 поперечных рядах, по 8 отверстий в ряду. На передней панели устройства имеется 80 неоновых ламп для индикации информации, читаемой в данный момент. Переход от одной позиции ленты к следующей производится за 35 мсек. либо автоматически, либо вручную специальной кнопкой. Рекомендуемая скорость работы 6 позиций в 1 сек., хотя скорость может быть повышена до 15 позиций в 1 сек. Перемещение барабана, протягивающего ленту, производится электромотором. Размер передней панели прибора 267×483 *мм*, потребление энергии 375 *вт*.

О. В. Бачин

944. Цифровой координатограф. Валах (Číslicový koordinátograf. Valach Miroslav), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 171—175 (чешск.)

Описывается цифровой координатограф, у которого время нанесения точек не зависит от величины координат. В координатограф подается дискретный сигнал с перфокарты, который состоит из трехразрядного десятичного числа для каждой координаты. Точки с координатами *x* и *y* переносятся с перфокарт счетного перфоратора на фотопластинку со скоростью 6000 точек в час. Выбор масштаба и положения графика производится непосредственно перед нанесением в счетном перфораторе. Величина поля на фотопластинке:

10×10 *см*, точность нанесения координаты — три десятичных цифры. J. Klír

945. Выбор входных и выходных устройств для вычислительных машин. Хатчинсон (Choice of input/output media for computers. Hutchinson J. S.), Cost Account., 1958, **36**, № 8, 299—303 (англ.)

Рассматриваются преимущества и недостатки перфокарт, перфоленты и магнитной ленты, применяющихся во входных и выходных устройствах вычислительных машин, с точки зрения габаритов, удобства проверки вводимых данных и скорости работы. Н. В. Петрова

946. Входные и выходные устройства для цифровых вычислительных машин. Бут (Input-output for digital computing machines. Booth Andrew D.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 15—20, 222 (англ.; рез. нем.)

Статья общего характера. Новых данных не приводится.

947. ЭМИАК II — моделирующее устройство фирмы E. M. I. (EMIAC II—E. M. I.'s. Analogue computer), Brit. Communs and Electronics, 1958, **5**, № 6, 444—445 (англ.)

ЭМИАК II (EMIAC II) — новое моделирующее устройство английской фирмы E. M. I. Electronics Ltd., сконструированное по блочному принципу и решающее систему линейных и нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих независимой переменной время и включающих как мгновенно изменяющиеся, так и периодические функции. Машина работает как в масштабе истинного времени, так и с уменьшением масштаба времени в 100 или 1000 раз.

Машина содержит 18 рабочих блоков, имеется две панели коэффициентов, допускающих набор 42 коэффициентов, из которых 18 набираются с большой точностью. Основные данные рабочих усилителей следующие: коэффициент усиления с разомкнутой петлей обратной связи $7 \cdot 10^6$, выходное напряжение $\pm$ 10 *в*, дрейф нуля меньше 100 *мкв*, ток сетки меньше 10^{-10} *а*.

Машина сконструирована для расчетов ядерных реакторов, управляемых снарядов и т. д. Одним из применений машины был расчет нового химического завода для фирмы Laporte Industries Ltd. Каждый элемент завода: резервуары, аппараты, соединительные трубы с насосами — были моделированы на машине. При расчетах учитывалось демпфирование в аппаратах, время передачи от одного аппарата к другому, зависимость объема жидкости или газа от давления и т. д.

При помощи машины был выбран наиболее экономичный вариант размещения оборудования, выбраны мощности и характеристики насосов, сечения трубопроводов и т. д. О. В. Бачин

948. Операционные электронные моделирующие устройства. Мартинес (Operational electronic analog computers. Martinez Hugo M.), ISA Journal, 1957, **4**, № 4, 141—144 (англ.)

Рассматриваются применения операционных электронных моделирующих устройств (ОЕАС — Operational Electronic Analog Computer). Отмечаются достоинства ОЕАС: простота пользования, гибкость быстродействие, непрерывность выхода, низкая стоимость. Сравниваются возможности ОЕАС и цифровых машин. Называются источники ошибок ОЕАС и указывается их порядок.

Указываются применения ОЕАС для обработки данных (вычисления функций, решения уравнений) и для моделирования физических процессов. Примером эффективного применения ОЕАС для вычисления функций является их использование в системах автоматического управления, где требуется быстродействие. В области решения уравнений эффективным является применение ОЕАС для решения краевых задач методом подбора начальных условий. При моделировании физических процессов с помощью ОЕАС можно проверять инженерные расчеты и подбирать конструктивные параметры объектов. Возможно применение ОЕАС для модификации уравнений, описывающих физический процесс, методом сравнения решения, полученного на ОЕАС, с опытным материалом. Л. Ю. Шахмундес

949. Вычислительная машина непрерывного действия. Томас (The analogue computer. Thomas E. Lloyd), Overseas Engr, 1957, **31**, № 360, 163—166 (англ.)

Даются основные принципы работы вычислительных машин дискретного и непрерывного действия и области применения этих типов машин. Работа машины непрерывного действия рассматривается на примере моделирования простой механической системы с помощью операционных усилителей. Кратко описывается конструкция элементов машин непрерывного действия, выпускаемых английской промышленностью. На конкретных примерах рассматривается применение машин непрерывного действия в авиационной, автомобильной, тяжелой и химической промышленности. А. Н. Чуйкин

950. Устройство для управления электрической моделью. Найнс (An analog computer control console. Naines Joseph B., Jr), Proc. Nat. Electronics Conf., 1956, (1957), **12**, 622—632 (англ.)

Отмечается, что увеличение объема исследовательских работ, которые можно было бы производить с помощью электрических моделей, в настоящее время ограничивается скоростью, с которой оператор может изменять отдельные параметры систем и воспринимать результаты электрического моделирования.

Описываются результаты работ в Отделе авиации Бюро аэронавтики военно-морского флота США по использованию электрической модели при автоматическом вводе 10 различных параметров, имеющих до 12 значений каждый, и при наличии в составе электрической модели 10 устройств, изменяющих режим работы электрической модели в соответствии с заданными условиями.

К элементам автоматизации электрической модели относятся панель управления работой интегрирующих усилителей, датчики времени, панель детекторов или дифференциальных реле, которые служат для определения равенства в процессе решения переменных задачи заданным величинам, устройства управления и схема соединений между элементами. Автоматизация сводится к изменению начальных значений переменных и регистрации получаемого семейства характеристик с помощью регистрирующего прибора.

Схема управления интегрирующими усилителями является релейной и обеспечивает работу усилителя в режимах интегрирования, фиксации результата и задания начальных значений. Панель детекторов включает в свой состав усилители постоянного тока, обеспечивающие сравнение полученной величины с заданной с точностью до $\pm$2,5 *мв* и управляющие работой триггера, на выходе которого включено коммутирующее реле со временем срабатывания до 5 *мсек*.

Устройство управления содержит 10 шаговых двигателей, сигналы на перемещение роторов которых могут задаваться по специальной программе, определяемой коммутацией контактов, связанных с шаговыми двигателями.

Приведен пример построения схемы для исследования задачи столкновения двух упругих тел и указано, что, если решать эту задачу при изменении трех параметров, придавая по три значения каждому, потребуется 27 вариантов решения. Приведены результаты решения этой же задачи в виде графиков зависимости коэффициента восстановления от отношения силы вязкого трения к массе при постоянных отношениях коэффициента упругости к массе.

В заключение указывается огромное значение электрической модели с автоматизированным изменением пара-

метров для исследования работы автоматического орудия, что дает 7-кратную экономию времени. И. М. Витенберг

951. **Оборудование для вычислительных машин** (Computing equipment), Process Control and Automat., 1957, 4, № 11, 434 (англ.)

Сообщается о выпуске новых блоков для вычислительных машин непрерывного действия. Среди них — генераторы функций синуса, косинуса и возведения в квадрат, использующие линейную аппроксимацию, генератор низких частот в диапазоне 0,01 ÷ 100 *гц*, блок умножения, способный перемножить 4 отдельные переменные на 1 общую переменную, а также переключатель с переменным временем переключения, который позволяет решать задачи, требующие изменения коэффициентов в процессе решения в зависимости от предыдущих вычислений. Такие переключатели могут быть применены: при регулировании напряжений в определенных пределах; в управляемых снарядах, когда управление включается в определенное время, в системах слепой посадки самолетов; в управлении станками, когда условия меняются при соприкосновении резца с деталью. О. В. Бачин

952. **Вычислительный центр электронного моделирования в Брюсселе** (Das elektronische Analogrechenzentrum in Brüssel), Automatik, 1957, 2, № 10, 231 (нем.)

Сообщается, что в Брюсселе открывается европейский вычислительный центр. Задачей центра является решение сложных исследовательских и проектных работ, консультирование по технике эксплуатации и по применению моделирующих устройств, а также предоставление во временное пользование моделей, имеющихся в центре. Утверждается, что использование моделирующих устройств вычислительного центра позволит заинтересованным лицам сэкономить миллионы долларов на проектную и другую работу. Кратко излагаются возможности моделирующих машин по решению математических задач и моделированию процессов. Г. Г. Рабинович

953. **Первая интегрирующая установка в Австрии** (Erste Integrieranlage in Österreich), MTW-Mitt., 1957, 4, № 6, 383—385 (нем.)

Математическая лаборатория Венской высшей технической школы сообщает, что в ближайшее время в лаборатории будет установлено моделирующее устройство RA-463/2 фирмы «Телефункен». Приводится блочный состав моделирующего устройства, состоящего из 32 операционных усилителей, 8 блоков умножения, 3 функциональных датчиков, 2 полей потенциометров, 1 коммутационного поля, 1 осциллографа, 1 кварцевого генератора и т. д. Модель будет использоваться для проведения научных и технических исследований, а также для целей консультирования заинтересованных промышленных кругов. Перечисляются работы, уже выполненные математической лабораторией по заказу различных предприятий и ведомств. Г. Г. Рабинович

954. **Электронный интегратор дифференциальных уравнений ЭЛИ. Лукашевич, Шептыцкий** (Elektronowy integrator równań różniczkowych ELI. Łukaszewicz L., Szeptycki P.), Zastosowania mat., 1956, 2, № 4, 399—415 (польск.)

Обсуждается в простой форме граничная задача для уравнения Пуассона и бигармонического уравнения и применение метода конечных разностей для их решения. Затем авторы излагают принципы электрического моделирования вышеназванных граничных задач и их разностных эквивалентов. В заключение дается очерк конструкции одного интегратора этого типа, который строится в Институте математических машин Польской академии наук. Следует отметить, что схема конструкции предусматривает изменение частоты питания, чтобы улучшить точность прибора. K. Bochenek

955. **Аналоговая система обработки данных. Гудж** (An analog data handling system. Googe J. M.), IRE Trans. Instrum., 1956, PGI-5, June, 89—97, 7 (англ.)

Приводятся данные аналогового запоминающего устройства с частотной модуляцией на магнитной ленте, которое использовалось для хранения данных, получаемых при испытаниях авиационных реактивных двигателей в техническом исследовательском центре «Арнольд» (Arnold Engineering Development Center). Применение устройства диктовалось следующими соображениями: получение возможности повторения последовательности данных испытания без существенных затрат, получение возможности анализа спектра данных испытания, получение возможности построения функциональной зависимости одной величины, зависящей от времени, от другой, получение возможности непрерывного контроля за работой двигателя без обращения к осциллограммам.

Система составлена из записывающего устройства «306-7» фирмы «Ампекс» (Ampex) и воспроизводящего устройства S-3338. Запись производится одновременно по семи каналам методом частотной модуляции напряжения несущей частоты 27 *кгц* на магнитную ленту шириной 12,7 *мм*, движущуюся со скоростью 380 *мм/сек* или 1520 *мм/сек*. Воспроизведение данных производится при скоростях движения ленты 760 *мм/сек* и 76 *мм/сек*. Используется два канала усиления, что дает возможность воспроизведения данных при основной частоте или при 1/10 основной частоты.

При скорости воспроизведения в 760 *мм/сек* сквозная частотная характеристика системы линейна с точностью ±1 *дб* в диапазоне частот от 0 до 5 *кгц*, а фазовая ошибка не превышает 40° в диапазоне частот до 1 *кгц*. При скорости воспроизведения в 76 *мм/сек* частотная характеристика системы линейна с точностью ∓ 1 *дб* в диапазоне частот от 0 до 500 *гц*, а фазовый сдвиг не превышает 40° при частотах до 100 *гц*.

Отношение сигнал/шум при скорости воспроизведения 760 *мм/сек* составляет 40 *дб* или лучше относительно максимального уровня записи. Искажения гармоник не превышает 2% в диапазоне частот от 0 до 1 *кгц*. Дрейф постоянной составляющей и дрейф усиления канала имеют порядок 1%. Постоянство скорости протяжки ленты обеспечивает точность воспроизводимых частот в 0,2%. Максимальное время воспроизведения при скорости 760 *мм/сек* составляет 16 мин.

При испытании двигателей устройство используется для записи в аналоговой форме скорости компрессора, расхода топлива, давлений, температур, положений регулирующих органов, а также шума двигателя.

А. В. Шилейко

956. **Конструкция и применения моделирующего устройства общего назначения. Пол, Ллойд-Томас** (The design and applications of a general-purpose analogue computer. Paul R. J. A., Lloyd Thomas E.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1957, 17, № 1, 49—73 (англ.)

Рассматривается моделирующее устройство общего назначения фирмы «Шорт» (Англия). Дан подробный анализ влияния конечного значения коэффициента усиления, ширины полосы пропускания, дрейфа нуля, сеточного тока усилителя и элементов обратной связи на точность работы решающих элементов. Делается вывод, что реальным критерием качества усилителя является произведение коэффициента усиления на ширину полосы пропускания. Автор считает целесообразным блочное построение моделирующего устройства, при котором каждый блок представляет собой самостоятельную модель 2-го или 3-го порядка. Отмечается удобство универсальных решающих элементов по сравнению со специализированными.

Моделирующая установка состоит из сумматоров, интеграторов, масштабных блоков, множительных устройств, функциональных преобразователей для воспроизведения непрерывных функций и функциональных преобразователей для воспроизведения разрывных функций. Для решения быстропротекающих процессов предусмот-

рена периодизация процесса с частотой 30 *гц*. Линейные решающие элементы установки базируются на стабилизированном усилителе постоянного тока с коэффициентом усиления 12 000, частотой отсечки 15 *кгц*, величиной сеточного тока не более $5\cdot10^{-11}$ *а* и дрейфом нуля менее 1 *мв*.

Множительное устройство построено на принципе разности квадратов с «квадраторами» на селеновых диодах. Точность устройства 1%. Функциональный преобразователь неразрывных функций аппроксимирует функцию с помощью диодных элементов и имеет ширину полосы пропускания, как у линейных решающих элементов. Точность воспроизведения функций типа параболы ±1%. Функциональный преобразователь разрывных функций служит для воспроизведения ограничения, мертвых ходов, гистерезиса и других разрывных функций. Моделирующая установка снабжается вариатором коэффициентов и блоком запаздывания. Рассматриваются применения установки для решения дифференциальных уравнений и в качестве моделирующего устройства на примерах: решения уравнения вида $dy/dt=-k(y-y^2)\sin kt$, решения уравнений, описывающих динамику полета самолета; изучения характеристик автопилота; изучения связанных механических систем и экономических проблем методом моделирования. Дан метод воспроизведения петли гистерезиса с помощью блока запаздывания. П. В. Тихонов

957. К способу повышения точности функциональных устройств. Томович (Sur une méthode augmentant la précision d'un générateur de fonctions. Tomovich Rajko), Actes. Journées internat. calcul analog. Bruxelles, 1955, Bruxelles, 1956, 121—122 (франц.; рез. англ.)

Описан способ повышения точности при использовании ранее предложенного автором функционального устройства без электромеханических элементов, вырабатывающего в виде электрического напряжения функции вида $v(t)f[g(t)]$, где $v(t)$ и $g(t)$ —функции, вводимые в устройство также в виде напряжений, а f — произвольный закон, набираемый системой потенциометров; в этом устройстве выходное напряжение изменялось ступенчато. Рассматривается случай использования функционального устройства для ввода функций в интегрирующие блоки дифференциальных анализаторов, когда важно добиться повышения точности не самой вводимой функции, а ее интеграла. Способ повышения точности для указанного случая заключается в экстраполяции вводимой функции с помощью корректора, в который параллельно с интегратором вводятся текущие значения интегрируемой функции; при этом он непрерывно вычисляет полуразность двух последних значений вводимой функции и выдает их через суммирующий блок в интегратор. В. В. Васманов

958. Блок умножения общего назначения. Мейерс (A general purpose electronic multiplier. Meyers Robert A.), IRE Trans. Instrum., 1956, **PGI—5**, June, 98—106, 8 (англ.)

Описывается электронный блок умножения, разработанный для аналоговой вычислительной машины БЮСАК (BUSAC — Bureau of Ships Analog Computer) Испытательного бассейна Тейлора (David Taylor Model Basin). Схема блока использует метод „разности абсолютных значений", который основывается на соотношении

$$kE_1E_2 = \mathrm{Av}\,[\,|E_1+E_2+E_c|-|E_1-E_2+E_c|\,], \quad (1)$$

где E_1 и E_2 — входные перемножаемые напряжения, k — постоянный коэффициент и $E_c=mt$, причем t — время а m — постоянный коэффициент. Символ Av означает, что от выражения в скобках берется среднее по времени.

Справедливость (1) доказывается в предположении, что $|E_1+E_2|\leqslant|X_1|$, где X_1 — максимальное значение E_c и E_1 и E_2 изменяются медленно по сравнению с E_c. Вводятся обозначения: $E_1+E_2=S$, $E_1-E_2=D$ и $t_x=\dfrac{-(E_1+E_2)}{m}$, где t_x — момент перехода через нуль величины $E_1+E_2+E_c$. В принятой системе обозначений:

$$\mathrm{Av}\left|S+E_c\right| = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\left|S+E_c\right|dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_x}-(S+E_c)\,dt+$$

$$\frac{1}{T}\int_{t_x}^{t_2}(S+E_c)\,dt = \frac{1}{2T}\left[\frac{2S^2}{m}+2S(t_1+t_2)+m(t_1^2+t_2^2)\right], \quad (2)$$

где $T=t_2-t_1$ — промежуток времени, на котором производится усреднение.

Аналогично получается

$$\mathrm{Av}\left|D+E_c\right| = \frac{1}{2T}\left[\frac{2D^2}{m}+2D(t_1+t_2)+m(t_1^2+t_2^2)\right]. \quad (3)$$

Вычитание (3) из (2) и подстановка $t_1=-1$, $t_2=1$, $m=1$, $T=2$ дают

$$\mathrm{Av}\left[\,\left|S+E_c\right|-\left|D+E_c\right|\,\right] = \frac{1}{2}\left(S^2+D^2\right),$$

что эквивалентно (1).

Схема блока строится в соответствии с (1), причем для суммирования и изменения знака используются электронные операционные усилители, для образования абсолютных величин — двухполупериодные выпрямители, для образования величины E_c используется генератор напряжения треугольной формы, а постоянная слагающая выходного напряжения, пропорциональная его среднему значению, выделяется с помощью фильтра. Выбор треугольной (а не пилообразной) формы для напряжения E_c объясняется тем, что треугольное напряжение содержит меньше гармонических составляющих и, следовательно, может быть образовано с помощью усилителей с более узкой полосой пропускания.

Точность работы блока умножения, определяемая как отношение напряжения погрешности к максимальному значению выходного напряжения, равному 21 *в*, лучше 0,1%. Частотная характеристика линейна в пределах диапазона частот от 0 до 1 *кгц*. Сдвиг фазы достигает 15° на частоте 300 *гц*. Дрейф выходного напряжения редко превышает 10 *мв*. Блок работает во всех четырех квадрантах. Библ. 4 назв. А. В. Шилейко

959. Компоненты моделирующих вычислительных машин (Analogue computer components), Process Control and Automat., 1958, 5, № 1, 28—29 (англ.)

Приведены параметры ряда компонентов моделирующих установок фирмы «Солартрон» (Solarton). Все компоненты изготовляются в виде отдельных блоков и рассчитаны на диапазон входных и выходных напряжений ±100 *в* и на напряжение питания ±300 *в*. Используются печатные схемы, а в блоках питания — печатный монтаж. Перечислены следующие компоненты:

1) операционный усилитель AA621 (усилитель постоянного тока с вибратором); коэффициент усиления по току равен примерно $45\cdot10^3$; дрейф, приведенный ко входу, менее 100 *мкв*; эффективный сеточный ток входного каскада равен 10^{-10} *а*; выходное напряжение ±100 *в*; выходной ток ±10 *ма* при нагрузке 10 *ком*; среднее квадратичное значение шумов на выходе — менее 1 *мв*; может использоваться для операций суммирования, изменения знака и интегрирования;

2) блок TS722 питания накала операционного усилителя AA621; содержит два трансформатора; имеет 6 выходов с напряжением 6,3 *в*; ток каждого выхода 2 *а*; питает один операционный усилитель;

3) блок питания типа AS755; обеспечивает питание 20 усилителей; выход 300 *в* при 500 *ма*; выходное сопротивление по постоянному току менее 0,25 *ом*, по переменному—менее 0,5 *ом;* коэффициент стабилизации — примерно 300.

Должны быть разработаны следующие элементы: 1) операционный усилитель со стабилизицией дрейфа, подобный AA621, но обеспечивающий выходной ток 50 *ма* при нагрузке 2 *ком*; 2) линейный вычислительный блок TR729, в который будут входить потенциометры, точные сопротивления, реле и конденсаторы; блок будет давать возможность пуска, остановки и сброса вычислений; 3) блок умножения, который будет работать с точностью ±0,25% в диапазоне частот до 1 *кгц*; 4) высокостабильный источник напряжений +100 *в* и —100 *в* с выходными токами до 200 *ма*.

В. А. Брик

960. Множительное устройство с сигналом треугольной формы. Мейерс, Дейвис (Triangular-wave analog multiplier. Meyers R. A., Davis H. B.). Electronics, 1956, **29**, № 8, 182—185 (англ.)

Описано четырехквадратное электронное множительное устройство, работающее по методу разности амплитуд:

$$KE_1E_2 = \mathrm{Av}[\,|E_1+E_2+E_c\,| - |E_1-E_2+E_c\,|\,],$$

где E_1 и E_2 — перемножаемые переменные, E_c — напряжение носителя, имеющего форму „пилы" с углом 60°.

Данный метод представляет собой разновидность метода разности квадратов, так как легко показать, что площади выражений $|E_1+E_2+E_c|$ и $|E_1-E_2+E_c|$ пропорциональны соответственно квадрату суммы и квадрату разности перемножаемых сигналов E_1 и E_2. Конструктивно множительное устройство состоит из 5 решающих усилителей и низкочастотного фильтра. Два решающих усилителя служат для формирования алгебраических сумм $(E_1+E_2+E_c)$ и $(E_1-E_2+E_c)$, следующие два усилителя совместно с диодами служат для выделения абсолютных величин полученных сигналов $|E_1+E_2+E_c|$ и $|E_1-E_2+E_c|$. Пятый решающий усилитель служит для суммирования полученных абсолютных величин сигналов. Выход пятого усилителя, усредненный низкочастотным фильтром, пропорционален произведению входных величин E_1 и E_2.

Точность множительного устройства ±0,1% относительно всей шкалы при амплитуде выходного напряжения, равной 21 *в*. Частотная характеристика ровная до 1000 *гц*. Дрейф выхода 10 *мв* после 30 минутного прогрева.

Приводятся структурная схема множительного устройства, принципиальные схемы решающего усилителя и генератора сигнала носителя треугольной формы и характеристики множительного устройства.

П. В. Тихонов

961. Сервомеханизмы в вычислительных устройствах непрерывного действия. Жандрё (Les servomécanismes dans les calculateurs analogiques. Gendreu R.), Ann. radioélectr., 1957, **12**, № 50, 363—381 (франц.; рез. англ.)

Статья теоретического характера, касающаяся использования сервомеханизмов в высокоточных вычислительных устройствах непрерывного действия. Вначале автор дает обзор областей применения сервомеханизмов в высокоточных вычислительных устройствах, далее рассматривает использование сервомеханизмов в дифференцирующих устройствах. В качестве примера рассмотрено решение задачи противовоздушной стрельбы. Статья заканчивается рассмотрением случая использования сервомеханизмов в интегрирующих механизмах.

В. В. Васманов

962. Нелинейные вычисления, выполняемые при помощи электрических схем с линейными элементами. Абу-Хуссейн (Electric nonlinear computation performed by linear elements. Abou-Hussein M. S. M.), Commun. and Electronics, 1957, № 32, 378—380 (англ.)

Описывается выполнение операций деления, умножения, возведения в степень, извлечения корня, логарифмирования, антилогарифмирования, инверсии, получения гиперболических функций — при помощи сравнительно простых электрических схем, содержащих сопротивления, трансформаторы и обычные измерительные приборы (амперметры и вольтметры). При этом независимые переменные, а также результаты операций, т. е. функции этих переменных, представляются в виде электрических напряжений постоянного или переменного тока и иногда в виде коэффициента трансформации трансформатора.

Деление A/B выполняется следующим образом. Напряжение B (постоянного или переменного тока) подается на последовательную цепочку сопротивлений в 1 *ом* и R *ом*. Величина R устанавливается такой, чтобы ток через цепочку (измеряется амперметром) был равен 1 *а*. При этом B (в вольтах) равно $R+1$ (в омах). Второе напряжение A (постоянного или переменного тока) подается на вторую такую же цепочку $R+1$ (два сопротивления R из первой и второй цепочек связаны механически и изменяются одновременно). Падение напряжения на сопротивлении 1 *ом* второй цепочки при этом равно $A(R+1)=A/B$.

Умножение AB выполняется устройством, отличающимся от предыдущего тем, что в первую цепочку подается не напряжение B, а напряжение $1/B$, которое получается на вторичной обмотке трансформатора с коэффициентом трансформации $1:B$; на его первичную обмотку подается напряжение, пропорциональное единице.

Вычисление B'' (n — положительное целое) предлагается осуществлять при помощи n схем деления. При $n=1$ это операция инверсии.

Возведение в целые положительные степени (B^n) производится при помощи каскадного включения n описанных схем деления, причем операция выполняется по формуле

$$B^n = (\ldots((B:(1/B)):(1/B)):(1/B))\ldots:(1/B)):(1/B).$$

Вычисление корня n-го порядка B из заданной величины $C=B^n$ (n — целое положительное) производится с помощью предыдущей схемы следующим образом: подают некоторое входное напряжение B_1, получают $B_1{}^n$ и постепенно изменяют B_1 до тех пор, пока $B_1{}^n$ не станет равным заданной величине C. Полученное B_1 есть искомый корень.

Вычисление корня отрицательного n-го порядка B^{-1} из заданной величины $C=B^n$ (n — целое положительное) выполняется на той же схеме. Для этого повторяют только что описанную процедуру определения B, а затем измеряют в качестве выходного напряжения имеющееся в этой схеме напряжение $(1:B)$. Кроме того, величина B, по мнению автора, может вычисляться по заданной величине B^n с помощью схемы, вычисляющей B^{-n} по B.

Определение логарифма $n=\log Bx$ при заданных B и x (n — целое число, положительное или отрицательное) производится в зависимости от того, справедливо ли неравенство $n>0$ или $n<0$, с помощью описанных схем, отрабатывающих $B^n(n>0)$ или B^{-n} $(n>0)$ соответственно. Например, в первом случае подают на вход

B и среди имеющихся в схеме напряжений B^2, B^3, B^4,.. выбирают напряжение B^y, равное заданному x. При этом найденный y равен искомому n.

При антилогарифмировании с помощью этих же двух схем можно определить x при заданных B и n. С помощью двух же схем — одной для получения B^n и другой для получения B^{-n} — можно образовывать следующие гиперболические функции переменной n (n — целое положительное): $\mathrm{sh}n = (e^n - e^{-n})/2$ или $\mathrm{ch}n = (e^n - e^{-n})/2$. Для деления на 2 можно использовать трансформатор с коэффициентом трансформации 2:1. Если отработать отдельно $\mathrm{sh}n$ и отдельно $\mathrm{ch}n$, а затем разделить первое на второе при помощи описанной схемы деления, то получится величина $\mathrm{th}n$. Аналогично можно отработать $\mathrm{cth}n$. Кроме того, можно вычислять $\mathrm{csch}n = 1/\mathrm{sh}n$ и $\mathrm{sch}n = 1/\mathrm{ch}n$. Указывается, что при развитии этого метода можно использовать следующие системы для автоматической установки необходимых величин сопротивлений R. Автор считает, что после этого можно будет использовать описанные вычислительные элементы (с некоторыми ограничениями, накладываемыми на скорость выполнения операций сервомеханизмами) в различных моделирующих вычислительных установках. Анализ точности в статье не приводится. Автор считает, что, во-первых, результаты будут разными в зависимости от используемых элементов схем, а, во-вторых, точность такого типа схем хорошо известна. В. А. Брик

963. Соотношения между видом аналитического выражения функций и видом структуры преобразователей функции. Ли Цзя-сюнь, Хаэрбинь гун-е дасюэ сюэбао, Тр. Харбинск. политехн. ин-та, 1957, № 2, 65—80 (кит.; рез. русск.)

Приводится вывод основных соотношений между тремя видами аналитического выражения функций и тремя видами структуры функциональных преобразователей. Прямая функция моделируется нелинейной проводимостью, включенной на входе решающего усилителя. Обратная функция моделируется нелийнейной проводимостью, включенной параллельно решающему усилителю.

Неявная функция моделируется нелинейными проводимостями, включенными на входе параллельно решающему усилителю.

На основе полученных соотношений рассматриваются методы синтеза функциональных преобразователей с нелинейными проводимостями из диодных схем. Эти методы обеспечивают повышение точности функционального преобразователя и позволяют снижать его стоимость.

Предлагается и метод построения преобразователя обратной функции с помощью построенного преобразователя прямой функции. Этот метод лучше распространенного в литературе метода. Новый метод обеспечивает снижение погрешности функционального преобразователя и позволяет снижать стоимость и габарит электронного моделирующего устройства с функциональными преобразователями. Резюме автора

964. Новый метод образования функции двух независимых переменных. Полимеру (A new method for generating a function of two independent variables. Polimerou Lazarus G.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, 6, № 3, 167—169 (англ.)

Приводится схема функционального блока, образующего функции двух независимых переменных: $z=f(x, y)$. В блоке используется электроннолучевая трубка. Экран этой трубки закрыт непрозрачной маской, на которой прозрачными линиями нанесено семейство кривых вида $z_i = f(x, y_i)$ для различных постоянных значений y_i ($i=1, 2, 3,...,n$). На этой же маске параллельно оси X кривых наносится прямая линия начала отсчета. Изображение маски проектируется оптической системой на два фотоумножителя, причем на первый фотоумножитель проектируется только линия начала отсчета, а на второй — все кривые. Кроме того, в состав устройства входят несколько триггеров (число триггеров должно быть не меньше n).

Под действием входного напряжения, пропорционального величине x, электронный луч отклоняется на расстояние x в направлении, параллельном оси X маски, а под действием напряжения развертки луч равномерно перемещается по экрану трубки в направлении, параллельном оси Z маски. При развертке луч прежде всего пересекает линию начала отсчета, и в этот момент на выходе первого фотоумножителя возникает импульс, который формируется и затем перебрасывает все триггеры в возбужденное состояние. После этого луч пересекает одну за другой все кривые семейства и на выходе второго фотоумножителя последовательно возникают n импульсов. Схема сброса триггеров выполнена таким образом, что первый триггер сбрасывается первым из этих импульсов, для сброса второго триггера необходимо последовательное воздействие двух импульсов и т. д. На выходе i-го триггера будет иметь место прямоугольный импульс напряжения, длительность которого равна времени прохождения луча от линии начала отсчета до пересечения с i-й кривой семейства в точке с абсциссой x и, следовательно, пропорциональна z_i (имеется в виду, что никакие две кривые семейства не пересекаются и что всегда $z_i > z_{i-1}$). Так как развертка производится периодически, то на выходе каждого триггера будет действовать последовательность таких импульсов.

Величина z получается с помощью линейной интерполяции между значениями z_{i-1} и z_i по формуле

$$z = z_{i-1} + (z_i - z_{i-1})\frac{y - x_{i-1}}{y_i - y_{i-1}},$$

где y_{i-1} и y_i — постоянные значения параметров семейства кривых. Выбор величин z_{i-1} и z_i осуществляется переключателем. Для выполнения умножений амплитуда выходных импульсов i-го и $i-1$-го триггеров делается пропорциональной величине $\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$

Суммирование выполняется с помощью сумматора. Для калибровки развертки может быть использована вторая опорная прямая линия, расположенная дальше всех кривых семейства от линии начала отсчета.

А. В. Шилейко

965. Генерирование функций двух независимых переменных. Сиферт (The generation of functions of two independent variables. Seifert William W.). Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 116—119. Discuss., 119—120 (англ.; рез. франц.)

Описываются 3 метода получения функций 2 переменных для использования в вычислительной машине непрерывного действия: 1) Фотоэлектрические генераторы. Перед экраном электроннолучевой трубки помещается пленка или пластинка, покрытая светозадерживающим слоем разной плотности. В зависимости от положения луча, определяемого координатами x и y, будет изменяться ток, протекающий через фотоэлемент. Этот метод позволяет получить точность 5%.

2) Диодные генераторы. Схема состоит из параллельно включенных диодов, аноды которых соединены с движками потенциометров. На один конец потенциометров подано напряжение x, на другой конец — напряжение y. Выход схемы через сопротивления соединяется с катодами всех диодов. В зависимости от на-

пряжений x и y будут открываться разные диоды и будет изменяться потенциал выхода.

3) Генераторы с использованием трехмерных кулачков. Из гипса или другого материала изготовляется рельефная поверхность, высота которой z в каждой точке (x, y) пропорциональна значению функции двух переменных $z=f(x, y)$. Считывающий щуп перемещается над плоскостью с помощью сервомеханизма, а положение щупа преобразуется в электрическое напряжение. Точность этого метода может быть доведена до 1%. А. Н. Чуйкин

966. Динамический метод моделирования двумерных функций. Власенко В. И., Жданов Г. С., Соколов А. Д., Приборостроение, 1957, № 6, 11—14

Предлагается метод синтеза изображений физических полей, основанный на моделировании двумерной функции. Предлагаемый метод может быть применен к любой непрерывной двумерной функции.

Входными данными для моделирования являются дискретно подсчитанные значения параметра поля. Процессы синтеза изображения выполняются в электронном устройстве, обеспечивающем большую скорость моделирования. Моделируемая функция наблюдается на экране электроннолучевой трубки в виде линий равного уровня.

Предлагаемый метод экспериментально проверен на макете, моделирующем стационарную двумерную функцию. Особенности предлагаемого метода позволяют получать изображение переменных физических полей. Отмечается, что метод динамического моделирования двумерных функций может найти целый ряд научных и технических применений, особенно в области рентгеноструктурного анализа. Л. Ю. Шахмундес

967. Аналоговые вычислительные устройства и их применение к одной народнохозяйственной модели. Крегело (Analogrechner und ihre Anwendung auf ein volkswirtschaftliches Modell. Kregeloh H.), Unternehmensforschung, 1956—1957, **1**, № 3, 97—106 (нем.; рез. англ.)

Популярно-обзорная статья, в которой даны краткие общие сведения о назначении и использовании некоторых построенных и разрабатываемых аналоговых счетно-решающих устройств. Показано, как может быть использовано аналоговое устройство при решении задач экономики для анализа линейных установившихся и неустановившихся процессов и предсказания на основании статистических входных данных будущей случайной экономической величины. Подробно дано решение задачи о взаимодействии между предложением и спросом. Приведены блок-схемы устройств для решения изложенных примеров и графики, изображающие кривые решения. Библ. 8 назв. И. Ф. Шелихова

968. Электромоделирующие устройства рассчитывают процессы передачи тепла. Шектер (Analog computers calculate heat transfer. Schechter Robert S.), Petrol. Refiner, 1957, **36**, № 2, 112—114 (англ.)

Приведена система дифференциальных уравнений в частных производных и граничные значения переменных для этой системы, характеризующие процесс конвекции тепла от вертикально расположенной плоской пластины. Показано, что приведенная система может быть преобразована в систему нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка.

Приведена схема электрической модели, пригодная для исследования процесса конвекции тепла путем электрического моделирования преобразованной системы уравнений. Представлены также некоторые результаты электрического моделирования. И. М. Витенберг

969. Вычислительная система непрерывного действия для определения Q. Пирсон, Хелминг (Analog computing systems for corrected Q. Pierson D. D., Helming F. W., Jr), Gas Age, 1957, **120**, № 12, 22—27 (англ.)

Указывается, что основной характеристикой газа является его теплоотдача, которая может быть определена путем вычисления коэффициента Q по измеренным значениям давления, температуры и веса газа. Приведена блок-схема вычислительного устройства, состоящего в основном из схем извлечения корня и перемножения. Кратко указаны возможности измерения и передачи исходных данных в вычислительное устройство. Точность вычислений лежит в пределах 1%.

И. М. Витенберг

970. Место аналоговых вычислительных машин в управлении атомным реактором. Уокер (The place of analogue computers in reactor control. Walker J.), Combustion Boiler House and Nucl. Rev., 1957, **11**, 503—504 (англ.)

Отмечается целесообразность использования аналоговых вычислительных машин для моделирования систем управления атомными реакторами, а также самих реакторов в установившемся и в переходном режимах. Преимущество аналоговых машин перед цифровыми в этом случае основывается на том, что большинство процессов в атомном реакторе описывается дифференциальными уравнениями, причем входящие в эти уравнения переменные имеют характер непрерывно меняющихся физических величин. Моделирование реактора в установившемся режиме облегчает конструирование оптимальной системы, а модель переходного процесса может быть использована при разработке системы управления реактором и для анализа работы этой системы управления совместно с реактором. Моделирование полной системы управления атомной электростанцией требует наличия около 100 операционных усилителей. А. В. Шилейко

971. Моделирующее устройство для управления тепловыми процессами. Ханнула (The BTU computer: an advanced data system for industry. Hannula Fred W.), Commun. and Electronics, 1957, № 30, 222—225 (англ.)

Описывается моделирующее устройство, предназначенное для вычисления скорости теплоотдачи и количества отводимого тепла в теплообменнике.

Установка решает в натуральном масштабе времени уравнения $P=CF(T_2-T_1)$ и $W=C\int F(T_2-T_1)dt$, где P — скорость теплоотдачи, C — теплоемкость охлаждающей жидкости, F—объем охлаждающей жидкости, T_1 и T_2—входная и выходная температуры охлаждающей жидкости, W—отводимое тепло.

Решение первого уравнения производится с помощью мостовой схемы, для которой (в случае равенства сопротивлений в верхних плечах) справедливо равенство

$$E_{\text{вых}} = \frac{E}{2}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right),$$

где E — напряжение источника питания, R_1 и R_2 — сопротивления нижних плеч моста.

В установке параметр F измеряется расходомером, работающим на принципе мерной диафрагмы, который с помощью дифференциального трансформатора выдает параметр F в виде переменного напряжения E с частотой 1000 *гц*.

Разность параметров $(T_2—T_1)$ вводится в мост посредством датчиков температуры (никелевых сопротивлений R_1 и R_2), помещенных соответственно на входе и выходе охлаждающей жидкости и имеющих зависимость сопротивления от температуры вида: $R=Al^{kT}$. Поэтому с достаточной точностью справедливо равенство

$$T_2 - T_1 = K\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}.$$

Установка снабжена ручной регулировкой для компенсации радиационных утечек тепла и нагрева охлаждающей жидкости из-за перепада давления в мерной диафрагме. Решение второго уравнения выполняется с помощью механического или электрического интегратора.

Описанная установка предназначена для ручного и автоматического управления производственным процессом. В первом случае она помогает оператору оценивать параметры процесса, которые нельзя измерить непосредственно, а вычисление их вручную либо сложно, либо бесполезно в случае быстро протекающих процессов. Во-втором случае она является звеном цепи автоматического управления. П. В. Тихонов

972. Вычислительная машина управляет вооружением (Computer controls weapons firing), Aviat. Week, 1958, 68, № 2, 87 (англ.)

Фирма «Вестингауз» сообщает о замене вычислительной машины «Аэро 5Б» (Aero 5B), установленной на морском истребителе-перехватчике F4D, новой вычислительной машиной непрерывного действия, способной управлять ракетами «воздух-воздух» и другими новыми типами вооружения.

Новая вычислительная машина собрана из стандартных вставных блоков, в свою очередь состоящих из малых вставных блочков, которых имеется всего 8 типов. В машине не имеется вакуумных ламп, в ней содержится 253 кремниевых полупроводниковых триода, 226 кремниевых диодов и 12 магнитных усилителей. Машина работает при температурах от —55° до +85°. Потребляемая мощность 320 *вт*, что на 60% меньше потребляемой мощности предыдущей ламповой машины. О. В. Бачин

973. Вычислительная машина моделирует аэродинамический нагрев (Computer simulates aerodynamic heating), Automat. Control, 1958, 8, № 3, 61—62 (англ.)

При конструировании управляемых снарядов и самолетов фирмы-поставщики считают выгодным проводить испытания на аэродинамический нагрев при помощи радиации тепла на модель с последующей обработкой результатов на вычислительной машине непрерывного действия. Нагрев создается мощными нагревательными лампами с мощностью отдачи свыше 500 *квт/м²*. Степень передачи тепла в модели определяется аналоговой машиной. Хотя машина предназначена для авиационной промышленности, простым изменением коэффициентов ее можно перестроить для контроля нагрева в других промышленных установках. Мощность нагревательных ламп регулируется игнитроном.

Подобные устройства применяются фирмами WADC и SAAB в Швеции, а в США — государственными испытательными станциями и исследовательскими станциями фирмы «Боинг» (Boeing). О. В. Бачин

974. Метод моделирования для изучения многократного рассеяния. Бартон, Кемпбелл, Рид (An analogue method for studying multiple scattering. Barton J. C., Campbell D. A., Read R. C.), Proc. Phys. Soc., 1957, **A70**, № 8, 605—614 (англ).

Описано устройство для моделирования многократного рассеяния методом Монте-Карло. Получено большое количество следов, на которых проверяются статистические закономерности многократного рассеяния, в применении к вычислению «эффекта плоской камеры».

А. А. Варфоломеев

975. Электронное моделирование сверхзвукового потока. Кобаснаи (An electronic analogue for supersonic flow. Kovasznay Leslie S.), J. Fluid Mech., 1957, 2, № 4, 383—396 (англ.),

Излагается метод электронного моделирования двумерного сверхзвукового потока. Поток задается наклонной разверткой, угол с горизонтом которой составляет угол Маха набегающего потока. Контур тела представлен как непрозрачный силуэт на том же экране, который воспроизводит поток, или на отдельном экране. При совмещении такого контура с указанной выше разверткой с добавлением интегрирующего устройства с фототрубкой обеспечивается возможность воспроизведения картины сверхзвукового обтекания, даже с учетом нелинейности 2-го порядка.

Основной связью, обеспечивающей воспроизведение нелинейности, является изменение скорости горизонтальной развертки в зависимости от толщины обтекаемого тела или угла наклона линии контура тела. Полученный результат интегрирования луча, проходящего через непрозрачное тело, подается в контур горизонтальной развертки, который непосредственно влияет на скорость горизонтального перемещения светового зайчика. Выходные данные интегрирования могут быть также введены в канал, задающий интенсивность луча электронно-лучевой трубки.

Приведены фотографии, снятые с экрана электронно-лучевой трубки; они получены при обтекании ромбовидного профиля с учетом линейных членов и нелинейных членов 2-го порядка в общем дифференциальном уравнении с частными производными для двумерного сверхзвукового потока

Автор утверждает, что таким методом можно моделировать обтекание тела осесимметричным сверхзвуковым потоком, исследовать интерференцию двух сверхзвуковых потоков, идущих под углом друг к другу, и решать задачи неустановившегося обтекания тела одномерным сверхзвуковым потоком. В. А. Комаров

976. Метод изучения на моделирующей установке реакторов, ядерные свойства которых изменяются по радиусу. Бейли, Пирс (Method of studying multi-region reactors with an analog computer. Bayly J. G., Pearce R. M.), Nuclear Sci. and Engng, 1957, 2, № 3 352—362 (англ.)

Описывается электрическая модель для изучения реакторов, ядерные свойства которых изменяются по радиусу. Моделирующая установка решает алгебраические уравнения, полученные из дифференциальных уравнений, описывающих диффузию нейтронов, используя метод конечных разностей.

Реакторы делятся на однотипные, однородные области с плоскими, сферическими или цилиндрическими слоями. Параметры скоростной группы могут независимо меняться в этих областях, причем могут моделироваться различные скоростные группы нейтронов. На воспроизведение одной группы оболочки требуется один операционный усилитель (сумматор) и два потенциометра, если диффузионная постоянная скоростной группы не меняется.

Изложены методика установки граничных условий, учет изменения диффузионной постоянной и метод регулировки коэффициентов для достижения критичности реактора.

Моделирующая установка служит для определения реактивности, воспроизведения пространственного распределения различных нейтронных групп и для решения родственных уравнений.

Экспериментальная проверка показала, что однородность плоских и сферических слоев равна 0,001, а цилиндрических—0,002. Дрейф реактивности порядка $5 \cdot 10^{-4}$ в течение 8 час. П. В. Тихонов

977. Заметка об использовании дифференциальных элементов в моделирующих устройствах. Канно (Kanno M.), Дэнки гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Engrs Japan, 1955, 75, № 1, 11—15 (японск.)

978. Электронный интегратор, работающий с небольшой скоростью. Мори, Сёдзи, Сэйсан кэнкю, 1955, 7, № 5, 23 (японск.)

979. Моделирующее устройство: его использование и приложение. Номура (Nomura Tamiya), Нихон кикай гаккайси, J. Japan Soc. Mech. Engrs, 1956, 59, № 454, 820—830 (японск.)

980. Электронное вычислительное устройство непрерывного действия. Нода, Дэнки гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1954, **74**, № 9, 1093—1105 (японск.)

981. Математическое моделирование электромашинных схем постоянного тока. Боляев И. П., Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1958, № 1, 21—34

982. Математическое моделирование бесколлекторных электрических машин переменного тока. Сигник Н. Х., Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1958, № 1, 35—49

983. Электронная аналоговая вычислительная машина «Шорт». Часть 1. Основные принципы работы и назначение одной электронной аналоговой вычислительной машины с обзором различных существующих дополнительных блоков. Пол (The Short electronic analogue computer. Part 1. Basic principles of operation and scope of an electronic analogue computer, with an outline of the various supplementary units available. Paul R. J. A.), Overseas Engr, 1956, **29**, № 337, 205—208 (англ.)

984. Электронная аналоговая вычислительная машина «Шорт». Часть 2. Аналоговая вычислительная машина общего назначения, построенная для серийного производства и способная к однократной и периодической работе. Пол (The Short electronic analogue computer. Part 2. A general-purpose analogue computer designed for quantity production and capable of single-shot and repetitive operation. Paul R. J. A.), Overseas Engr, 1956, **29**, № 338, 251—252 (англ.)

985. Введение в следящие системы и вычислительные машины. Амброзини (Introduction aux servo-mécanismes et calculateurs. Ambrosini M. L.), Rev. techn. europ. et indicat. industr., 1958, **39**, № 670, 17—18 (франц.)

986. Механическая вычислительная машина непрерывного действия (A mechanical analogue computer), Brit. Communs and Electronics, 1958, **5**, № 6, 445 (англ.)

Сообщение о механической машине непрерывного действия для обучения студентов основным принципам построения вычислительных машин непрерывного действия.

Машина производит сложение, вычитание, умножение, деление и интегрирование, позволяет решать уравнение, содержащее 4 умножения и 4 интегрирования. Интегрирование производится только по времени с помощью мотора постоянной скорости. Предполагается ввести в машину звенья, выполняющие тригонометрические действия. Возможна остановка вычислений в любой момент времени.

Машина, названная МАК (MAC), произведена фирмой «Эйр Трэйнерс Линк» (Air Trainers Link Ltd.) для Имперского научно-технического колледжа в Южном Кенсингтоне. О. В. Бачин

987. Вычислительное устройство для обработки данных при измерениях, использующих эффект Допплера. Кинтнер, Армата (The Doppler data translator. Kintner P. M., Armata E. J.), IRE Trans. Instrum., 1956, **PGI-5**, June, 142—147 10 (англ.)

При отражении радиоволн от движущегося предмета частота отраженных радиоволн изменяется и зависит от скорости движения предмета, так что разность частот переданного и принятого сигнала (эффект Допплера) позволяет судить о скорости движения указанного предмета. Описывается вычислительное устройство, состоящее из трех стоек и обеспечивающее определение радиальной скорости движения предмета, наблюдаемого с помощью радиолокатора. Выходные данные устройства записываются в двоичном коде на магнитной ленте таким образом, чтобы их можно было быстро ввести в любую вычислительную машину дискретного действия. Основой вычислительного устройства является счетчик, который подсчитывает число периодов частоты 50 *кгц*, приходящих на счетчик в течение одного периода напряжения разностной частоты. И. М. Витенберг

988. Быстродействующие преобразователи непрерывных величин в цифровые: Клейн (High-speed analog-digital convertors. Klein Martin L.), IRE Trans. Instrum., 1956, **PGI-5**, June, 148—154, 10 (англ.)

Рассматриваются различные методы преобразования непрерывных величин в цифровые.

Метод «пространственного кодирования» предусматривает использование специальной кодовой электроннолучевой трубки или обычной электроннолучевой трубки с кодовой маской.

Метод «кодирования с помощью обратной связи» предусматривает компенсацию преобразуемого напряжения суммой напряжений, пропорциональных ряду степеней 2. Процесс преобразования заключается в последовательном образовании составляющих компенсирующей суммы напряжений, начиная с наибольшей, и сравнении этой суммы с преобразуемым напряжением. Если после добавления очередной составляющей сумма оказывается меньше преобразуемого напряжения, то эта составляющая остается в составе суммы и в соответствующий разряд двоичного числа записывается единица. Если после добавления очередной составляющей сумма оказывается больше преобразуемого напряжения, то составляющая гасится и в соответствующий разряд числа записывается 0.

Метод «кодирования на основе временных интервалов» предусматривает преобразование с помощью фантастронной схемы величины входного напряжения в величины интервалов времени и последующее измерение этих интервалов путем подсчета, укладывающихся в интервал периодов изменения напряжения стабилизированного генератора высокой частоты.

Метод «частотной модуляции» предусматривает модуляцию преобразуемым напряжением частоты генератора синусоидального напряжения или мультивибратора и последующее измерение этой частоты путем подсчета числа периодов за заданный интервал времени.

Метод «самопереключения» предусматривает подачу преобразуемого напряжения на ряд диодов, на которые, кроме этого, последовательно задаются отрицательные смещения, причем на каждый последующий диод задается несколько большее напряжение смещения, чем на предыдущий (например, 1, 2, 3,...*в*). Проводить смогут только те диоды, на которых смещение окажется меньшим преобразуемого напряжения. Коммутация диодов осуществляется с помощью диодной матрицы.

Среди механических методов рассматривается использование дисков с чередующимися прозрачными и непрозрачными полосами. При вращении диска вместе с валом, угловое положение которого преобразуется в цифровую величину, эти полоски прерывают световой пучок, а число таких прерываний подсчитывается счетчиком. Рассмотрено также использование кодовых дисков и кодовых кулачков.

Приводится сводная таблица примерных данных, соответствующих каждому из методов.

	Кодирование пространственное	Кодирование с обратной связью	Кодирование на основе интервалов времени	Самопереключение	Механические методы
Скорость преобразований, сек.	5 000 000	15 000	3000	3000	10
Точность, %	0,4	0,1	0,4	0,4	0,05
Число ламп	40	50	20	45	25
Размеры, $дм^3$	85	100	57	57	57

Данные о числе ламп приводятся в таблице без учета источников питания, а данные о размерах справедливы при использовании миниатюрных ламп. Библ. 11 назв.

А. В. Шилейко

989. Необычный метод аналого-цифрового преобразования с помощью электронных устройств. Смит (An unusual electronic analog-digital conversion method. Smith Blanchard D., Jr), IRE Trans. Instrum., 1956, **PGI-5**, June, 155—160, 11 (англ).

Описываются схемы каскадных преобразователей, отображающих двоичным кодом величину электрического напряжения. Преобразователь в обычный двоичный код состоит из ряда последовательно включенных каскадов, число которых равно числу разрядов результирующего кода. Каждый каскад имеет один вход и два выхода. Величина напряжения на первом выходе (D_n) отображает значение соответствующего разряда. Она равна

$$D_n = \begin{cases} 0, \text{ если } V_n < A \\ 1, \text{ если } V_n > A \end{cases}, \qquad (1)$$

где V_n — входное напряжение каскада; A — произвольная постоянная величина, определяющая диапазон изменения преобразуемого напряжения. Величина напряжения на втором выходе каждого каскада (V_{n+1}) равна

$$V_{n+1} = 2(V_n - AD_n). \qquad (2)$$

Вход первого каскада, соответствующего самому старшему разряду кода, подсоединяется непосредственно к источнику преобразуемого напряжения, а входы всех последующих — к выходам V_{n+1} предыдущих. Комбинация напряжений на выходах D_n каскадов представляет собой двоичное число, отображающее величину входного напряжения. Соотношения (1) и (2) называются переходными характеристиками каскада.

Преобразователь в код Грея имеет ту же структуру и переходные характеристики каскадов:

$$D_n = \begin{cases} 0, \text{ если } V_n < 0 \\ 1, \text{ если } V_n > 0 \end{cases}$$

и $V_{n+1} = A - 2|V_n|$.

Рассматривается также схема последовательно действующего преобразователя, состоящего из одного каскада, схемы коммутатора и двух емкостей, поочередно хранящих сначала значение входного напряжения схемы, а затем последовательные значения выходных напряжений разрядов. Другой вариант такой схемы использует линию задержки, включенную между входом и выходом каскада. Входное напряжение этой последней схемы имеет форму импульсов.

Рассматриваются принципиальные схемы каскадов, использующие операционные усилители, диоды, а для образования абсолютного значения в случае кода Грея — двухполупериодный выпрямитель с трансформатором. Библ. 3 назв.

А. В. Шилейко

990. Логика V-образного щеточного преобразователя непрерывных величин в цифровой код. Фейнголд (The logic of 'V-brush analog to-digital-converters. Feingold S. K.), ISA Journal, 1957, **4**, № 2, 66—68 (англ.)

Применение цифровых вычислительных машин требует наличия устройств, преобразующих такие непрерывно меняющиеся величины, как температура, уровень жидкости или давление, в цифровой, например двоичный, код. Практически уже применяются такие преобразователи. Логике работы такого преобразователя посвящена статья. Для преобразования используется двоично-кодированный диск с системой сканирования со сдвоенными щетками. Приводится картина расположения контактов на диске, обеспечивающих сканирование с помощью сдвоенной щетки, а также логическая релейная схема, соответствующая работе преобразователя.

Б. Ш. Беркович

991. Оригинальное решение задачи о расширении возможностей вычислительной машины. Майкелс (A unique approach to computer versatility. Michels L. S.), Electronic Inds and Tele-Tech, 1957, **16**, № 10, 72—75, 112, 120, 124, 142 (англ.)

Сообщается о разработанной фирмой «Бендикс» (Bendix) вычислительной системе G-15, объединяющей 2 машины: универсальную машину с плавающей запятой и цифровой дифференциальный анализатор DA-1. Универсальная машина может работать независимо от DA-1, который предназначен только для решения дифференциальных уравнений и работает по полуфиксированной программе.

Запоминающее устройство на магнитном барабане общее для универсальной машины и DA-1. Магнитный барабан, диаметром 305 *мм* и длиной 89 *мм*, вращается со скоростью 1800 об/мин и имеет 20 дорожек. На каждой дорожке можно записать 2160 29-разрядных двоичных кодов. Каждая дорожка имеет одну записывающую и одну считывающую головку. Во время работы информация, записанная на всех дорожках, рециркулирует. При этом имеются 5 дорожек с периодом рециркуляции 4 кода, 3 дорожки с периодом рециркуляции 2 кода и 2 дорожки с периодом рециркуляции 1 код. Некоторые из этих коротких дорожек используются в качестве оперативной памяти, другие — в качестве регистров арифметического устройства. Для стирания информации применяется постоянный магнит. Для записи входных и выходных данных отведена специальная дорожка. Имеется возможность вводить данные в машину, не прерывая вычислений.

Универсальная машина всегда сначала выполняет все инструкции, записанные на одной дорожке барабана, а затем переходит к инструкции, адрес которой указан в последней ячейке дорожки. Описывается принцип работы цифрового дифференциального анализатора.

Универсальная машина может записывать и считывать информацию на всех 20 дорожках барабана. При работе DA-1 используются только 10 дорожек. Поэтому универсальная машина может управлять работой DA-1.

А. Н. Чуйкин

992. Фирма «Эпско» обеспечивает связь между цифровой и аналоговой системами (Epsco delivers links for digital, analogue systems), Automat. Control, 1957, **6**, № 5, 65 (англ.)

Бостонская фирма «Эпско» (Epsco, Inc.) поставила фирмам «Рамо-Вулридж» (Ramo-Woolridge) и «Конвэр-Астронавтикс» (Convair Astronautics) преобразующее оборудование для взаимной связи цифровой и аналоговой вычислительных машин.

Фирма «Рамо-Вулридж» намерена использовать его для моделирования сложной системы наведения управляемых снарядов. Модель сочетает в замкнутом контуре цифровую установку «Сперри-Рэнд-1103А и аналоговую установку Electronics Associates PACE. «Конвэр-Астронавтикс» собирается решать такую же задачу.

Оборудование, названное АДДАВЕРТЕР (ADDAVERTER), состоит из аналого-цифрового преобразователя (5÷15 каналов, относительная точность 0,1% от действительной величины напряжения, абсолютная точность 1 *мв*, время преобразования 105 мксек), цифро-аналогового преобразователя (5÷15 каналов, время преобразования 120 мксек.) и устройства управления. Приводятся структурная схема всего комплекса и некоторые сведения о взаимодействии отдельных частей. Дополнительно сообщается о возможности использования обо-

рудования АДДАВЕРТЕР для оценки и отбора информации по заданным критериям.

Фирма «Эпско» разрабатывает также цифровое телеметрическое и преобразующее звено, управляемое вычислительной машиной. Новое звено позволит обрабатывать телеметрические данные с высокой скоростью, недоступной в настоящее время. А. Д. Таланцев

993. Синусно-косинусный преобразователь углового положения. Сполдинг (Sine-cosine angular position encoders. Spaulding Carl P.), IRE Trans. Instrum., 1956, **PGI-5**, June, 161—167, 11 (англ.)

Рассматриваются основные свойства устройств, отображающих двоичными цифровыми кодами и, в частности, кодом Грея синус или косинус углового положения вала и выполняемых на основе кодовых дисков. Отмечается, что чтение кода, нанесенного на диске, с помощью контактных щеток дает возможность получать величину синуса (или косинуса) с точностью порядка 0,3% для диска с внутренним диаметром 75 *мм* и наружным диаметром 100 *мм*. Оптический метод считывания дает возможность получать точность порядка 0,03%.

В качестве одного из возможных путей повышения точности рассматривается метод построения двухдисковых систем грубого и точного отсчета, использующих механический редуктор. Для функций, которые кодируются диском точного отсчета в том случае, если передаточное отношение редуктора равно 1:4, вводятся специальные названия «персинус» и «перкосинус». Приводятся таблицы для получения значений синуса и косинуса по значениям персинуса и перкосинуса и по данным, получаемым от диска грубого отсчета.

Для того чтобы избежать неопределенностей, которые обычно возникают в подобных системах в момент перехода от одного значения к другому, благодаря тому, что несколько щеток практически не могут перейти с одной ламели кодового диска на другую строго одновременно, используется код Грея. Неопределенности, могущие возникнуть из-за необходимости одновременного переключения в системах грубого и точного отсчета, исключаются применением в системе грубого отсчета двух пар щеток, одна из которых смещена на 15° относительно линии отсчета в направлении вращения диска, а другая смещена на столько же в противоположном направлении. Выбор производится с помощью старших разрядов функций персинуса и перкосинуса.

Приводится пример использования преобразователей такого типа для преобразования координат. Библ. 3 назв. А. В. Шилейко

994. Аналого-цифровые преобразователи. Боуэр (Analog-Digital-Konverter. Bower George G.), Regelungstechnik, 1957, **5**, № 12, 459—466 (нем.)

995. Смешанные аналогово-цифровые вычислительные системы. Палевский (Hybrid analog-digital computing systems. Palevsky Max), Instrum. and Automat., 1957, **30**, № 10, 1877—1880 (англ.)

996. Европейский институт научных вычислений (L'Institut européen de calcul scientifique), Mesures et contrôle industr., 1957, **22**, № 245, 798—800 (франц.)

Сообщается об установке фирмой «ИБМ-Франс» в Парижском вычислительном институте электронной цифровой вычислительной машины ИБМ-704. Коллектив, работающий с машиной, делится на группы: математических исследований, теоретического и прикладного программирования. Машина ИБМ-704 работает в двоичной системе счисления. Входные устройства состоят из устройств для чтения перфокарт и магнитных лент. Перфокарты читаются со скоростью 250 карт в 1 мин. Каждая карта содержит 72 десятичных разряда. Магнитные ленты длиной по 730 *м* читаются с помощью шести устройств со скоростью 90 000 двоичных разрядов в 1 сек. Каждая лента хранит до 32,4 млн. двоичных разрядов. Имеется два запоминающих устройства на ферритовых тороидальных сердечниках диаметром 2 *мм*, состоящих каждое из 36 матриц по 4096 ячеек. Время выборки одного слова составляет 12 мксек. Слова передаются в машине параллельно и состоят из 36 двоичных разрядов. Имеется также два магнитных барабана диаметром 330 *мм* и длиной 120 *мм*. Емкость каждого барабана составляет 4096 слов. Информация передается с барабанов в оперативное запоминающее устройство на ферритовых сердечниках. В качестве резерва памяти используются магнитные ленты. Арифметическое устройство машины работает со скоростью 42 000 операций в 1 сек. Оно может получать информацию непосредственно с пульта ручного управления. Выходные устройства состоят из печатающего устройства, работающего со скоростью 150 строк в 1 мин., и перфоратора перфокарт, работающего со скоростью 100 карт в 1 мин. Результаты вычислений могут быть представлены в виде кривых с помощью двух электронно-лучевых трубок. Выходные данные могут также записываться на магнитную ленту со скоростью 15 000 цифр в 1 мин. К внешним устройствам относятся устройство переписи с перфокарт на магнитную ленту, работающее со скоростью 250 карт в 1 мин., и устройство, печатающее данные с магнитной ленты со скоростью 150 строк в 1 мин. А. В. Шилейко

997. Аналоговые и цифровые вычислительные машины. Намьет (Analog and digital computers. Namyet Saul), Tech Engng News, 1957, **39**, № 2, 26—35 (англ.)

Излагается краткий очерк развития вычислительных машин за последние 10 лет. Дается классификация моделирующих устройств и цифровых вычислительных машин, приводятся их показатели и возможности. В популярной форме описывается основной блочный состав моделирующего устройства и принцип решения дифференциальных уравнений на моделирующих устройствах. Приводятся примеры применения электронных моделирующих устройств.

Описывается блок-схема и принцип действия цифровых вычислительных машин. Приводится несколько примеров использования цифровых вычислительных машин для проведения расчетов по строительству шоссейных дорог и мостов. Г. Г. Рабинович

998. Автоматические цифровые вычислительные машины. Бут (Automatic digital calculators. (A retrospect). Booth Andrew D.), Nature, 1957, **180**, № 4595, 1089—1091 (англ.)

Приводится обзор развития техники электронных цифровых вычислительных машин и методов их использования за истекшее десятилетие. Отмечается, что в настоящее время область применения электронных цифровых вычислительных машин можно разделить на 4 основные группы: промышленные, технические, научные и нечисловые применения. Рассматривается ряд научных работ, выполненных с помощью цифровых вычислительных машин. Библ. 15 назв. А. В. Шилейко

999. О подготовительной работе при автоматическом вычислении. Рутисхаузер (Über die Vorbereitungsarbeit beim automatischen Rechnen. Rutishauser H.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 247—257 (нем.)

Краткое популярное изложение основных проблем программирования задач для вычислительных машин. В. И. Смирнов

1000. Электронные вычислительные машины с программным управлением. Хубер (Programmgesteuerte elektronische Rechenmaschinen. Huber A.), Funk-Technik, 1958, **13**, № 8, 239 (нем.)

Одна из серии популярных статей. Описываются примеры программирования и многоадресные машины.

1001. Прогресс в области вычислительных машин (Computer progress. Electrodatia), Office Mag., 1957, **4**, № 48, 882—883 (англ.)

Подборка из кратких сообщений, касающихся производства и использования вычислительных машин. Приведены следующие данные. В Англии к ноябрю 1957 г. работало до 200 вычислительных машин, построенных десятью английскими фирмами. Кроме того, вычислительные машины производятся на экспорт. В Западной Европе по производству вычислительных машин Англия занимает ведущее место.

В коммерческих предприятиях Америки насчитывается свыше 200 вычислительных машин стоимостью в 1 млн. долл. и более, свыше 800 машин стоимостью в 100—500 тыс. долл. и около 250 машин стоимостью менее 100 тыс. долл. Все эти машины являются продукцией всего лишь 18 компаний, причем в то время как в Англии в производство вычислительных машин втягиваются новые фирмы, в Америке наступил процесс консолидации. Большинство малых компаний либо влилось в крупные корпорации, либо вышло из бизнеса.

Н. П. Брусенцов

1002. Некоторые автоматические цифровые вычислительные машины в Западной Европе. Блакман (Some automatic digital computers in Western Europe. Blachman Nelson M.), IRE Trans. Electronic Comput., 1956, EC-5, № 3 ,158—166 (англ.)

Отчет о посещении сотрудником электронной лаборатории компании «Сильвания» (США) ведущих западноевропейских фирм и лабораторий, работающих в области автоматических цифровых вычислительных устройств.

Автор делает краткий обзор цифровых вычислительных устройств, разработанных в Британском радиолокационном исследовательском учреждении, Шведском совете по вычислительным машинам, Датском институте вычислительных машин, Норвежском вычислительном центре, Мюнхенском технологическом институте, Швейцарском федеральном технологическом институте, французской фирме ИБМ, парижской фирме «Буль» и Антверпенской телефонной компании «Белл».

В заключение дается краткий отчет о Брюссельской и Парижской выставках коммерческих машин. Оговариваясь о своей малой осведомленности о развитии цифровых вычислительных машин в Советском Союзе, автор ставит Англию на первое место в этой области среди европейских стран.

Отмечается, что, как показали выставки коммерческих машин в Англии и Франции, в области перфорационных вычислительных машин Европа не отстает от Соединенных Штатов Америки. В. В. Васманов

1003. Современные электронные вычислительные машины. Гаттелинг (Modern electronic computers. Gutteling C.), Conquest, 1957, **1**, № 1, 25—27 (англ.)

Приводится краткий исторический очерк развития вычислительных машин. Отмечается, что действия, выполняемые человеком при вычислениях, можно сравнить с действиями, которые выполняет при работе вычислительная машина, однако нельзя отождествлять работу машины с работой человеческого мозга, потому что машина выполняет только те действия, которые предусмотрены программой, составленной человеком. На примере машины ЭНИАК, содержащей 20 000 электронных ламп, рассматривается надежность работы первых автоматических электронных машин. Отмечено, что надежность работы современных вычислительных машин значительно возросла. А. Н. Чуйкин

1004. Как работает электронный «мозг»? (How do electronic «brains» work?), Nat. Engr, 1958, **62**, № 2, 31—32 (англ.)

Популярная статья о принципах работы вычислительных машин непрерывного и дискретного действия. В качестве примеров рассматриваются в основном машины GEORGE и ИВМ-704. О. В. Бачин

1005. Психологические испытания и выбор программистов для вычислительных машин. Роуан (Psychological tests and selection of computer programmers. Rowan T. C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 3, 348—353 (англ.)

Обсуждается вопрос о проведении испытаний для лиц, принимаемых на работу в качестве программистов. Рассматриваются возможные методы организации таких испытаний, и проводится анализ практического применения одного из методов. В результате экспериментов оказалось, что трудно придумать такие испытания, по которым можно было бы судить о способности человека решать определенные задачи. Поэтому при испытаниях ставилась лишь задача получить общее представление о способностях человека и о чертах его характера.

А. Н. Чуйкин

1006. Импульсный дифференциальный анализатор. Криштоуфек (Impulsní diferenciální analysátor. Krištoufek Karel), Stroje zpracov. inform., 1956, № 4, 185—198 (чешск.; рез. русск., англ.)

В начале статьи автор указывает на некоторые недостатки узлов механических и электронных моделирующих устройств в их применении в дешевых дифференциальных анализаторах, используемых для ориентировочных расчетов и знакомит читателя с принципом разработанного в Институте математических машин в Праге устройства — импульсного дифференциального анализатора. Далее рассмотрена схема импульсного интегратора с двумя импульсными входами и одним выходом. Интегратор содержит электромеханическое устройство для накопления импульсов, 5 реле и 3 электронные лампы. Интегрируемая функция является монотонно возрастающей, и сведения о знаках переменных сигнализируются по особой линии. Показана также схема употребления двух интеграторов для умножения.

Интересным является соединение непрерывного и цифрового принципов и квантование непрерывной величины.

Автореферат

1007. Использование вычислительных машин. Вуджер (The use of computers. Woodger M.), Research, 1957, **10**, № 9, 345—349 (англ.)

Статья общего характера. Изложение иллюстрируется в общих чертах примером задачи определения собственных частот и форм упругих колебаний крыла самолета, решаемой на цифровой вычислительной машине ДЭЮКЕ (DEUCE). Г. Х. Новик

1008. Вычислительные машины для конторской работы в Америке (Business computers in America), Electr. Rev., 1958, **162**, № 20, 914 (англ.)

Краткое изложение лекции доктора Старра (A. T. Starr) «Некоторые обстоятельства развития вычислительных машин для конторской работы в США», прочитанной на конференции по измерениям Института электроинженеров-электроников (I. E. E.) 6 мая 1958 г. Рассматривается экономическая целесообразность автоматизации конторской работы и отношение к автоматизации как предпринимателей, так и рабочих. О. В. Бачин

1009. Устройство запоминания информации — ключ к автоматизации. Бенгстон, Смит (Information storage devices: a key to automation. Part 1. Bengston Richard J., Smith Joseph E., Jr), Computers and Automat., 1958, **7**, № 4, 11—13 (англ.)

Начало популярной статьи об устройствах для хранения информации. Дается история развития запоминающих устройств вычислительных машин, требования к ним и перспективы развития. Производится классификация запоминающих устройств и приводятся их основные характеристики. Рассматриваются и другие применения устройств хранения информации, такие как запись радио- и телевизионных передач на магнитной ленте, запись данных научного характера и т. д.

Сообщается, что по оценке автора общая стоимость вычислительных машин и вспомогательного оборудования, проданных в США в 1956 г., достигла 500 000 000 долл. и ожидается повышение этой суммы в 1960 г. до 1 млрд. долл., а в 1964 г. — до 1,5 млрд. долл.

О. В. Бачин

1010. Цифровые вычислительные машины. Чанкальини (Computadoras digitales. Ciancaglini Humberto R.), Rev. telegr. electrón., 1958, **46**, № 547, 251—253, 267 (исп.)

Продолжение серии статей об устройстве цифровых вычислительных машин. Дается подробное описание лампового триггера, двоичного счетчика на триггерах, лампового кольцевого счетчика.

В качестве примера других вариантов счетчиков упоминается декатрон — газоразрядная счетная лампа и счетная лампа с отклонением луча — трохотрон.

О. В. Бачин

1011. Электронное цифровое автоматическое счетное устройство. Ямасита, Дэнки гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Engrs Japan, 1954, **74**, № 10, 1262—1281 (японск.)

1012. Программирование для электронной вычислительной машины. Дюверже (De la programmation d'une calculatrice électronique. Duverger Lucien), Automatisme, 1957, **2**, № 7, 274—277 (франц.)

Одна из серий статей автора об электронных вычислительных машинах. В данной статье приводится краткое описание Французской электронной вычислительной машины ГАММА с магнитным барабаном, выпускаемой фирмой «Буль». Ввод и вывод чисел с помощью перфокарт. Основное запоминающее устройство на магнитном барабане. Возможна установка барабанов с различной емкостью памяти (4196, 8192, 16384 чисел). Кроме того, имеется еще быстродействующее запоминающее устройство на 16 чисел. Машина работает в десятичной системе счисления с двоичной кодировкой с 12-разрядными числами. Запятая фиксированная.

Примечание референта. По своим данным машина ГАММА с барабаном идентична машине ГАММА-3В.

Н. Н. Поснов

1013. Малогабаритная вычислительная машина. Фланнелл (The small computer. Flannell C. F.), Signal (USA), 1957, **12**, № 4, 21—22, 24 (англ.)

Отмечается, что цифровые вычислительные машины находят широкое применение в инженерной практике. Однако использование больших вычислительных машин имеет свои недостатки: большая загруженность больших машин, а также сложность программирования на них делает невозможным для инженера получение быстрого решения задачи.

Подчеркивается, что малогабаритные вычислительные машины имеют такие же возможности, как и большие машины, и уступают им только в скорости производства вычислений. Но малогабаритные машины имеют ряд преимуществ. Они могут быть установлены непосредственно на тех предприятиях, где они необходимы, что экономит время на пересылку данных на фирму, где стоит вычислительная машина, и обратно. Это же позволяет применять специализированные машины, что упрощает сборудование. Простота программирования дает возможность быстро получить решение задачи и позволяет легко вносить необходимые изменения в программу. Кроме того, простота эксплуатации малогабаритной вычислительной машины снижает стоимость решения задачи.

А. Н. Чуйкин

1014. Механический «мозг». Стротер (The mechanical brain. Strother W. L.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 10, 737—738 (англ.)

В общем виде составлена программа для решения уравнения $x^3+2x^2+1=0$ на цифровой вычислительной машине и показаны преимущества использования таких машин для решения подобных задач.

А. Н. Чуйкин

1015. Опыт эксплуатации вычислительных машин Англии (Computer experience in Britain), Process Control and Automat., 1957, **4**, № 11, 424—425 (англ.)

Проводится анализ работы вычислительных машин, выпускаемых заводом фирмы ИБМ в Грилоке (Англия). В Англии работает 5 машин ИБМ-650, выпущенных этим заводом.

Компания «Роллс-Ройс» еще в 1955 г. установила машину ИБМ-650, на которой проводятся расчеты по конструированию самолетов, двигателей, ракет, атомные исследования и т. д. Машина работает в три смены и в течение 26 недель работала по 145 час. в неделю. Простои из-за неисправностей составили около 38 мин. в неделю. За 11 000 час. работы потребовалась лишь 1 регулировка вследствие необнаруженной ошибки; ни один из германиевых диодов, которых в машине более 5000, не вышел из строя, и лишь 32 лампы потребовали замены.

После успеха эксплуатации первой машины компания «Роллс-Ройс» устанавливает новую машину ИБМ-650, состоящую из 12 блоков. Машина имеет печатающее устройство на 150 строк в мин., быстродействующую память на магнитных сердечниках и 4 блока магнитной ленты; с каждого из этих последних можно считывать и на каждый можно записывать по 15000 цифр в 1 сек.

Такую же машину установила компания «Империал Кемикл Индастриз». Организация «Юнайтед Кингдом Атомик Энерджи Ауторити» устансвила машину ИБМ-704, которая работает по 60 час. в неделю и, несмотря на большие размеры (22 блока), простой машины из-за неполадок составил за 20 недель лишь около 1 часа в неделю.

О. В. Бачин

1016. Обзор фирм, использующих или заказавших цифровые вычислительные машины. Педдер, Педдер (Survey of digital computer users and orders. Pedder D. G., Pedder R.), Automat. and Automatic Equipm. News, 1958, **3**, № 8, 427—431 (англ.)

Обзор охватывает производство вычислительных машин в Великобритании с 1951 г. и имеющиеся в настоящее время заказы на вычислительные машины со сроком поставки до 1959 г., а также имеющиеся в Великобритании вычислительные машины иностранного производства.

В таблицах для основных фирм, производителей вычислительных машин, приводятся названия машин, названия фирм или организаций, заказавших машину, срок поставки и назначение машины.

Фирма «Лео Компьютер» (Leo Computers Ltd), кроме машины ЛЕО I, вступившей в действие в 1953 г., выпускает машины ЛЕО II, из которых одна пущена в действие в июне 1957 г., а четыре намечалось поставить в 1958 г. Основное назначение машин — конторская работа.

Объединение «Националь-Эллиотт» (National Cash Register Company Ltd and Elliott Brothers Ltd), начав с выпуска в 1952 г. машины «Эллиотт-Никслас», в 1953 г. — «Эллиотт-Экклес» и «Эллиотт-401», в 1955—56 гг. выпустило машину «Эллиотт-403» и 4 машины «Эллиотт-402», из которых 1 поставлена в Австралию. Заказано 2 машины «Эллиот-402F», из них 1 для Германии. В настоящее время выпущено и находится в производстве 26 машин «Националь-Эллиотт-405» (National Elliott 405). Выполняются заказы для Франции, Германии и Японии. Машины в основном используются для конторских работ.

Фирма «Бритиш Табулейтинг Машин» (British Tabulating Machine Co. Ltd), выпустив в 1955—56 гг. серию машин ГЭК-2М в количестве 3 штук, имеет заказы на 4 таких машины; из них одна заказана для Индии. В настоящее время выпускается машина ГЭК-4 (1201). В 1957—58 гг. должно быть поставлено 25 машин этой

серии, в том числе 2 машины для Южной Африки и одна для Ирландии.

Фирма «Пауэрс-Самас» (Powers-Samas Ltd) выпускает и принимает заказы на машину PCC. Общее число выпущенных и заказанных машин равно 14, причем приняты заказы на поставку машин во Францию, Австралию и Швецию.

Отделение фирмы ИБМ (IBM United Kingdom Ltd) выпускает те же машины, что и американская фирма. В Великобритании выпущено 4 машины ИБМ-604, 2 машины ИБМ-626, 8 машин ИБМ-650 (из них одна для Стокгольма) и одна машина ИБМ-704.

Фирма «Инглиш Электрик» (English Electric Company Ltd) выпускает машины ДЭЮКЕ в основном для научных и технических расчетов. Всего выпущено 13 машин, одна из которых выполнена для Австралии.

Заказы на 1 машину EMI Payroll Computer и на 4 машины ЭМИДЕК (EMIDEC) приняла фирма ЭМИ (EMI Electronics Ltd).

Фирма «Ферранти» (Ferranti Ltd) в 1951 г. выпустила 2 машины МАРК I, за период 1954—1957 гг. — 4 машины «МАРК-I-Стар» и имеет заказы на 3 машины «МАРК-I-Стар». В 1956 г. начат выпуск серии машин «Пегас»; их выпуск в 1958 г. достигнет 19 машин. Фирма приняла заказы на 2 системы обработки данных «Пегас», в которые, кроме машины «Пегас», входит управляющее устройство на магнитной ленте, 4 (или 5) запоминающих устройств на магнитной ленте, преобразователь, перфоратор и контрольник и быстродействующее печатающее устройство.

Приняты заказы на поставку 10 машин «Меркурий», в том числе в Норвегию, Францию и Швейцарию. Машина «Меркурий» предназначена в основном для ядерных исследований. Швецией и Южной Африкой заказаны 2 машины модели «Персей».

Из остальных машин в Великобритании с 1949 г. работает машина ЭДСАК I; с 1951 г. — экспериментальная модель АКЕ (ACE Pilot Model); с 1952 г. — МОЗАИК и АПЕ(Р)К(APE(R)C). В 1956—1958 гг. в Великобритании вступили в строй либо заказаны машины АКЕ (ACE). «Метровик-950» (Metrovick 950), УНИВАК II, ЭДСАК II, транзисторная машина «Харвелл» (Harwell Transistor Computer) и др. О. В. Бачин

1017. Кибернетизация импульсных регуляторов. Гжибовский, Вегжин (La cybernétisation des régulateurs à impulsion. Grzybowski J., Wegrzyn Et.), Mesures et contrôle industr., 1957, **22**, № 247, 1007—1009 (франц.; рез. англ.)

Обсуждаются результаты исследования системы регулирования температуры, функцию основного звена которой выполнял человек, смотрящий на электротермометр и регулирующий подводимую к нагревателю мощность. Задача заключалась в том, чтобы как можно скорее перейти от одного стабильного состояния к некоторому другому стабильному состоянию. Анализ соответствующих осциллограмм показывает, что подобное регулирование можно квалифицировать как прерывистое и нелинейное. Используя терминологию теории автоматического регулирования, можно сказать также, что человек в такой системе подобен импульсному регулятору с нелинейным усилением и нелинейными интервалами между импульсами. Эту величину усиления, также моменты появления импульсов человек устанавливает после нескольких попыток, причем с течением времени качество регулирования улучшается, приближаясь к оптимальному регулированию, определенному Ф. А. Фельдбаумом. Отмечается, что начальные участки кривых регулирования отличаются (в отдельных случаях даже очень сильно) у различных людей; однако по истечении определенного времени все эти кривые сходятся к единой форме, весьма близкой к оптимальному регулированию Фельдбаума.

Описывается модель регулятора, представляющая собой комбинацию гальванометра и набора пластин, которые в заданные моменты времени поднимаются с помощью соответствующего набора кулачков, укрепленных на общем валу. Если стрелка гальванометра располагается в данный момент времени над поднимающейся пластиной, последняя прижимает ее к неподвижному контакту, образуя импульс, длительность которого задается профилем кулачка. С помощью такой системы удается получить лучшее качество регулирования, чем с регуляторами обычного типа. А. В. Шилейко

1018. Использование электронной вычислительной машины для применения метода Монте-Карло к теории кодов. Коломбо (L'utilizzazione del calcolatore elettronico in un'applicazione del metodo Monte Carlo alla teoria delle code. Colombo Bruno), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, **3**, № 15, 1—7 (итал.)

1019. Цифровые вычислительные машины на основе электронных цепей. Бояндживу (Masini de calcul numeric pe bază de circuite electronice. Boiangiu D. D.), Gaz. mat. si fiz., 1957, **B8**, № 11, 567—574 (рум.)

Популярная статья.

1020. О цифровых электронных вычислительных машинах. Окадзаки Бундзи, Нихон буцури гаккайси, 1957, **12**, № 12, 569—583 (японск.)

1021. Электронная вычислительная машина БИЗМАК фирмы RCA. (Il calcolatore elettronico. BIZMAC della RCA), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, **3**, № 13, 26—27 (итал.)

1022. Электронная система обработки данных (Electronic data-processing system), Engineer, 1957, **203**, № 5289, 874—875 (англ.)

1023. Уравнения в квадрате. Шульц (Ekvationer i kvadrat. Schultz Lasse), Tekn. värld, 1956, **34**, № 7, 50 (шведск.)

Популярная заметка о шведских больших вычислительных машинах, построенных институтом «Чалмерс» (Chalmers) в Гётеборге.

1024. Специалисты по вычислительным машинам. Генеральная картотека на перфокартах. Беркли (Computer people: master file on punch cards. Berkeley Edmund C.), Computers and Automat., 1956, **5**, № 4, 20—22 (англ.)

Описана генеральная картотека специалистов по вычислительным машинам, которую ведет на перфокартах журнал «Computers and Automation» с 1955 г. Карты содержат имена и адреса специалистов.

1025. Электронная машина ИБМ-702 для обработки данных в коммерции. Баш, Буххольц, Рочестер (The IBM Type 702 an electronic data processing machine for business. Bashe C. J., Buchholz W., Rochester N.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1954, **1**, № 4, 149—169 (англ.)

Общее описание электронной счетно-аналитической машины ИБМ-702 с точки зрения программирования.

1026. О быстродействующих вычислительных машинах. Нихон буцури гаккайси, 1955, **10**, № 3, 63—71 (японск.)

1027. Принципы действия электронных счетчиков. Гото, Дэнки гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1954, **74**, № 9, 1090—1092 (японск.)

1028. Операции на электронных счетных машинах. Амэмия, Дэнки гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1954, **74**, № 10, 1282—1291 (японск.)

1029. Использование электронных вычислительных машин для практических целей. Гролингер (Use of electronic computers for business management. Groelinger Herbert J.), J. Industr. Engng, 1956, **7**, № 6, 295—299 (англ.)

Статья общего характера.

1030. Вычисления с помощью электроники. Клейн, Вильямс, Морган (Electronic counting. № 16. Digital automation. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1957, 30, № 2, 242—248 (англ.)

Статья общего характера.

1031. Адресные машины (Machines à adresser), Vie et productiv., 1957, 4, № 10, 37 (франц.)

1032. Быстродействующая система, обрабатывающая перфокарты для вычислительных машин при авиационной базе Нортон (Fastest card-handling system for computers at Norton Air Force Base), J. Mach. Account., 1957, 8, № 4, 27 (англ.)

На базе Нортон (Norton Air Force Base) установлена электронная многоканальная система «Кардатрон» (Cardatron) фирмы «Берроус» (Burroughs Corp.). Эта установка будет использоваться вместе с электронной цифровой вычислительной машиной «Дататрон» (той же фирмы) для выполнения инвентаризационной работы большого объема. «Кардатрон» представляет собой развитую систему вводного и выводного оборудования, дающую возможность обычным счетно-перфорационным машинам эффективно работать совместно с электронными вычислительными машинами. Установка «Кардатрон» позволяет использовать одновременно несколько счетно-перфорационных машин, благодаря чему они, несмотря на сравнительно низкую собственную скорость, могут успевать за быстродействующими электронными вычислительными машинами. Уже заказано 32 новые установки. Обычно система «Кардатрон» стоит 130 тыс. долл. и состоит из одного блока управления, двух вводных и двух выводных блоков. К одному блоку управления может быть придано до семи блоков ввода или вывода, которые можно в любой комбинации соединить с различными счетно-перфорационными устройствами. Запоминающие устройства на магнитных барабанах в «Кардатроне» исключают необходимость в сложных наборных панелях, обычных в счетно-перфорационных машинах. Информация, временно запасенная или запасаемая на барабанах, передается в «Дататрон» или из него за несколько миллисекунд.

«Кардатрон», устраняя ограничения скорости счетно-перфорационными машинами, позволяет выполнять на электронной вычислительной машине одновременно несколько программ. На базе Нортон, например, синхронные программы проверяют правильность запасаемых на 300 000 перфокарт инвентаризационных данных на сумму 3 млрд. долл. По мнению официальных лиц базы, после введения в действие «Кардатрона» будет сберегаться 50% времени обработки. В. А. Брик

1033. Электронный способ сортировки перфокарт, содержащих данные по полимерным соединениям. Нью (Electronically sorted punched cards for polymer compounding data. Neu Robert F.), Rubber World, 1957, 137, № 1, 84—90 (англ.)

Сообщается об опыте использования электронной статистической машины для сортировки перфокарт лабораторией «Энджей» (Enjay Laboratories, США). На перфокарты наносятся данные, характеризующие различные полимерные соединения. Для нахождения соединений, обладающих определенными качествами, все перфокарты пропускаются через электронную сортировочную машину, которая может просматривать 80 столбцов перфокарты одновременно, после чего отобранные перфокарты собираются в определенном кармане машины. Через машину могут проходить 450 карт в 1 мин. Чтобы машина выбирала только те перфокарты, которые содержат интересующие исследователя данные, перед началом работы производятся необходимые соединения на коммутационной доске. А. Н. Чуйкин

1034. Устройство для печати карт Фурье. Линек (Zařízení pro tisk Fourierových map. Línek Allan), Stroie zpracov. inform., 1956, № 4, 177—188 (чешск.; рез. русск., англ.)

Описывается машина, используемая для расчетов кристаллических структур. Машина состоит из двух отдельных частей. Первая часть производит расчет функции

$$\rho(x) = \sum_{h=0}^{15} A_h \cos 2\pi hx + \sum_{h=1}^{15} B_h \sin 2\pi hx,$$

вторая часть печатает полученные результаты в восьмеричной системе счисления на лентах, по которым можно легко построить карты Фурье для вычисления плотностей электронов в кристаллической решетке.

J. Klíř

1035. Табулятор «Самастроник» (Il samastronic), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, 3, № 17, 25 (итал.)

Короткое сообщение о выпуске фирмой «Пауэр-Самас» (Англия) нового табулятора «Самастроник» (РЖМат, 1958, 9351). Табулятор обрабатывает до 300 перфокарт в 1 мин. и производит печать данных по 140 знаков в строке со скоростью 300 строк в 1 мин.

А. В. Шилейко

1036. Метод перфорированных карточек. Хираяма, Кагаку-но рёики, Z. Japan Chem., 1954, 8, № 11, 24—35 (японск.)

1037. Конструирование эллиптических циркулей. Торопыгин Е. И., Изв. Томского политехн. ин-та, 1957, 85, 374—378

Описаны две конструкции эллиптического циркуля, разработанные автором и основанные на параллельном проектировании контура наклонного круглого диска на плоскость чертежа с последующим преобразованием подобия, так что сначала вычерчивается эллипс с требуемым отношением осей, затем эллипс с заданными осями. Вторая конструкция отличается от первой лишь некоторыми деталями, предназначенными для упрощения и улучшения работы прибора. Библ. 5 назв.

В. М. Брадис

1038. Прибор для графического дифференцирования. Дмитревский А. В., Азәрб. сәнае инст. сәрләри Тр. Азерб. индустр. ин-та, 1957, вып. 17, 143—146 (рез. азерб.)

Прибор позволяет по данному графику функции одного переменного строить по точкам график ее производной на том же чертеже. По форме прибор напоминает рейсшину и при работе допускает параллельный перенос по чертежной доске. Положение касательной в каждой точке данной кривой определяется особым стержнем прибора. Заданная кривая рассматривается через движущееся оптическое приспособление. Если оптическое приспособление расположено нормально к кривой, то она видна без излома. Угол поворота оптического приспособления равен углу наклона касательной к оси абсцисс в данной точке заданной кривой. Положение стержня позволяет строить соответствующие точки графика производной. В. М. Чернов

1039. Новый прибор для определения диаметра отверстия. Кагаку Асахи, 1955, 15, № 4, 101 (японск.)

1040. Дифференциальный анализатор. Норимацу, Дэнки гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Engrs. Japan, 1954, 74, № 11, 1423—1433 (японск.)

1041. Счетная линейка, используемая в химической промышленности. Кагаку когё, Chem. Ind. (Tokyo), 1955, 6, № 5, 423 (японск.)

1042. Пантономограф. Камагата, Кагаку Асахи, 1955, 15, № 4, 52—53 (японск.)

1043. Об арифмометре. Хасира, Кагаку, 1955, 25, № 2, 31—32 (японск.)

1044. Новости [машинного перевода] (News), Mech. Translat., 1956, 3, № 3, 71—72 (англ.)

Приведены сообщения о работах в области машинного перевода в разных странах. В СССР журнал «Вопросы языкознания» начал печатать серию статей по этому вопросу. Исследовательская лингвистическая группа Кембриджского университета (Англия) получила годовую субсидию от Национального научного фонда США. Основной упор делается на разработку логико-математических методов и издание трудов. Очередная ежегодная конференция в Институте языка и лингвистики Джорджтаунского университета (Вашингтон, США) была посвящена вопросам машинного перевода. Сообщается о работах Чеккато (Ceccato Silvio, Италия). В университете штата Вашингтон (США) к марту 1957 г. закончена работа по составлению краткого словаря для машинного перевода с русского языка на английский. Было исследовано 111 русских технических текстов, относящихся к 31 отрасли науки, и выделено около 14 тыс. слов и групп. Полный машинный словарь должен содержать до 160 тыс. слов и групп. Указывается, что на очереди стоит создание специализированной машины для перевода. Сообщается об опытах машинного перевода в Калифорнийском технологическом институте (США). А. А. Крупский

1045. Синтаксические структуры в английском языке, изучаемые при помощи электронной вычислительной машины (Syntax patterns in English studied by electronic computer), Computers and Automat., 1957, 6, № 7, 15—17, 32 (англ.)

Национальное бюро стандартов в Вашингтоне производило статистический подсчет наиболее распространенных синтаксических структур (syntax patterns) английского языка при помощи электронной вычислительной машины СЕАК. Было рассмотрено 550 предложений, взятых из научных текстов.

Предложения кодировались следующим образом: 1 — подлежащее, 2 — дополнение, 3 — именная часть сказуемого (predicate nominative), 4 — определение, 5 — обстоятельство, 6 — глагол. Цифры от 1 до 5 в сочетании с буквой *A* кодируют лексическую единицу, с буквой *B* — словосочетание (phrase), с *C* — придаточное предложение. Цифра 6 в сочетании с этими буквами кодирует смысловой, вспомогательный и модальный глаголы. Элементы, не влияющие на структуру предложения (обособления, приложения, союзы), не кодировались. Также не принимались во внимание те элементы, которые лишь модифицировали уже закодированные *B* или *C*. Например, 1A, 6B, 6A —5B— We are living in a world of expanding parameters.

Здесь словосочетание «of expanding parameters» не кодировалось, так как оно модифицирует предыдущий элемент *B*. При статическом подсчете буквы не использовались; поэтому приведенное английское предложение кодируется как 1665.

Кодирование производилось вручную, так как машина на данном этапе не способна, например, произвести выбор среди различных интерпретаций омонимичных выражений в ограниченном контексте. Авторы указывают, что наделение машины такими особенностями и является одной из конечных целей работ, подобных реферируемой (по-видимому, хотя авторы об этом прямо не говорят, при кодировании неизбежна известная субъективность). При этом машина обладает способностью отбрасывать ошибочно закодированные структуры. Эта интересная способность машины, к сожалению, не раскрывается подробнее.

СЕАК имеет 11 шестнадцатеричных разрядов в одной ячейке. Из них 9 отводятся под кодирование структуры, а 2 — под подсчет. Разряды, которые не заполняются числами кода или подсчета, заполняются нулями. Вышеприведенное предложение поступает в машину в виде 16650000000. Если в машине есть ячейка, первые 9 разрядов содержимого которой совпадают с первыми 9 разрядами вводимой структуры (это означает, что предложение с такой структурой встречалось раньше), то к конечному разряду прибавляется цифра 1. Если такой ячейки нет, то вводимая структура поступает в хранение.

Когда все предложения пропущены через машину, машина выдает следующую информацию: 1) окончательные (различные между собой) структуры; 2) число предложений, пропущенных через машину; 3) число предложений, отброшенных машиной из-за ошибок в кодировании; 4) число структур различной длины (длина определяется количеством чисел, которыми структура записывается).

После каждых 50 предложений СЕАК отпечатывает количество пропущенных через машину предложений и количество хранимых окончательных структур.

Из 550 предложений было получено 335 структур. Приведены графики, показывающие соотношение числа предложений и числа структур. Следующие структуры встречались наибольшее количество раз: 41 665 (например, «The dog has run across the street») — 12 раз; 414665 (например, «The dog with floppy ears has run across the street») — 12 раз; 16434 (например, «This is a dog with floppy ears») — 11 раз; 162 (например, «Dogs eat bones») — 10 раз.

Аналогичные подсчеты были проведены для структур, подвергнутых сжатию. Сжатие состоит в том, что если какое-нибудь кодовое число в структуре встретилось два раза подряд, то оно записывается один раз; 44416665500 сжимается, таким образом, в 41650000000. В результате было получено 189 сжатых структур, из которых наиболее часто встречаются следующие:

Процент	Структура	Пример
12,5	4165	The dog ran across the street.
9,2	4165	The dog with floppy ears ran across the street.
8,0	165	He ran across the street.
5,5	416424	The dog ate the bone which he had dug up.
5,0	165	Dogs eat bones.

Приведены 4 графика, показывающие распределение в зависимости от длины структуры (отдельно для сжатых и не сжатых структур) следующих величин: а) число введенных предложений со структурами данной длины; б) число получившихся различных структур данной длины. Графики обнаруживают грубое приближение к нормальному гауссовому распределению.

Такие исследования могут пролить свет на способы структурной трансформации внутри английского языка, которая может применяться для машинного перевода (трансформация английских фраз в форму, наиболее удобную для машины). Электронные вычислительные машины оказываются весьма удобными для проведения подобного рода исследований. Машине потребовалось 30 мин. для анализа всех рассмотренных предложений. Б. А. Успенский, В. А. Успенский

1046. Перевод с помощью машины. Гроган (Translation by machine. Grogan D. J.), Scope, 1957, Sept., 38—39, 70—71 (англ.)

Описываются принципы автоматического перевода с помощью вычислительных машин и состояние разработок этого вопроса в различных странах. В качестве примера, поясняющего важность автоматического перевода, приводится стоимость перевода 1 страницы на английский язык: с немецкого — 7,5 шиллинга, с русского — 19 шиллингов, с японского — 54 шиллинга. Отмечается, что в настоящее время близка к полному решению задача машинного чтения с листа. Рассматривается опыт автоматического перевода с английского языка на рус-

ский, выполненный в СССР на машине БЭСМ. В Биркбекском колледже (Лондон, Англия) был поставлен опыт машинного перевода с русского языка на английский. Переводились отрывки из советских научно-технических журналов (в частности, из «Докладов АН СССР»). Д-р Бут (Booth) ожидает, что на машине колледжа будет в конце концов получена средняя скорость перевода 3000 слов в 1 час. А. А. Крупский

1047. Организация и метод работы по механическому переводу. Достерт (Organization and method in mechanical translation work. Dostert L. E.), Mech. Translat., 1956, **3**, № 2, 35 (англ.)

В основу организации и ориентации работ положены некоторые постулаты, сводящиеся к тому, что задача перевода есть задача установления соответствия между двумя системами знаков (исходный и конечный языки); так как языки используют неполную и иногда многозначную систему символов, то эту систему следует дополнить некоторыми специальными указаниями, которые позволяли бы получать правильный перевод и были удобны для программирования. Работы в Джорджтауне предполагается вести в области научных текстов, рассматривая три круга вопросов: лексику, морфологию и синтаксис. Отдельные группы лингвистов, занимающиеся частными проблемами, собираются и обсуждают работы на семинаре, в котором участвуют также специалисты по технике, логике, математике. О. С. Кулагина

1048. Перевод при помощи машин. Пенфилд (Language translation by machine. Penfield Paul, Jr), Tech Engng News, 1956, **38**, № 1, 30—31 (англ.)

По мнению автора, машины будут использованы в первую очередь для перевода текстов технического и научного характера, причем особенно желательно разработать правила русско-английского и немецко-английского перевода. Указывая на неприемлемость пословного перевода, автор отмечает, что для получения удовлетворительного перевода потребуется создать специальный словарь, правила выбора нужных значений для многозначных слов, специальные грамматические правила. О. С. Кулагина

1049. Исследования по механическому переводу в Массачусетском технологическом институте. Ингве (Mechanical translation research at MIT. Yngve Victor H.), Mech. Translat., 1956, № 2, 44—45 (англ.)

В Массачусетском технологическом институте разрабатываются (Бар-Хиллелом и др.) специальные правила расстановки слов перевода, основанные на правилах анализа структуры переводимого предложения. Этот анализ структуры часто позволяет попутно выбрать правильные переводы некоторых многозначных слов. Для создания правил анализа нужно иметь точное описание существующих структур предложений. Отмечается, что в существующих грамматиках немецкого языка (на почве перевода с которого возникли указанные работы) такого описания сделано не было.

О. С. Кулагина

1050. Работа по механическому переводу в Мичиганском университете. Куцудас, Макол (Mechanical translation work at the University of Michigan. Koutsoudas A., Machol R.), Mech. Translat., 1956, **3**, № 2, 34, 41 (англ.)

Отличие работ по механическому переводу, ведущихся в Мичиганском университете, от работ, ведущихся в других местах, состоит в том значении, которое придается проблеме многозначности слов и в подходе к ее решению. Для установления нужного значения слова используется специальный словарь многозначных слов, в котором различные переводы одного слова расположены в определенном порядке, позволяющем правильно выбирать перевод, используя контекст. Ведутся, кроме того, работы по составлению правил перевода с русского языка на английский, а также работы по статистике слов. В целях облегчения конструирования устройств, читающих печатный текст, предлагается стандартизировать шрифт для всех технических публикаций (см. также реф. 1051). О. С. Кулагина

1051. Механический перевод и проблема многозначности. Куцудас, Корфхаге (Mechanical translation and the problem of multiple meaning. Koutsoudas A., Korfhage R.), Mech. Translat., 1956, **3**, № 2, 46—51 (англ.)

Рассказывается о работах по механическому переводу, ведущихся в Мичиганском университете с 1955 г. Разрабатываются правила перевода с русского языка на английский для физических текстов. Описывается разработанный метод выбора правильного значения многозначного слова. Значения многозначных слов нумеруются в словаре в определенной последовательности, причем иногда некоторые значения повторяются, иногда вводятся нулевые значения. Для выбора нужного значения отыскивается ближайшее к многозначному однозначное слово и анализируются возникающие при этом последовательности в 1, 2, 3 или 4 многозначных слова; отмечается, что более 4 многозначных слов подряд не встречалось. В следующих двух случаях для всех слов последовательности берутся значения с номером M (где M — минимум числа значений для слов рассматриваемой последовательности): 1) среди значений с номером M нет нулевых; 2) в последовательности из 3 или 4 слов второе слово имеет M-е значение, отличное от нулевого, а все остальные слова — нулевые значения. Если указанные случаи не имеют места, то берутся значения с номером $M-1$ в тех же условиях и т. д. При описанной системе не требуется специального словаря идиом, которые обрабатываются по правилам многозначных слов. Проблема многозначности сводится к установлению порядка значений. Указывается, что алгоритм упорядочивания значений не установлен (в опытах действовали подбором), и вопрос об изменении порядка значений при добавлении новых слов или новых значений не разработан. Приводится пример перевода куска текста, составленный для него словарь и правила, с помощью которых получен перевод. О. С. Кулагина

1052. Отчет об исследованиях. Кембриджское объединение по изучению языка, Кембридж, Англия (Report on research. Cambridge language research unit, Cambridge, England), Mech. Translat., 1956, **3**, № 2, 36—37 (англ.)

Статья распадается на четыре кратких сообщения по вопросам машинного перевода. Мастерман (M. Masterman) пишет об устройстве и использовании специальных словарей для перевода со многих языков на многие; Паркер—Родс (A. F. Parker—Rhodes) — о методах кодирования информации (коды слов и характеристики контекста), поступающей в машину; Халлиди (M. A. K. Halliday) — о лингвистических основах устройства особых словарей для машинного перевода типа толковых словарей (для многозначных слов указывается, в каком контексте используется то или иное значение); Риченс (R. H. Richens) — об использовании при переводе с одного языка на другой промежуточного упрощенного языка, к которому любой язык может быть приведен по определенным правилам. Преобразование кодов этого промежуточного языка не зависит от исходного и конечного языков. О. С. Кулагина

1053. Стохастические методы машинного перевода. Кинг (Stochastic methods of mechanical translation. King Gilbert W.), Mech. Translat., 1956, **3**, № 2, 38—39 (англ.)

Описывается несколько способов выбора значений многозначных слов. Один из них — приписывание однозначным словам и значениям многозначных слов пометки о принадлежности к определенной области и уста-

новление для текста области, из которой он взят (область с максимальным числом представителей). В таком случае для многозначных слов берутся значения, характерные для данной области. Другой способ — составление правил анализа контекста. Третий способ — включение в словарь не только отдельных слов, но и групп слов-сочетаний, в которых многозначные слова становятся однозначными. Этот способ лимитируется объемом памяти. Для установления того, какие именно сочетания включать в словарь, требуется провести подсчет частот различных словосочетаний. Отмечается, что особенно затрудняют перевод неспециальные слова (французские de, que) со множеством значений. Сочетание указанных выше способов и выбор наиболее вероятного значения слова, когда эти способы неприменимы, позволяет получить в большинстве случаев удачный перевод. В качестве примера рассматривается французский предлог de, для которого указан процент случаев, когда тот или иной способ дает правильный результат.

О. С. Кулагина

1054. Механический перевод. Ингве (Mechanical translation. Yngve Victor H.), Kagaku, 1955, **25**, № 1, 23—26 (японск.)

1055. Лингвистическая основа механического словаря. Халлиди (The linguistic basis of a mechanical thesaurus. Halliday M. A. K.), Mech. Translat., 1956, **3**, № 3, 81—88 (англ.)

1056 К. Терминология вычислительных машин и приборов. М., АН СССР, 1957, 16 стр., 65 к.

1057 К. Механизация учета и вычислительных работ. Ред. Помазков Н. С. (Ленингр. обл. правл. Научно-техн. о-ва машиностроит. пром-сти, кн. 44). М.—Л., Машгиз, 1958, 207 стр., илл., 6 р. 60 к.

1058 К. Вычислительная лаборатория в университете. ty. Ed. Hammer Preston C. Madison, Univ. Wisc. **Хаммер** (The computing laboratory in the universi-Press, 1957, 251 pp., ill., 6.50 doll.), Publishers' Weekly, 1957, 172, № 14, 78 (англ.)

1059 К. Введение в автоматические вычислительные машины. Чейпин (An introduction to automatic computers. Chapin Ned. Princeton, N. J., Van Nostrand, 1957, 533 pp., ill., 8.75 doll.) Publishers' Weekly, 1957, 172, № 26, 80 (англ.)

1060 П. Логарифмический счетный прибор. Наттеродт (Logarithmisches Rechengerät. Natterodt Martin). Пат. ГДР, кл. 42 m, 33/02, № 11855, 23.07.56

Предлагается счетный прибор следующего устройства. На опоре с началом отсчета помещены на одной оси круг и прозрачная стрелка с чертой; круг и стрелка вращаются независимо друг от друга. На круге произвольными радиусами нанесены 4 концентрические окружности. На первой от центра окружности помещена логарифмическая шкала с метками от 1 до 2, на второй — от 2 до 4, на третьей — от 4 до 8 и на части четвертой — от 8 до 10. Вторая, третья и четвертая окружности размечены так, что против каждой метки первой окружности находятся: на второй окружности метка вдвое, на третьей — вчетверо и на четвертой — в восемь раз большая. Метки 1, 2, 4 и 8 соединены основной линией «1»; метки 1,25, 2,5, 5 и 10 — основной линией «10». Перед началом умножения и деления стрелка устанавливается в начале отсчета и определяется та окружность, на которой будет находиться результат.

В. М. Чернов

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

1061. Новая система комплексной обработки данных фирмы UARCO (New UARCO IDP system), J. Mach. Account., 1958, **9**, № 1, 22—23 (англ.)

Сообщение фирмы UARCO о введении в действие системы комплексной обработки данных, позволяющей облегчить работу 600 агентам, занимающимся сбытом продукции. Введение системы устраняет дублирование работы, связанное с ведением счетов на заводах и в правлении фирмы, и ошибки, связанные с этим дублированием.

Система UARCO обеспечивает централизацию счетной работы, большую скорость счета, почти мгновенное суммирование всех счетов и анализ положения, уменьшение обслуживающего персонала, более быстрое и точное обслуживание клиентов. Заказ печатается на машине ИБМ-884, на которой одновременно приготовляется лента, содержащая счетную и статистическую информацию. На перфораторе ИБМ-046 информация переводится с ленты на перфокарты. Окончательная обработка информации производится на машине ИБМ-402. В настоящее время этой системой пользуются 2 завода фирмы, но предполагается перевод на эту систему всех заводов фирмы.

О. В. Бачин

1062. Системы отличительных признаков банковских счетов для автоматической обработки данных. Эттингер (Account identification for automatic data processing. Oettinger Anthony G.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 3, 245—253 (англ.)

Описываются системы кодирования отличительных признаков банковских счетов. Принятая в настоящее время практика использования в качестве отличительного признака фамилии владельца счета или названия фирмы оказывается неудобной для автоматической обработки данных, так как подобные признаки содержат большое количество избыточной информации. С другой стороны, использование в качестве признаков порядковых номеров также в ряде случаев оказывается неудовлетворительным, так как отличительный признак счета должен содержать определенное количество дополнительной информации о его владельце (фирма или частное лицо и т. п.). В статье исследуются оптимальные способы кодирования признаков для случаев автоматической сортировки и классификации документов при минимальном объеме требуемой памяти; рассматривается оптимальный способ кодирования, учитывающий изменения общего количества счетов, и самопроверяющиеся коды. Библ. 5 назв.

А. В. Шилейко

1063. Целесообразно ли применение вычислительных машин? (Considering a computer?), Storage, 1957, **1**, № 6, 25—26 (англ.)

Обсуждается вопрос о целесообразности применения цифровых вычислительных машин для организации снабжения промышленного предприятия. Отмечается, что первоначальные капиталовложения на установку машины и эксплуатационные расходы чрезвычайно велики. Однако основа рентабельности состоит не в сокращении штата, а в уменьшении противостоящих друг другу убытков — производственных потерь из-за нехватки сырья и потерь, обусловленных «замораживанием» капитала. Последнее имеет в виду сведение к минимуму хранение на складах сырья и полуфабрикатов, необходимых для гарантии непрерывного процесса производства, а также готовых изделий. Роль вычислительных машин на производственном предприятии заключается в разрешении противоречивых требований финансирования и производства. В качестве примера отмечаются удовлетворительные результаты использования для подобных целей цифровой вычислительной машины ГЭК.

Е. М. Баскаков

1064. Два ответа при обработке данных для фирмы «Компьютерама» на вычислительной системе «УНИВАК-файл». Акссмит (2 data-processing answers for Computerama Company with UNIVAC® file-computer system. Axsmith D. J.), J. Mach. Account., 1957, **8**, № 10, 57—65 (англ.)

Дается обзор нескольких схем взаимодействия устройств вычислительной системы «УНИВАК-файл» при среднем и большом объемах вычислений. При среднем объеме вычислений рассматриваются схемы обработки: приказов ежедневной продажи с их анализом, кассовых отчетов, карт поступления денежных доходов и др. При большом объеме вычислений приводятся схемы для обработки кассовых отчетов и приказов продажи, для анализа продажи товаров, получения инвентаризации товаров за неделю и квартального анализа прибыли. В первом случае используется главным образом перфокарточное оборудование, во втором — наряду с перфокартами широко применяется магнитная лента. Для каждого разреза обработки данных имеется схема, на которой стрелками указана последовательность передачи данных от одного устройства к другому.

М. С. Саплин

1065. Электронные машины для обработки данных и их применение в промышленности и науке. Ледоховский (Máquinas electrónicas de sistematización de datos y sus aplicaciones industriales y científicas. Ledochowski José Santa María), Dyna, 1957, **32**, № 3, 134—141 (исп.)

Популярная статья. Обсуждаются возможности цифровых вычислительных машин в решении научных и технических задач и методика постановки и программирования задачи на машине.

О. В. Бачин

1066. Контроль за производством и учетом на машине ИБМ-650. Дорси (Production and accounting control on IBM 650. Dorsey Thomas), J. Mach. Account., 1957, **8**, № 10, 93—105 (англ.)

Дается обзор работы вычислительной машины среднего размера ИБМ-650 с магнитным барабаном емкостью на 20 000 цифр, используемой фирмой «Катерпиллар трактор» (Caterpillar tractor Co.). На заводах фирмы работает около 4600 рабочих. На машине выполнялись такие работы, как расчет числа часов работы машины и человека, потребных для выполнения плана, ежедневная производительность труда, расчет стоимости, зарплаты, распределения труда, инвентаризация товаров и др.

Машина проработала 2448 час., включая время на проверку программы и обслуживание, с высокой надежностью.

В начале 1958 г. предполагалось получить вторую машину ИБМ-650 с памятью на магнитной ленте и дисках.

М. С. Саплин

1067. Конторская работа в СССР на пути механизации (Il lavoro d'ufficio nell'URSS in via di meccanizzazione), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, **3**, № 17, 26—27 (итал.)

Приводится краткий обзор использования в СССР электромеханических и электронных вычислительных машин для целей механизации конторских работ.

А. В. Шилейко

1068. Описание коммутации машины 407 EAM для перевода кодов классов членских взносов по подписке. Франческини (Descrizione delle connossioni per tradurre i codici di classe in quote di sottoscrizione con la 407 EAM. Franceschini Walter), Schede perf. e calcolo elettron., 1957, **3**, № 17, 19—21 (итал.)

Описываются схемы коммутации табулятора 407 EAM для расчета членских взносов по подписке.

А. В. Шилейко

1069. Решение при помощи машины ГАММА с запоминающим устройством на магнитном барабане. Бурнонвиль (Solution au moyen du GAMMA à tambour magnétique. Bournonville L. de), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 299—301 (франц.)

Рассматривается вариант выполнения расчета страховой премии и ренты с помощью вычислительной машины ГАММА фирмы «Буль» (Франция). Приводятся основные формулы и блок-схема программы вычислений.

А. В. Шилейко

1070. Расчет на цифровой вычислительной машине стабильности в переходном режиме. Габбард, Роу (Digital computation of transient stability. Gabbard J. L., Jr, Rowe J. E.), Electr. Engng, 1957, **76**, № 10, 871 (англ.)

Коротко описывается блок-схема программы для решения на цифровой вычислительной машине уравнений электрической силовой системы, в которой критичными являются характеристики двигателя. Целью вычислений является определение стабильности системы в переходном режиме.

А. В. Шилейко

1071. Применение электронных вычислительных машин в коммерческих целях за рубежом. Лемк (Foreign business application of computers. Lemke B. C.), J. Mach. Account., 1958, **9**, № 2, 6—9, 32—33 (англ.)

Приводится обзор коммерческого применения вычислительных машин в Западной Европе, относящийся к середине 1956 г. Научное и военное применение вычислительных машин не рассматривается. Наиболее подробно рассмотрена история и перспективы применения вычислительных машин в Великобритании. Дается перечень фирм, выпускающих вычислительные машины, фирм, предполагающих выпуск машин, а также даются краткие характеристики основных типов машин.

В последнее время наблюдается установление более тесных контактов фирм, производящих вычислительные машины, с фирмами-потребителями. Так, в середине 1956 г. было объявлено о заключении соглашения между фирмой «Эллиотт» (Elliott Brothers London Ltd), производящей машины «Эллиотт-405» (Elliott 405), и фирмой «Нэйшнал Кэш Реджистер» (National Cash Register Co.), по которому бумажная лента, на которой дают результаты аппараты фирмы NCR, может быть подана на вход машины «Эллиотт-405», что облегчит обработку информации.

Появляются и международные объединения, такие как «Оливетти-Булль», являющаяся объединением для продажи вычислительных машин фирмами «Compagnie des Machines Bull» и «Ollivetti». Наметился тесный контакт фирмы «British Tabulating Machine» с американскими фирмами.

В Западной Европе имеется обширный рынок для американских вычислительных машин, помимо уже имеющегося большого количества счетного оборудования и машин, работающих на перфокартах американского образца, однако ввоз машины в Европу экономически не выгоден, а более целесообразным является вложение американских капиталов в заводы, расположенные в Европе.

О. В. Бачин

1072. Финансовый и бюджетный расчеты с использованием машины ИБМ-305 РАМАК. Армстронг (Appropriation and budgetary accounting utilizing the IBM 305 RAMAC. Armstrong Robert W.), J. Mach. Account., 1957, **8**, № 10, 204—207 (англ.)

Отмечается, что успешное административное управление современным городом зависит от эффективности средств связи. Машина 305 РАМАК улучшает связь потому, что позволяет сопоставить данные за прошлый период с текущими расходами в счетах, обеспечивает печатный ответ менее чем за 1 сек. по любому запросу с помощью электронной справочной станции, выбирает и информирует о превышении расходов на 110% по сравнению с предыдущим периодом, содействует анализу докладов финансовых органов. Финансовый расчет с помощью машины обеспечивает немедленный доступ к любому счету, непрерывный учет балансов, извлечение и автоматическое преобразование данных счета в любой эффективно используемый код.

Ни одна из существующих машин не объединяет все эти преимущества. Огромная память и полная гибкость машины в комбинации с программным управлением обеспечивают решение сложных технических задач. Программа обеспечивает подробное выполнение всех операций при финансовом и бюджетном расчетах.

Исходная информация вводится в машину с помощью перфокарт, на которых содержится код операции, код счета, номер продавца, номер товара и его количество и многие другие данные. Каждому счету приписывается адрес в памяти на дисках, причем на запись отводится 200 знаков. Эта запись подразделяется на две равные части по 100 знаков каждая. Первая часть содержит все существенные данные, необходимые для нормальных ежедневных операций. Вторая часть содержит данные, которые используются редко.

Если отвести 200 знаков на одну запись, то при 10 000 видов записи память на магнитных дисках будет занята только на 40%. М. С. Саплин

1073. Вычислительная система УНИВАК для контроля материалов. Суонсон (A UNIVAC material control system. Swanson Wesley A.), J. Mach. Account., 1957, 8, № 10, 84—87 (англ.)

В течение 2 лет фирма «Дженерал Электрик» использует вычислительную машину для контроля материалов. Система контроля в своей основе не отличается от ручной системы, применяемой в промышленности, и призвана улучшить и облегчить работу служащих по учету материалов. Вычислительная система разделяет производственный план по срокам требуемых покупных материалов, подготовляет планы поступления материалов для продавца, сравнивает действительную инвентаризационную сводку с требуемой, составляет доклад критической нехватки материала на основе дневной потребности.

Для выполнения этих работ материалы записываются на магнитную ленту. Запись переменной длины и содержит потребное время доставки материала на фабрику, частоту поставок, код поставщика и порядковый номер покупки, код лица, проверяющего товар, стоимость, инвентаризационный баланс и др. Список материалов содержит около 5000 наименований. Изменения в списке, получения, остатки и другие сделки, влияющие на инвентаризацию, поступают почтой ежедневно. Каждую неделю составляются инвентаризационный список и план поступления товаров для продавцов.

С помощью машины составляется много других документов.

Система в процессе эксплуатации подвергалась небольшим изменениям, но в целом работала эффективно. Поэтому контроль материалов решили полностью производить с помощью вычислительной машины.

М. С. Саплин

1074. Прибор для управления огнем на самолете. Пфистер, Бьюдер (Airborne fire-controller. Pfister Robert C., Buder E. Edward), Control Engng, 1957, **4**, № 9, 138—140 (англ.)

Дается постановка задачи стрельбы с самолета по воздушной цели и рассматриваются кинематические и баллистические поправки, которые необходимо рассчитать и ввести для точного определения угла упреждения и азимута. Указывается, что полное решение этой задачи вызывает необходимость применения громоздкой быстродействующей вычислительной машины дискретного действия. Поэтому, применяя машину дискретного действия, целесообразно на земле отработать уравнение, учитывающее лишь начальные скорости самолетов и снаряда, но дающее достаточно точное решение задачи стрельбы, а на самолете поставить специализированную машину непрерывного действия для решения этого уравнения. Приводится блок-схема такой машины. А. Н. Чуйкин

1075. Мозг, управляющий межконтинентальной баллистической ракетой, корректирует ее положение (Brain to guide an ICBM gets its I. Q. tested), Business Week, 1957, № 1463, 54—56, 58, 61—62 (англ.)

Сообщается о том, что фирма «American Bosch Arme Corp.» затратила 2,25 млн. долл. на строительство лаборатории, которая занимается разработкой инерциальной системы навигации для межконтинентальной баллистической ракеты «Титан», а также рядом смежных вопросов. Рассматриваются условия, в которых будет находиться система навигации ракеты, летящей со скоростью 29 000 *км/час* к цели, отстоящей на 8000 *км* от места запуска. Имеется в виду, что ракета должна приземлиться на расстоянии не больше 8 *км* от места цели. Показывается, почему система навигации такой ракеты может быть только автономной и инерциальной. Рассматриваются три основных элемента инерциальной системы навигации: акселерометр, гироскоп и вычислительное устройство. Приводятся фотографии оборудования лаборатории. А. В. Шилейко

1076. Оценка новых элементов, оборудования и систем цифровых вычислительных машин для использования в военно-морских силах. Уайтлок (Evaluation of new computer components, equipments, and systems for naval use. Whitelock L. D.), Proc. East. Joint Computer Conf., 1957, № T—92, 9—12. Discuss., 12—13 (англ.)

Имеют место три направления в использовании цифровых вычислительных машин в военно-морских силах США: коммерция и снабжение, научные проблемы, непосредственное использование в военной технике на береговых установках и кораблях. Большой объем работ, постановка новых задач и предъявление жестких требований обуславливают введение значительного количества усовершенствований, касающихся элементов, оборудования и целых систем. Для облегчения оценки нововведений как заказчикам, так и поставщикам удобно применять метод сравнения по ряду важнейших факторов: назначение, исполнение, условия работы, сроки, технические возможности, обслуживание, цена. Рассмотрение каждого фактора производится по определенной схеме тщательно подобранных вопросов.

Далее отмечаются основные проблемы, обуславливающие успешное использование цифровых вычислительных машин в военно-морских силах: 1) достижение степени надежности, удовлетворяющей общим техническим требованиям в соответствии с принятыми методами испытаний; эта проблема будет разрешена заменой ламповых элементов элементами на полупроводниковых приборах и ферритах с применением опрессовки пластмассами (solid state), одновременно будут значительно снижены габариты и потребляемая мощность; 2) повышение скорости работы, которая должна характеризоваться временем сложения порядка 1 *мксек*; 3) осуществление питания матричных запоминающих устройств на ферритовых сердечниках от кристаллических триодов; 4) осуществление визуальной индикации; 5) разработка надежных высокоскоростных печатающих устройств на основе немеханических методов; 6) стандартизация.

В дискуссии по докладу отмечаются следующие моменты: релейные вычислительные машины отживают свой век и будут применяться как исключение; подтверждается, что вычислительные машины могут быть доведены до удовлетворения требований корабельного оборудования; сообщается о проведении исследовательских работ в целях замены металлических магнитных лент пластмассами. Е. М. Баскаков

1077. Нужны ли высококвалифицированные кадры в полностью автоматическом военно-морском флоте? Шиллинг (Is brain power needed in a pushbutton Navy? Shilling Charles W.), J. Amer. Soc. Naval Engrs., 1957, **69**, № 1, 71—75 (англ.)

Обсуждается вопрос о необходимости увеличения высококвалифицированных специалистов для использования их в военно-морском флоте (ВМФ) в связи с применением современных быстродействующих вычислительных устройств (б.в.у.).

Некоторые виды примитивных автоматических устройств находили применение еще в парусном ВМФ. С развитием и совершенствованием двигателей, техники оснащения и управления кораблем число автоматических устройств на его борту непрерывно увеличивалось. В настоящее время благодаря использованию современных б. в. у. может быть создан полностью автоматизированный боевой флот. Автор называет такой флот «кнопочным» (push-button Navy). Управляемые по радио военные корабли, вероятно, могут двигаться и стрелять либо вовсе без экипажа, либо с минимальным числом людей на борту. В связи с этим возникает вопрос: нужно ли увеличивать выпуск высококвалифицированных кадров для автоматического флота? Автор отвечает на этот вопрос утвердительно.

Для решения задач, связанных с вычислениями по ведению артогня, управлением пушками и движением корабля, вначале применялись вычислительные устройства моделирующего типа, которые сами по себе постепенно совершенствовались. Основное преимущество моделирующих вычислительных устройств — возможность решения задач в истинном масштабе времени, позволяющее использовать их в системе ВМФ и армейских частей даже для управления управляемыми снарядами («Снарк» и др.). Отмечается, что за последние 9 лет на разработку моделирующих устройств истрачено более 55 млн. долл. Построен военно-воздушный центр по испытанию управления полетом ракет (U. S. Naval Air Missile Test Center—NAMTC). На этом центре установлены сложнейшие машины — модели типа РАЙДАК (RAYDAC). Штат центра — 51 человек.

Десять лет назад появились цифровые вычислительные устройства типа ЭНИАК, выполняющие до 1 тыс. арифметических операций в 1 сек. С тех пор было выпущено по крайней мере около 100 новых типов больших электронных цифровых б.в.у. Скорость действия узлов ввода и выборки данных — от нескольких единиц до 10 000 знаков в 1 сек. Устройства памяти позволяют накапливать до нескольких миллионов знаков.

Начало использованию цифровых б.в.у. в ВМФ положило Бюро военно-технического снабжения США при решении задач Баллистической исследовательской лаборатории в Абердене и в военно-морском испытательном объединении в Далгрене. В настоящее время цифровые б.в.у. используют следующие организации, выполняющие заказы ВМФ:Испытательный бассейн Тейлора (The David Taylor Model Basin), имеющий два устройства типа УНИВАК и сконструировавший подводную лодку «Наутилус» с атомным двигателем, Корабельное бюро (The Bureau of Ships) и др. Многие исследования по разработке б.в.у. рекомендованы Управлением военно-морских исследований США. Для ВМФ сделаны навигационные таблицы системы «Лорон».

По характеру выполнения логических операций человеческий мозг сравнивается с современными б.в.у. Мозг содержит до 10^{10} нервных клеток, скорость передачи возбуждений к которым составляет 0,1÷0,2 *мсек*. Элементарная клетка мозга может воспринимать до 200 *имп/сек*. Работа клеток мозга аналогична работе 10 млрд. реле с двумя устойчивыми положениями, управляющими действием сердца, легких, двигательных, мыслительных и других центров. Число всех возможных комбинаций состояний ячеек мозга оценивается автором как 10^{10000}. Это во много раз превышает возможность современных б. в. у. Имеется также специфическая особенность работы мозга — возможность творческой переработки данных и получение принципиально новых решений задач, что не могут сделать б. в. у. Особенности клеток мозга по сравнению с ячейками б. в. у.: исключительная малогабаритность, ничтожно малое потребление энергии и надежность работы в течение всей жизни человека. Вследствие этих особенностей, как бы ни были в настоящее время совершенны б.в.у, все-таки они никогда не могут полностью заменить человеческого мозга.

Приводятся высказывания военно-морских руководителей и специалистов США, из которых следует, что развитие техники современных б. в. у. и применение их во все большем количестве в ВМФ требует непрерывного увеличения выпуска высококвалифицированных кадров.

В. С. Бородин

1078. Подход к конструированию самолетного цифрового вычислительного оборудования. Борон, Кинг (An approach to airborne digital computer equipment construction. Boron P. E., King E. N.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, **5**, № 6, 36—42 (англ.)

1079. БИЗМАК — электронный «мозг» на службе армии. Малкарни (Bizmac electronic brain joins the Army. Malcarney A. L.), Signal (USA), 1957, **12**, № 1, 24—25 (англ.)

В Главном управлении материального снабжения бронетанковых и мотомеханизированных войск США эксплуатируется новая электронная система для обработки данных БИЗМАК (BIZMAC). Система построена на базе цифровой вычислительной машины производства фирмы «RCA».

С помощью системы БИЗМАК была произведена полная инвентаризация материальных фондов в ряде отделов Управления. Процедура, требовавшая ранее до 3 месяцев работы, выполнялась за 48 час. машинного времени. В дальнейшем предполагается использовать машину для еще более сложных задач: перспективного планирования снабжения, диспетчерского оперативного контроля за движением основных материалов и деталей и т. д.

Указывается, что эксплуатация БИЗМАК фактически позволяет высвободить штат вычислителей в 400 человек. Благодаря системе использования и, в частности, ее запоминающим устройствам на магнитной ленте, объем бумажной документации Управления сокращается на 85%. Приводятся фото общего вида БИЗМАК и одного из пультов управления.

А. А. Крупский

1080. Анализ управления с помощью цифровой вычислительной машины. Хилл, Ли (Control analysis with a digital computer. Hill P. R., Lee W. Thad), Nucleonics, 1957, **15**, № 5, 61—63 (англ.)

Анализ управления ядерным реактором является одной из сложнейших и важнейших проблем при расчете реактора. Целью такого расчета является определение переходного процесса реактора в различных гипотетических случаях. Обычно эта задача решалась на моделирующих установках. В последнее время она была решена на цифровой вычислительной машине IBM-704 параллельно с решением на моделирующем устройстве. Оба результата сходятся между собой достаточно хорошо, однако цифровой метод решения имеет определенные преимущества, поскольку при введении новых параметров в моделирующее устройство требуется длительная процедура проверки, а также должны быть приняты меры против уменьшения в моделирующем устройстве напряжений до уровня шумов и против потерь в деталях схемы. Вычисление на цифровой машине имеет то преимущество, что новое решение требует только подготовки нескольких новых перфокарт для входных данных.

Система управления реактором является системой релейного типа «включено»—«выключено». Она описывается системой дифференциальных уравнений, связывающих систему регулирования с первичной петлей теплоносителя и нейтронами реактора. 8 уравнений описывают кинетику реактора, 7—перенос тепла в петле, 2—

движение теплоносителя и 2 определяют алгебраические соотношения. Дифференциальные уравнения заменяются уравнениями в конечных разностях и подготавливаются к решению на машине обычными методами численного анализа.

Г. Х. Новик

1081. Цифровое моделирование сложных задач телефонной нагрузки в системах связи. Бротман, Минкер (Digital simulation of complex traffic problems in communications systems. Brotman Lewis, Minker Jack), Operat. Res., 1957, **5**, № 5, 650—679 (англ.)

Излагается метод моделирования работы сложной системы связи с помощью вычислительной машины. Рассматриваемая система связи содержит некоторое число узлов коммутации, связанных между собой пучками соединительных линий. В каждый узел коммутации включено несколько таких пучков, и любой пучок системы связи может быть соединен с любым другим пучком с помощью узлов коммутации.

Программа вычислительной машины предусматривает моделирование операций для коммутационных узлов ручного и автоматического обслуживания. При моделировании процессов ручного обслуживания (посылка вызова, разговор с вызываемым абонентом, вызов последующего узла коммутации) возможно любое распределение обслуживающего персонала по узлам коммутации при различном характере обслуживания соединения телефонисткой. Основными моделируемыми характеристиками при автоматическом обслуживании являются время набора номера и время установления соединения.

Машина обеспечивает: 1) моделирование нагрузки с любым распределением вероятностей поступления вызовов и длительности занятий и, в частности, при распределении вероятностей числа поступающих вызовов по закону Пуассона и при экспоненциальном законе распределения длительности занятий; каждое соединение характеризуется номером вызывающего абонента, номером вызываемого абонента, временем поступления вызова и длительностью соединения; 2) моделирование сети любой конфигурации с любым числом абонентских и соединительных линий; 3) моделирование любого порядка обслуживания с выбором обходных соединительных путей.

Возможно также исследование поведения системы связи при повреждениях соединительных линий или выходе из строя некоторых узлов коммутации.

Для заданной интенсивности нагрузки, конфигурации сети и порядка обслуживания работа сети оценивается следующими характеристиками: 1) процентом установленных соединений и потерянных вызовов для каждого узла коммутации и всей сети в целом; 2) процентом потерянных вызовов по различным причинам для каждого участка соединения и всей сети в целом; 3) использованием обслуживающего персонала и соединительных линий; 4) распределением длительности ожидания и средним временем ожидания; 5) средней длительностью занятия в зависимости от числа участвующих в соединении телефонисток, включая или исключая время разговора.

Машина может быть использована для моделирования переходных процессов в исследуемой сети связи.

С некоторыми изменениями описываемый в статье метод моделирования может быть использован также и для исследования задач регулировки уличного движения, регулировки движения самолетов и изучения пассажирских потоков на транспорте.

Ввиду недостаточного объема памяти входные данные поступают в машину с магнитной ленты. Логические операции извлекаются из памяти машины. Изменение конфигурации сети и порядка установления соединения сводится к изменениям в матрице памяти, а изменение характера обслуживания соединения телефонисткой производится путем нажатия ключа.

В машине запоминается вся эволюция устанавливаемого соединения, так как для определения выходных характеристик требуется полная история соединения. Для этой цели каждое соединение использует 24 цифры, помещаемые в отдельной части памяти машины. Ячейки памяти отведены также и для каждой телефонистки, абонентской линии и участка сети связи для того, чтобы фиксировать состояние системы во время прохождения соединения.

Для цели моделирования используется вычислительная машина с объемом памяти в 1000 слов, каждое из которых содержит 12 цифр.

А. Д. Харкевич

1082. Вычислительный комплекс АМА. Рем (The AMA assembler-computer. Rehm T. C.), Bell Labs Rec., 1957, **35**, № 10, 423—427 (англ.)

Телефонная компания «Белл» использует для координации междугородных телефонных переговоров, для оформления заказов на такие переговоры и расчетных операций по ним комплексную вычислительную и управляющую машину АМА (АМА — Automatic Message Accounting). Машина АМА построена в основном на стандартном телефонном релейном и частично электронном оборудовании. Блоки и узлы полностью взаимозаменяемы. В настоящее время АМА содержит 14 стандартных секций, каждая из которых обслуживает до 100 каналов. Число секций может быть увеличено простым подключением с помощью переходных контактных разъемов. Приведены блок-схема и фото машины, фото переходных узлов и контактных панелей. Популярно описывается работа АМА в режиме управления и в режиме обработки данных.

А. А. Крупский

1083. Рассмотрите эти применения электронных вычислительных машин. Бендж (Review these applications of electronic computers. Benge Eugene J.), Petrol. Refiner, 1957, **36**, № 9, 313—314 (англ.)

Обсуждаются возможности применения вычислительных машин в нефтяной промышленности. Многие нефтяные компании США широко применяют вычислительные машины для решения многих проблем, возникающих в процессе переработки нефти, при строительстве трубопроводов и резервуаров для хранения, бурении скважин и т. д.

Компания «Стандарт Ойл» применяет вычислительные машины в целях наиболее выгодного изыскания запасов нефти, бурения, эксплуатации скважин, очистки нефти, хранения ее, эксплуатации нефтепроводов, анализа рынка и т. д. В Нью-Йорке эта компания имеет вычислительную машину, моделирующую работу завода по переработке нефти.

Приводятся названия 6 докладов по применению вычислительных машин в нефтяной промышленности, прочитанных на конференции в Монреале 14—17 мая 1956 г. Стоимость эксплуатации вычислительной машины для решения проблем перегонки нефти колеблется от 900 до 33 000 долл. в месяц.

О. В. Бачин

1084. Электронный «мозг» за работой. Френч, Снайдер (Putting electronic «brains» to work. French Charles E., Snyder James C.), Food Engng, 1957, **29**, № 10, 84—85, 87—88 (англ.)

Одна из серий статей, посвященных вопросу использования электронного «мозга» для решения задач линейного программирования применительно к управлению производством.

Называя такие задачи, как составление планов производства и отдельных производственных заданий, выбор очередности изготовления изделий и вычисления цен, автор указывает на то, что круг задач, которые могут решаться электронным «мозгом» для нужд управления производством, более широк. На простом примере, взятом из производства пищевой индустрии, автор с помощью таблиц показывает последовательность решения перечисленных выше задач. Приведены исход-

ные данные (номенклатура, производственные участки, нормативы) и результаты, указывающие, в частности, на узкие места в производстве, оптимальную производственную программу, пути повышения прибылей и выбор оптимальной тары. Автор обращает внимание на необходимость оценки эффективности применения электронного «мозга», исходя из сложности и объема решающих задач. В. В. Васманов

1085. Вычислительная машина ГЭК для определения загрузки станков (Hec computer for machine—tool loading), Brit. Communs and Electronics, 1958, **5**, № 3, 229—230 (англ.)

Фирма «Бритиш Табулейтинг Машин» (British Tabulating Machine Co., Ltd) применяет на своем заводе в Летчворте вычислительную машину ГЭК-1201 для управления производственным процессом. Ожидается, что применение вычислительной машины для определения правильного использования оборудования позволит решить следующие основные задачи: 1) снижение капиталовложений на сырье и оборудование вследствие лучшего контроля производственного процесса; 2) снижение времени прохождения продукции по производственным участкам, что сделает производство более гибким; 3) увеличение выпуска продукции.

При подготовке производства на машине в первую очередь определяются необходимое количество сырья и оборудование и в соответствии с этим даются рекомендации по заказам, определяется наличие запасов на складах. Также определяется целесообразность производства отдельных деталей.

Затем на машине рассчитывается производственный процесс, для чего в машину вводятся: номер и описание детали; последовательность операций; станок или группа станков, требуемых для изготовления детали; рабочее время, время установки и снятия детали; требуемый специальный режущий инструмент, оснастка, сырье и т. д.

В результате машина рассчитывает загрузку оборудования на три месяца вперед, определяет незагруженные участки, устраняет возможность продолжительной работы станков в тяжелых режимах. В особых случаях машина может дать рекомендацию полного пересмотра производственной программы. О. В. Бачин

1086. Оборудование для обработки данных, полученных при инженерных испытаниях. Алмон (A central facility for processing engineering test data. Allmon Edward C.), IRE Trans. Instrum., 1956, PGI-5, June, 66—69, 6 (англ.)

Описывается цифровая вычислительная машина ИРА-1303 (ERA-1303) фирмы «Ремингтон Рэнд» (США), используемая военно-воздушным центром вооружения во Флориде для обработки данных, полученных в результате испытаний авиационного оружия.

ИРА-1303—большая универсальная двухадресная машина, работающая с 36-разрядными двоичными числами. Средняя скорость вычислений — 10 тыс. операций в 1 сек. Оперативная память машины емкостью 1024 чисел выполнена на электронно-лучевых трубках и имеет время выборки 14 мксек. Запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью 16384 чисел имеет время выборки 35 мсек. Внешнее запоминающее устройство машины на магнитной ленте имеет емкость 250 тыс. слов. Входные и выходные устройства машины работают на перфоленте и перфокартах. В машине 4700 электронных ламп, 6000 германиевых диодов, 150 реле. Потребляемая мощность составляет 65 *квт*. Имеется система водяного охлаждения. Вес машины 14 *т*. Машина занимает площадь 9,15×18,3 $м^2$.

Разрабатываются быстродействующее выходное устройство, позволяющее печатать результаты вычислений со скоростью 72 тыс. знаков в 1 мин., и система магнитной записи данных в воздухе, которая будет состоять из устройства записи непрерывного действия и записывающего устройства дискретного действия, а также устройства считывания с магнитной ленты, установленного на земле. Разрабатывается преобразователь напряжения в дискретный код, имеющий 42 канала и работающий с частотой 50 *гц*. Точность преобразования 0,1%. Н. В. Петрова

1087. Дискретные способы решения некоторых задач измерения и автоматического управления. Кессел, Брукс (Digital solutions to instrumentation and automatic control problems. Kessel Benjamin, Brooks Robert W.), IRE Trans. Instrum., 1956, PGJ-S, June, 79—82, 7 (англ.)

Отмечается необходимость повышения точности при измерениях и расчетах, так что в ряде случаев целесообразна замена устройств непрерывного действия устройствами дискретного счета. Приведены четыре примера применения устройств дискретного действия в промышленности.

В первом примере описывается автоматическое программное устройство для управления производственными процессами, состоящее из генератора импульсов стандартной частоты, счетчика импульсов и коммутационного поля. На выходах счетчика образуются импульсы определенной последовательности, которые с помощью шнуров на коммутационном поле подключаются к различным приборам, определяя тем самым очередность срабатывания отдельных механизмов.

Второй пример иллюстрирует использование методов дискретного счета для систематизации признаков автомобилей, выпускаемых с конвейера и отличающихся окраской, типом и принадлежностями. Отличительные признаки каждого автомобиля наносятся на перфокарты, а обработка данных производится с помощью электронного табулятора.

В третьем примере указывается возможность применения дискретного счета для анализа состава древесной щепы, из которой приготовляется бумажная масса. При анализе с помощью счетчика определяется длина деревянной щепки в виде числа импульсов, прошедших от генератора к счетчику за время, в течение которого щепка движется с постоянной скоростью между источником света и фотоэлементом. Одновременно на счетчик поступают сведения о весе щепки; операция деления производится методами непрерывного счета после преобразования.

Четвертый пример относится к способам измерения характеристик системы при продувке моделей самолетов в аэродинамических трубах. В связи с нестабильностью показаний отдельных приборов из-за больших колебаний измеряемых величин, для измерений могут быть использованы накапливающие счетчики. С помощью накапливающих счетчиков можно определить среднее значение измеряемой величины за определенный промежуток времени. И. М. Витенберг

1088. Применение электронных вычислительных машин для определения потерь энергии в связанной энергосистеме. Шнейдер (Der Einsatz elektronischer Rechenanlagen für die Ermittlung der Energieverteilung in einem vermaschten Netz. Schneider Wilhelm), Elektrizitätswirtschaft, 1958, **57**, № 1, 9—11 (нем.; рез. англ., франц.)

Показано, что определение потерь энергии в сетях может быть произведено путем решения системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка, которая может быть составлена при применении законов Кирхгофа. Отмечается возможность применения вычислительных машин для определения корней указанной системы алгебраических уравнений.

И. М. Витенберг

1089. Как использовать цифровую вычислительную машину для расчета гибкости трубопроводов.

Кольфлат, Напп (How to use digital computers to calculate piping flexibility. Kolflat Tor, Knapp K. E.). Heat., Piping and Air Condit., 1957, 29, № 11, 124—127 (англ.)

Рассматриваются уравнения, описывающие напряжение в трубопроводах, и основные этапы решения этих уравнений на цифровых вычислительных машинах. Приводятся сравнительные данные о длительностях вычислений вручную с помощью счетной линейки или клавишной счетной машины и на электронной цифровой вычислительной машине. А. В. Шилейко

1090. Развитие вычислительных машин (Computer developments), Westinghouse Engr, 1957, 17, № 1, 30—31 (англ.)

Фирма «Вестингауз» использует вычислительную машину типа 9ВМ-704 для расчетов в различных областях производства. В течение 1956 г. составлена программа для расчета стандартных трансформаторов мощностью от 1000 до 15000 *ква*. В этом случае иногда достигалась двухсоткратная экономия времени.

Недавно на Питтсбургском заводе фирмы установлена вычислительная машина УНИВАК. А. В. Аваев

1091. Цифровые вычислительные машины как пособие по проектированию для инженера-электрика. Бертуисл, Дент (The digital computer as an aid to the electrical design engineer. Birtwistle B., Dent Beryl M.), Metropol.-Vickers Gaz., 1957, 28, № 451, 53—59 (англ.)

Перепечатано из Proc. Instn Electr. Engrs (РЖМат, 1958, 5266). Приводятся примеры применения цифровой машины «МАРК 1» Манчестерского университета для расчета трансформаторов, магнитных усилителей, синхронных двигателей. Приведены блок-схемы программ. См. также РЖМат, 1958, 2553

1092. Компания «Пэсифик Пауэр энд Лайт» использует цифровую вычислительную машину для изучения гидроресурсов. В перспективе — больше энергии от реки. Форсман (PP & L uses a digital computer to study hydro capability. The prospects are more power from the river. Forsman Wallace), Electr. West., 1957, 19, № 15, 104—105 (англ.)

В популярной форме излагается опыт использования быстродействующей цифровой вычислительной машины для расчетов, связанных с использованием гидроэнергетических ресурсов р. Льюис, штат Вашингтон. Комплекс гидросооружений представляет собой четыре каскада с бассейнами, расположенными на высоте 1300, 1000, 490 и 240 футов. Были запрограммированы все изменения в режиме р. Льюис и найдены оптимальные уровни воды в напорных бассейнах для получения максимума электроэнергии. Г. К. Москатов

1093. Общие применения цифровых вычислительных машин. Бут (General applications of digital computers. Booth Andrew D.), J. Inst. Electr. Engrs, 1957, 3, № 36, 629—636 (англ.)

Приводится блок-схема цифровой вычислительной машины и дается краткое описание ее работы. Применение цифровых машин для различных целей показано на примерах: 1) расчета силового трансформатора; 2) расчета оптимального с точки зрения потребления энергии графика движения электропоезда между двумя станциями с учетом уклонов и поворотов железнодорожного пути; 3) расчета дифракции рентгеновских лучей, проходящих через кристаллическую решетку вещества; 4) перевода с одного языка на другой. Приводится отрывок машинного перевода с французского языка на английский. Для каждой задачи составлена блок-схема программы решения. А. Н. Чуйкин

1094. Электронные вычислительные машины в промышленности. Андерсон (Electronic computors in industry. Anderson J. C.), Industr. Rev. Africa, 1957, 9, № 4, 2—3, 5, 7, 9 (англ.)

Дается краткое описание принципов работы вычислительной машины непрерывного действия и машины дискретного действия. Показано, что машины дискретного действия применяются в тех случаях, когда требуется многократное решение одинаковых задач (бухгалтерские расчеты, расчеты допусков в машиностроении и пр.), а также для программного управления станками. При решении задач, часто встречающихся в инженерной практике и сводящихся к тому, чтобы определить влияние какого-то физического параметра на поведение исследуемой системы, применяются машины непрерывного действия.

На примере машины МАРК I Манчестерского университета показана экономическая эффективность замены ручного труда вычислителей работой вычислительной машины. Приводится список задач, которые решались в течение одной недели на машине МАРК I.

Затем дается краткое описание вычислительных машин, выпускаемых английской промышленностью:

1) ДЭЮКЕ (DEUCE—Digital Electronic Universal Computing Engine). Входные и выходные устройства машины работают с применением перфокарт. Запоминающее устройство выполнено на 12 акустических линиях задержки, в каждой из которых может циркулировать 32 двоичных разряда. Кроме того, в машине имеется магнитное запоминающее устройство на 8000 чисел. В машине 1250 электронных ламп. Система 60 алгебраических уравнений решается на ДЭЮКЕ за 1 час.

2) «Меркурий» (Mercury). Быстродействующая машина последовательного действия, работающая на частоте 1 *мгц*. Оперативное запоминающее устройство матричного типа на магнитных торах имели емкость 40960 двоичных разрядов. В машине используется магнитный барабан емкостью 163840 разрядов. Входные данные могут «читаться» непосредственно с бумажной ленты со скоростью 200 знаков в 1 сек. или вводиться с перфоленты со скоростью 25 знаков в 1 сек. Мощность, потребляемая машиной, составляет 25 *квт*.

3) «Пегас» (Pegasus). Входные и выходные устройства используют перфоленту. Оперативное запоминающее устройство имеет емкость 55 кодов. Емкость внешнего запоминающего устройства 5120 кодов. Время выполнения основных операций: сложение и вычитание 0,3 мсек; умножение 2 мсек, деление 5,4 мсек, логарифмирование 34 мсек

4) ГЭК (HEC). Так как эта машина предназначена главным образом для коммерческих расчетов, то в ней предусмотрена возможность преобразовывать именованные числа, часто встречающиеся при подобных расчетах (фунты стерлингов и т. п.), в двоичные числа. Для входных и выходных устройств применяются перфокарты. Емкость оперативной памяти составляет 4 40-разрядных числа. Емкость запоминающего устройства на магнитной ленте 40960 двоичных разрядов. В машине 1100 электронных ламп. Конструктивно машина представляет собой 4 блока.

5) ПКК (PCC—Programme Controlled Computor). Машина для коммерческих вычислений. Программа решения задачи, состоящая из 160 24-разрядных инструкций, устанавливается с помощью переключателей. Кроме того, в машине имеется еще 80 инструкций, образующих ряд подпрограмм. Входные данные поступают с перфокарт. Одновременно в машине движутся 4 перфокарты. Время прохождения 1 перфокарты через машину составляет около 2 сек.; мощность, потребляемая машиной, равна 13 *квт*. Габариты машины 3,5×2,14×0,31 *м*. А. Н. Чуйкин

1095. Новый этап в промышленной автоматике. О возможностях вычислительной техники. Панов (New stage in automation of industry: on the possibilities of calculating technique. Panov D.), Current Sci., 1957, 26, № 8, 237—238 (англ.)

Перевод статьи, опубликованной в газете «Известия Верховного Совета СССР» (12 января 1957 г., № 10 (12317)).

1096. Автоматизация бросает вызов и налагает ответственность. Баккингем (Automation: a challenge and a responsibility. Buckingham Walter S., Jr), IRE. Trans. Instrum., 1956, **PGI-5**, June, 15—18 (англ.)

Отмечаются большие успехи, достигнутые в области автоматизации за последние годы, и даются основные принципы введения автоматизации в промышленность. Указывается, что введение автоматизации может значительно повысить жизненный уровень людей. Приводятся цифры, которые на примере американской промышленности показывают, как введение автоматизации снижает потребность в рабочей силе. Особенно большую экономию может дать применение автоматических вычислительных машин там, где необходимо обрабатывать большое число данных, например при коммерческих и деловых расчетах в банках. Однако указывается, что быстрое введение автоматизации может повести к увеличению безработицы. Отмечается, что для успешного введения автоматизации во все отрасли промышленности США необходимо увеличить число людей с высшим образованием. А. Н. Чуйкин

1097. Вычисления в области технической химии. Вильямс, Джонсон, Роз (Computations in the field of engineering chemistry. Williams Theodore J., Johnson R. Curtis, Rose Arthur), J. Assoc. Comput. Machinery, 1957, **4**, № 4, 393—419 (англ.)

Обзорная статья. Библ. 53 назв.

1098. Анализ факториальных экспериментов (со смешиванием) на электронных счетных машинах. Роуэлл (The analysis of a factorial experiment (with confounding) on an electronic calculator. Rowell J. G.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 2, 242—246 (англ.)

1099. Торговля вычислительными машинами в нефтегазовой промышленности. Бернетт (The market for computers in the oil and natural gas industry. Burnett Ed), Computers and Automat., 1957, **6**, № 11, 10, 12—14 (англ.)

1100. Электронные вычислительные машины в операциях по съемке местности. Мак-Нэр (Electronic computers in surveying operations McNair Arthur J.), J. Surv. and Mapp. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1957, **83**, № 2, 1444-1—1444-7 (англ.)

Обзорно-популярная статья.

1101 К. Современные направления в области конструирования технологического оборудования. Сборник. Ред. Гокун В. Б., М., Машгиз, 1957, 266 стр., илл., 13 р. 25 к.

См. также: 3, 682, 862, 883, 893 К, 897, 905

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Агранович З. А. 330
Азбелев Н. В. 594
Айзерман М. А. 362, 363, 367, 368
Ака С. 7
Александров А. Д. 844
Амэмия 1028
Аржаных И. С. 430
Ахмедов К. Т. 474
Аяпбергенов С. А. 65 К

Б

Бакельман И. Я. 852
Батунер Л. М. 553
Белецкий А. 357
Белоусов В. Д. 149 Д
Берман Д. Л. 267
Бицадзе А. В. 413
Бляшке В. 816 К
Богданов А. В. 464
Богданов Ю. С. 233
Боляев И. П. 981
Бондаренко Б. А. 442
Бродский М. С. 580
Бугров Я. С. 241, 260
Бученков А. Н. 20 К
Быков Я. В. 482 К

В

Вагнер В. В. 146
Валицкий Ю. Н. 566
Ван Сян-хао 845
Василаке С. 409
Вейц Б. Е. 571
Виденский В. С. 264
Виленкин Н. Я. 194
Виноград Р. Э. 358
Виноградов Н. Н. 359
Власенко В. И. 966
Ворел З. 316
Выборны Р. 404

Г

Гавеля С. П. 417 Д
Гаврилюк В. Т. 2
Ганзбург И. М. 257
Ганин М. П. 385
Гантмахер Ф. Р. 362, 363, 367, 368
Гаркави А. Л. 244
Глазман И. М. 333, 334
Гиєденко Б. В. 2
Гокун В. Б. 1101 К
Голинский Б. Л. 261
Гордеев Н. В. 115
Гото 941, 1027
Гранас А. 591
Грилицький Д. В. 313
Гриневич Г. Д. 58
Гулканян Н. О. 452
Гун Шэнь 296
Гурьев М. Ф. 314
Гу Чао-хао 834

Д

Данелич И. А. 851
Девингталь Ю. В. 416Д
Демьянов Ю. А. 444
Джавадов М. Г. 405
Джрбашян М. М. 266
Дидидзе Ц. Е. 171
Дмитревский А. В. 1038
Дмитренко Л. С. 450
Добрев Д. 503
Долидзе Д. Е. 434
Доступов Б. Г. 638
Драпкін А. Б. 396, 397
Дубовицкий А. Я. 55
Дуйчев И. 133
Думитреску Д. 866
Дундученко Л. О. 284
Дымков С. С. 393

Е

Еругин Н. П. 322
Ершов А. П. 922

Ж

Жданов Г. С. 966
Жислин Г. М. 487

З

Зморович В. А. 310
Зуховицкий С. И. 599

И

Иванов В. В. 472
Ивата 774
Ильин В. А. 394, 395
Инуи Т. 414 К
Ионеску В. 866
Исмаилов М. У. 315
Ито 934

Й

Йосида 402

К

Каляев А. В. 426
Камагата 1042
Канно М. 977
Катков Г. Ф. 814
Кацкова О. Н. 902
Каясима К 684
Клоков Ю. А. 351
Кольман Э. 10
Конюшков А. А. 258
Коробейник Ю. Ф. 281
Коробейников В. П. 429
Коротков С. Ф. 436
Кошелев А. И. 451
Крал И. 238
Краплин М. А. 280, 302
Красносельский М. А. 366
Круликовский Н. Н. 582
Кумсишвили В. А. 636
Курцвейль Я. 316

Л

Лаврик А. Ф. 131 Д
Ладыженская О. А. 375
Ландо Ю. К. 475
Летов А. М. 372 К
Лившиц М. С. 580
Ли Го-пин 308
Ли Ди 31
Ли Дя Гон 247
Линник Ю. В. 614, 620
Линь Цюнь 600
Ли Фын чжан 236
Ли Цзя сюнь 963
Лозинский С. М. 242
Лунц Г. Л. 275
Лу Цин-цзюнь 259

М

Макарова Л. Я. 303
Малаховский В. С. 817 Д
Малюжинец Г. Д. 547
Мальцев А. И. 174
Маравиа М. 511
Марек И. 238
Марков А. А. 81
Маркус А. С. 575
Маркушевич А. И. 270, 516 К
Марченко В. А. 330
Масленников М. В. 481
Масленникова В. Н. 374
Мельник И. М. 287
Михайлова К. А. 79
Мозжерова Н. И. 390
Мори 978

Н

Наумов К. А. 440
Никольский С. М. 239, 240, 483
Новоселов В. С. 419
Нода 980
Номура Т. 979
Норимацу 1040

О

Оганесян В. А. 147, 148
Окадзаки Б. 1020
Окунев Л. Я. 132 К

П

Пальмов В. А. 439
Пан Ченг—тунг 103
Пахарєва Н. О. 437
Пинегин С. В. 27 Ж
Плешкан И. И. 339
Плисс В. А. 361
Поваров Г. Н. 185
Погосов А. А. 425
Позняк Э. Г. 858
Помазков Н. С. 1057 К
Потлов В. В. 336
Проскуряков И. В. 135 К
Протасов А. М. 553
Пэркаль Ю. 248

Р

Разумовский С. Н. 914
Римский-Корсаков Б. С. 552 К
Рогожин В. С. 285
Роднянский А. М. 200, 201
Рожанская Ю. А. 95
Розенфельд Б. А. 35, 758, 759
Рымаренко Б. А. 265
Рябушко А. П. 470 Д

С

Савельев С. И. 811
Саи К. 175, 178
Сапа В. А. 418
Саргсян И. С. 331
Саульев В. К. 869
Сахнович Л. А. 471
Се Бан-цзе 141
Сёдзи 978
Сибирский К. С. 339, 342
Симада 684
Сиокос Х. 319
Ситник Н. Х. 982
Скитович В. П. 614
Слезінгер І. Н. 445
Слободецкий Л. Н. 384
Смирнов Н. В. 626
Соколов А. Д. 966
Солиан А. 142
Стечкин С. Б. 255
Сташкевич О. М. 461
Стрельцов В. В. 840
Судаков В. Н. 246
Сунь Энь-хо 615
Суэока К. 525

Т

Табуева В. А. 340
Тавадян А. Б. 268
Тагути Г. 720
Тарабан М. П. 56
Тиман А. Ф. 286
Торопыгин Е. И. 1037
Тотт Р. 866
Трупин Ш. Д. 818
Туганов Н. Г. 810
Тулянская Т. С. 299

У

Уразбаев Б. М. 150
Уфлянд Я. С. 441

Ф

Фаге М. К. 376, 377
Фаддеев Д. К. 875
Фишман К. М. 566

Х

Хавин В. П. 276
Хасира 1043
Хейфец Б. С. 890
Хираяма 1036
Хуа Ло-гэн 758, 759
Ху Кун-шэн 477

Ц

Цалюк З. Б. 593 594, 873
Цейтин Г. С. 80
Цзи Янь-жуй 236
Цихистави В. 809
Цкирия К. Е. 486

Ч

Чавчанидзе В. В. 636
Чакалов Л. 1
Чжан Ли-нин 341
Чжан Су-чэн 207
Чибрикова Л. И. 286

Ш

Шадури Р. С. 636
Шарадзенидзе К. М. 66 К
Швед Г. Л. 778
Шеваллей 9
Шиманов С. Н. 369
Шмыглевский Ю. Д. 902

Щ

Щедрова Н. С. 495
Щербаков Р. Н. 807, 808

Э

Эзрохи И. А. 268, 269

Ю

Юань Чжао-дин 894 Д

Я

Яблоков В. А. 381
Ямасита 1011
Яхнин Б. М. 263

A

Abe H. 295
Abhyankar S. 512
Abou-Hussein M. S. M. 962
Ackerlind E. 634
Adamson I. T. 157
Addis A. 776 K
Adem J. 220
Aeschlimann F. 469
Agostinelli C. 463
Akers S. B., Jr 717
Albert A. A. 169
Albrecht F. 198
Aldridge W. L. 122
Alexits G. 250
Alger P. L. 21 K
Aljančič S. 514
Allmon E. C. 1086
Al-Salam W. A. 520, 527
Alterman I. 888
Altman M. 589, 590, 596, 597
Ambrosini M. L. 985
Amemiya I. 567
Ampère A.-M. 51 K
Ananda-Rau K. 300
Anderson A. G. 908
Anderson A. R. 96
Anderson J. C. 1094
Anderson R. L. 671
Andreian-Cazacu C. 273
Arató M. 513, 635
Armata E. J. 987
Armitage J. V. 151
Armstrong R. W. 1072
Arscott F. M. 537
Axsmith D. J. 1064

B

Babister A. W. 427
Babuška I. 4
Bădescu R. 579
Bagemihl F. 305
Baiada E. 379
Bailey N. T. J. 741
Bainbridge J. R. 677
Bajada E. 228
Bajcsay P. 491 K
Bajraktarević M. 504
Banach S. 507 K
Bankwitz C. 117
Barache J. 698
Barbiera F. 62 K, 63 K
Barbuti U. 360
Barra J.-R. 613
Barratt M. G. 219
Barrett J. H. 352, 354
Bartholomew D. J. 661
Barton D. E. 653
Barton J. C. 974
Bartsch W. 75 K
Bashe C. J. 1025
Bass D. 25 K
Bass R. W. 326
Bassali W. A. 447—449
Basu B. K. 910
Batschelet E. 618
Bauer W. E. 931
Bayly J. G. 976
Bazilevskii Iu. Ia. 924
Beard R. H. 16
Beckmann M. J. 739
Beer A. C. 901
Bellman R. 329
Bendat J. S. 630
Benedicty M. 783
Benge E. J. 1083
Bengston R. J. 1009
Bendat J. S. 630
Bennett J. H. 640, 748
Berardino V. di 876
Berg L. 494, 500
Bergman G. 130
Berkeley E. C. 1024
Beth E. W. 47
Berni A. 762
Bhonsle B. R. 526, 546
Bielecki A. 357
Biernacki M. 293, 294 298
Bihari I. 356
Birch B. J.113
Birtwistle B. 1091
Blachman N. M. 1002
Blackwell D. 705
Blalock H. M., Jr 668
Block H. D. 855
Blum M. 631
Bochner S. 627
Bodewig E. 880, 881
Bohte Z. 564
Boiangiu D. D. 1019
Boone W. W. 78
Booth A. D. 946, 998, 1093
Boron P. E. 1078
Bouligand G. 806, 820
Bournonville L. de 1069
Bower G. G. 994
Box G. E. 675
Boxer R. 861
Brafman F. 535
Bram J. 601
Branges L. de 544
Brauer R. 139
Breny H. 608
Briggs W. E. 124
Brooks R. W. 1087
Brotman L. 1081
Browne H. N. 865
Bruins E. M. 29
Brundell P.-O. 905
Brzoska Fr. 75 K
Buck R. C. 506 K
Buchholz W. 1025
Buckingham W. S., Jr 1096
Buder E. E. 1074
Bühlmann H. 617
Burnett E. 1099
Burniat P. 797

C

Calhoun S. R. 708
Camia F. 457
Campbell D. A. 974
Caricato G. 455
Carlitz L. 125, 527, 534
Cartan H. 199
Carter C. W. 727
Carteron J. 700
Case K. M. 465
Castoldi L. 734
Castrillon R. R. 420
Cattabriga L. 407
Cayeux A. de 60
Chadan K. 476
Chakrabarty N. K. 538
Chakravarti I. M. 654
Chang Li-ning 341
Chang Su-cheng 207
Channon J. B. 68 K
Chapin N. 928, 1059 K
Charnes A. 687
Charpie R. A. 26 K
Chase M. N. 901
Chen Kien-kwong 262
Chen Yung-ming 251
Chevalley C. 9
Chi J. S. 234
Chiffi A. 399
Chisini O. 794
Choquard P. F. 901
Chow Wei-Liang 792, 801
Churchman H. C. 14
Ciancaglini H. R. 1010
Cimmino G. 392
Clark R. A. 421
Clarke S. L. H. 930
Clenshaw C. W. 899
Cogan E. J. 509 K
Colombo B. 1018
Comstock R. E. 651
Connor W. S. 680
Conrad R. 895
Cook E. Jr 272
Cooper W. W. 687
Corduneanu C. 344
Corput J. G. van der 518, 543
Cosniță C. 767
Coulmy G. 889
Cowling V. F. 297, 528
Coz M. 821, 822
Crank J. 870
Cuciuc M. 350
Curtiss J. H. 887
Custaud 61

D

Davenport H. 45
David F. N. 656
Davies E. T. 48
Davis H. B. 960
Dedecker P. 223, 488
Deleanu A. 565
Denis F. 813
Denis-Papin M. 136 K
Denjoy A. 230, 309
Dent B. M. 1091
Deprit A. 560, 561, 568, 860
Derman C. 723
Destouches J.-L. 469
Diamantopoulos Th. 274
Diehl W. S. 751
Dilworth R. P. 634
Dinculeanu N. 570
Dlab V. 140
Dobrescu A. 53 K
Dombrowskî P. 237
Domkowitsch E. 788
Donegan J. J. 555
Dennellan T. 753
Dor L. 742
Dorodnitîn A. 3
Dorsey Th. 1066
Dostert L. E. 1047
Drbohlav K. 235
Drs L. 786
Dubins L. E. 702, 841
Duff G. F. D. 388, 389
Dupač V. 637
Duverger L. 1012

E

Elfving G. 642
Ellis H. W. 572
Ellis R. 837
Ercoli P. 917
Erdös P. 105
Erickson V. 716
Est W. T. 761

F

Fadell E. 222
Falgas M. 278, 279
Farinha J. 496
Faure R. 136, 364, 365
Feder D. P. 885
Fehr H. F. 757

Feingold S. K. 990
Feit W. 129
Fell R. B. 685
Feller W. 328
Fer B. 415 Д
Ferrer Martin S. 725
Fevrier P. 93
Fihtengolt G. M. 42
Finkner A. L. 671
Fischer H. R. 587, 588
Fitzpatrick R. 740
Flannell C. F. 1013
Fleischer I. 163
Fleming W. H. 710
Fleury J. P. 728
Foguel S. R. 592
FØlner E. 605
Foote R. J. 665
Forsman W. 1092
Foulkes H. O. 134
Fourès-Bruhat Y. 829
Fox P. 871
Fox R. H. 191
Franceschini W. 1068
Frankel T. 836
Fréchet M. 612
Freiberger W. 446
French C. E. 1084
Freudenthal H. 13
Freund J. E. 22 К
Frey G. 87
Friedman A. 408, 410
Fröberg C.-E. 926
Fröhlich A. 77
Fujiwara T. 172
Fulkerson D. R. 693

G

Gabbard J. L., Jr 1070
Gál I. S. 187
Gardner M. 17
Gatteschi L. 521
Geffroy J. 644
Geiringer H. 401
Gendreu R. 961
Gheorghiță St. I. 431
Ghika A. 577
Ghizzetti A. 44
Gibson G. R. 54 К
Gilbarg D. 435
Gillette D. 704
Girshick M. A. 662
Gleason A. M. 604
Goch D. C. 670
Godeaux L. 795, 796
Godement M. 563
Goldman A. J. 701
Gonshor H. 581
Goodman L. A. 669
Googe J. M. 955
Goto M. 92
Gourary M. 706
Grabiel F. 839
Grandmontagne R. 903
Grant A. M. 677
Grätzer G. 176
Graybill F. A. 646
Green P. E. 708
Greenberg B. G. 652
Greville T. N. E. 898
Griffiths H. B. 205
Groelinger H. J. 1029
Grogan D. J. 1046
Groot J. de 195
Grundy P. M. 689
Grzegorczyk A. 76
Grzybowski J. 1017
Guggenheimer H. 224
Gupta Sh. S. 650
Gutteling C. 1003
Gutwirth A. 791
Guy R. K. 688

H

Hacker T. 423
Hahn W. 327
Hájek O. 337
Halberg C. J. A. 574
Haldane J. B. S. 50
Hall R. 799
Hallen E. 557
Halliday M. A. K. 1055
Hammer P. C. 1058 К
Handscomb D. C. 628
Hanner O. 850
Hannula F. W. 971
Harrold O. G., Jr 197
Härtig K. 89
Hartree D. R. 868
Hauptman H. 145
Havel V. 787
Hawkins D. 124
Hayashi K. 353
Healy M. J. R. 682
Heinrich W. W. 478
Helfenstein H. G. 805
Hellwig G. 406
Helming F. W., Jr 969
Hestenes M. R. 878
Hill P. R. 1080
Hilton P. J. 211
Hirschfeld R. 595
Hirzebruch F. 227
Hlawka E. 111
Hodson J. D. 71 К
Hopper G. M. 921
Horák V. 884
Horvay G. 398
Hostelet G. 12
Houel J. 907 К
Hronec J. 508 К
Hsiang Fu Cheng 256
Hsieh Pang-chieh 141
Huber A. 1000
Hufford G. 370
Hu Kuen-Šen 477
Hummel J. A. 277
Hunter J. S. 675
Hurewicz W. 222
Huss C. R. 555
Hustý Z. 318
Hutchinson J. S. 945

I

Inagaki M. 793
Ise K. 355
Ishida M. 800
Israel D. R. 912
Itard J. 36
Ito N. 144
Ivan J. 167
Iwasawa K. 154

J

Jabotinsky E. 791
Jackson J. E. 721
Jacobs W. 695
Jain M. K. 289
Jaroch O. 551 К
Jaworowski J. W. 204
Jeffreys H. 863
Jenkins G. M. 624
Jensen A. 719
Jewett J. 311
John F. 380
Johnson N. L. 656
Johnson P. 744
Johnson R. C. 1097
Johnson R. E. 67 К
Johnson S. M. 693, 718
Jongh P. C. de 493
Joos G. 69 К
Joseph V. 827

K

Kacner A. 480
Kadeřávek F. 39
Kahane J.-P. 253
Kaluza Th. 69 К
Kan D. M. 215-218
Kanno M. 977
Kapuano I. 196
Karle J. 145
Kasahara S. 193
Kasuga T. 473
Kaufmann A. 136 К
Kaul R. N. 832
Kawata T. 686
Kay I. 632
Kayashima K. 684
Kazarinoff D. K. 765
Kazarinoff N. D. 766
Kelleher Th. 651
Kepr B. 764 К
Kervaire M. A. 221
Kessel B. 1087
King E. N. 1078
King E. P. 659
King G. W. 1053
Kinoshita Shin' ichi 183, 184
Kintner P. M. 987
Kiokemeister F. L. 67 К
Kishi M. 232
Klamkin M. S. 438
Klee V. L., Jr 559, 562
Klein M. L. 988, 1030
Kluvánek I. 229
Knapowski S. 106
Knapp K. E. 1089
Knobloch H.-W. 323
Kodaira K. 227
Kohn J. J. 386
Kolflat T. 1089
Koman M. 602
Komatu Y. 282
Komura Y. 558
Koníček O. 325, 542
Koopmans T. 714
Korfhage R. 1051
Kosiński A. 203
Koutsoudas A. 1050, 1051
Kovasznay L. S. 975
Král J. 238
Králik D. 250
Krasner M. 94
Kratzer A. 40
Kregeloh H. 967
Kreyszig E. 541
Krickeberg K. 623
Krishnaiah P. V. 497
Krištoufek K. 1006
Kruskal W. H. 669
Kruvanek I. 229
Krzywoblocki M. Z. v. 433
Krzyz J, 293
Kubota T. 153, 155
Kung Sun 296
Kurzweil J. 43
Kustaanheimo P. 846

L

Ladîjenskaia O. A. 42
Lagrange J. 501
Laitoch M. 347
Laitone E. V. 349
Lalague P. 243, 249 Д
Lambek J. 123
Lariviere R. 775
Laurent-Duhamel M.-J. 732
Lavendhomme R. 610
Lawden D. F. 424, 490
Ledochowski J. St. M 1065
Lee C. N. 192
Lee F. C. 236
Lee K. P. 308
Lee Pei-shing 225
Lee W. T. 1080
Lemke B. C. 1071
Lenz H. 519
Leptin H. 583, 584
Leroy A. 745
Le Roy J. 619
Leser T. 522
Lesley M. 32
Levin D. 74 К
Lewis R. 706
Lieblein J. 904
Liermann H. 324
Línek A. 1034
Linsman M. 779, 918
Lions J. L. 382
Lipton S. 682
Littauer S. 723
Litwiniszyn J. 428
Livingston D. 531
Lloyd Thomas E. 956
Loève M. 616
Lomax K. S. 735
Loo Ching-tsün 252
Look K. H. 304
Lotkin M. 865
Louis G. 775
Łukaszewicz L. 954
Luthra S. M. 102

M

Macbeath A. M. 112
Machol R. 1050
MacLean A. G. 641
McNair A. J. 1100
McNaughton R. 83
Madison R. L. 722
Maginniss F. J. 920
Malcarney A. L. 1079
Malcor R. 743
Manara C. F. 768, 790
Manaresi G. 343
Mandan R. 756
Mandel J. 554
Mardell T. B. J. 54 К
Marek I. 422
Marek J. 238
Marsden H. 24 К
Martan Fr. 517 К
Martinek J. 462
Martinez H. M. 948
Mattuck A. 798
Matusita K. 657
Mauldon J. G. 548
Maurer-Tison F. 831
Maurice R. J. 660
Maxwell M. E. 939
Medek V. 784
Meier P. 681
Melvin M. A. 532
Menger K. 499
Meyers R. A. 958, 960
Michels L. S. 991
Mihailescu E. 91
Mihailescu T. 53 К
Mikhail M. N. 291, 292
Miller D. W. 138
Miller J. C. P. 320
Milnes H. W. 569
Minker J. 1081
Miranker W. L. 383, 460
Mirkil H. 773
Mishoe L. I. 332
Mitra M. 443
Mitsui T. 101
Mizuno K. 209
Moch F. 99
Mohanty R. 254
Molnár F. 769
Monseau M. 771
Montù E. 72 К
Moran P. A. P. 747
Morelock J. C. 789
Morgan H. C. 1030
Mori M. 152, 156
Mori Y. 160
Morita K. 202
Morita M. 900
Moriya M. 158
Moser L. 123
Mossakowski J. 454
Mostowski A. 98
Munkres J. 206
Muth J. F. 692

N

Nadler M. 909
Nagata J. 189, 190
Nagata M. 162

Nagumo M. 355
Naines J. B., Jr 950
Namyet S. 997
Narita M. 161
Nash J. 403
Nassif M. 449
Natterodt M. 1060 П
Neeland F. 706
Neisser H. 697
Neu R. F. 1033
Neumann B. H. 143
Neumann J. von 690
Nevanlinna F. 586
Nijenhuis A. 833
Nitsche J. C. C. 489
Noguchi H. 212
Nomura T. 979
Nordhaus E. A. 321
Norman R. Z. 509 К
Nowosiolow S. 64 К

O

Oberly J. J. 940
Obláth R. 34
Oehmke R. H. 168
Oettinger A. G. 1062
Ohara A. 144
Ohtsuka M. 231
Olver F. W. J. 899
Ono T. 137
Orden A. 715
Orts J. M. 529
Osborn R. 736
Osserman R. 804
Ostle B. 722
Ostrom T. G. 848
Ou So-mo 283

P

Paasche I. 492, 510
Pachale H. 317
Paechter G. F. 226
Page T. 699
Palamà G. 119
Palevsky M. 995
Palmer J. 733
Panov D. 1095
Panse V. G. 750
Pâquet P. V. 752
Parker R. V. 126
Parzen E. 625
Patz W. 906 К
Paul R. J. A. 956, 983, 984
Pearce R. M. 976
Pedder D. G. 1016
Pedder R. 1016
Penfield P., Jr 1048
Pennycuick K. 696
Percus J. 713
Perepiolchina A. N. 763 К
Perkal J. 248
Perry N. C. 789
Pfister R. C. 1074
Pham Mau Quan 828
Phan-Van-Loc 466
Phillips R. S. 411
Piaget J. 100
Piccard S. 52 К
Pierson D. D. 969
Pignataro S. 127
Pincherle S. 19 К
Piper W. W. 916
Pirko Z. 549 К — 551 К
Pleijel A. 853, 854
Pliś A. 378
Polimerou L. G. 964
Posner E. C. 164
Priestley M. B. 624
Prijatelj N. 770
Prvanovič M. 823

Q

Quigley F. 312
Quinto L. 713

R

Radok U. 677
Ragab F. M. 523, 524, 533
Rahman Q. I. 290
Ralston A. 871
Randolph P. H. 716
Rao C. R. 654
Rao P. V. S. 910
Rao V. R. 678
Rath P. C. 254
Read R. C. 974
Redheffer R. M. 387
Rehm T. C. 1082
Reichenbach H. 15
Reitzer Th. 728
Rektorys K. 46
Rembs E. 856, 857, 859
Rényi A. 109, 635
Restrepo R. 709
Ricci G. 104
Richtmyer R. D. 371 К
Ridout D. 110
Rivlin R. S. 815
Roberts L. 872
Robinson A. 82
Robinson H. F. 651
Robinson L. B. 819
Robinson R. M. 121
Rochester N. 1025
Rogers C. A. 112
Rojas B. 679
Rootselaar B. 88
Rose A. 84, 1097
Rosenheim D. E. 908
Rossier P. 843
Rot A. 540
Rot M. 468
Rouché N. 609
Roumieu Ch. 606, 607
Rowan T. C. 1005
Rowe J. E. 1070
Rowell J. 1098
Rutishauser H. 999

S

Sai K. 175, 178
Saito R. 900
Sakaguchi M. 683
Saksena K. M. 545
Salinas B. R. 245
Saltykow N. N. 373
Salzer H. E. 904
Sanchez-Crespo-Rodriguez J. L. 749
Santoboni L. 737
Sarhan A. E. 652
Sarkar G. K. 538
Sastry K. V. R. 750
Scarf H. E. 703, 694
Schäffer J. J. 338
Schäfke F. W. 485, 536
Schechter R. S. 968
Schieferdecker E. 307
Schlage E. L. 128
Schmidt E. T. 176
Schneider W. 1088
Schöbl F. 896
Schönheim I. 116
Schron L. 907 К
Schröter K. 85, 86, 90
Schultz L. 1023
Schulz-Arenstorff R. 108
Schwartz L. 835
Sebastião e Silva J. 97
Sedláček J. 186, 849
Segre B. 842
Seidel J. J. 755
Seifert W. W. 965
Sen A. R. 671
Seth B. R. 456
Shapiro V. L. 515
Shapley L. S. 694
Shepherdson J. C. 77
Shiffman M. 435
Shilling Ch. W. 1077
Shimada S. 684
Shinbrot M. 479
Sibson R. 772
Siegel C. L. 484
Silverman R. A. 632
Simon H. A. 663
Sinclair A. 301
Singh V. N. 530
Šmahel J. 892
Smets H. 556
Smirnov V. I. 70 К
Smith A. McLeish 68 К
Smith B. D., Jr 989
Smith C. A. B. 688, 689
Smith G. F. 815
Smith H. F. 664
Smith J. E., Jr 1009
Smith V. L. 724
Smith W. L. 621
Snyder J. C. 1084
Sobel M. 650
Söderström L.-G. 738
Solomon H. 723, 731
Sós V. T. 107
Spanier E. H. 213, 214
Spaulding C. P. 993
Spencer D. C. 386
Speranza F. 812
Spindelberger W. 883
Sredniawa B. 467
Srivastava H. M. 539
Srovnal A. 517 К
Stamatis E. 30
Stampacchia G. 335
Stancu D. D. 874
Staring A. J. 781
Stein E. M. 234
Stein S. K. 120
Steinberg R. 576
St. Johnston A. 930
Stojaković M. 879
Stoppelli F. 453
Straszewicz S. 37
Strother W. L. 1014
Stuart A. 649
Subrahmanyam N. V. 497
Su Buchin 824, 826
Suits D. B. 666
Sukhatme B. V. 648
Sukhatme P. V. 750
Sullivan G. L. 882
Sun En-hou 615
Suzuki H. 210
Sutcliffe A. 777
Sutcliffe J. 655
Svoboda A. 919
Swamy N. V. V. J. 532
Swan A. W. 707
Swanson W. A. 1073
Szabó A. 28
Szekeres G. 498, 603
Szeptycki P. 598, 954

T

Takahashi M. 672
Takeno H. 166
Taylor A. E. 574
Temple G. 6
Terasaka H. 184
Thaler S. 861
Thébault V. 754
Thomas E. L. 949
Thomas R. E. 729
Thompson J. E. 73 К
Thron W. J. 297
Thurston H. A. 173
Titus C. J. 306
Todorow M. 877
Toma V. 923
Tominaga H. 165
Tomlinson R. C. 647
Tomovich R. 957
Tong Kwang-chang 400
Truesdell C. 782
Tucker L. R. 676

U

Ullmo J. 746
Urban A. 785

V

Vacca R. 917
Vaccaro M. 180
Vaida D. 177
Valach M. 911, 944
Van Laethem M. 502
Varga R. S. 867
Vartak M. N. 114
Veit J. 551 К
Venkatachalam Iyer. R. 118
Vernotte P. 891
Vincensini P. 802, 803
Vincze I. 643
Vinti C. 379
Vinti J. P. 522
Vivier M. 838
Vodička V. 458, 459
Voelz K. 667
Vollmer W. G. 915
Vooren W. L. van de 780
Vranceanu G. 53 К, 825
Vredenduin P. G. J. 179
Vries H. de 188
Výborný R. 391

W

Wagner A. 847
Wahlström G. 926
Walker J. 970
Walsh J. E. 691
Walther A. 886
Walusinski G. 5
Ward J. H., Jr 730
Ward L. E., Jr 712
Warner S. 578
Washio Y. 674
Watanabe S. 181, 182, 633
Weaver M. 159
Wegrzyn Et. 1017
Weil A. 830
Weiss G. H. 234, 629
Weiss L. 645
Weston J. D. 573
White R. F. 679
Whitehead J. H. C. 213, 219
Whitelock L. D. 1076
Widom H. 585
Wilks S. S. 639
Williams F. C. 933
Williams F. K. 1030
Williams T. J. 1097
Willis D. W. 935
Wintner A. 345, 346, 348
Wittgenstein L. 23 К
Wojciechowski K. 38
Wolfowitz J. 658
Wolska-Bochenek J. 432
Woodger M. 1007
Wooding R. A. 611
Woollett E. R. 897
Wopperer E. 11
Worthy W. D. 862

Y

Yajima T. 183
Yates F. 682
Yates R. C. 271
Yeh G. C. K. 462
Yngve V. H. 1049, 1054
Yosida K. 622
Young G. S. 505

Z

Zaroodny S. J. 864
Zassenhaus H. 170
Zeeman E. C. 208
Zelen M. 673
Zimmern B. 683, 726

Технический редактор *П. Н. Гаврик*